



Wykres i własności funkcji $y = f(x) + q$, gdzie $f(x) = a^x$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykres i własności funkcji $y = f(x) + q$, gdzie $f(x) = a^x$

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Wykresy funkcji wykładniczych możemy dowolnie przekształcać w układzie współrzędnych. Przesunięcia oraz odbicia wykresu funkcji mogą powodować na przykład zmianę asymptoty wykresu, co jest równoważne ze zmianą zbioru wartości funkcji.

Twoje cele

- Określisz własności funkcji wykładniczej po przesunięciu wykresu w górę lub w dół względem osi rzędnych układu współrzędnych.
- Wymienisz różnice pomiędzy wykresami i własnościami funkcji $f(x) = a^x$ oraz $g(x) = a^x + q$.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Wykres [funkcji wykładniczej](#) określonej wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ oraz $x \in \mathbb{R}$, możemy dowolnie przekształcać na przykład względem osi układu współrzędnych.

Definicja: przekształcenie wykresu funkcji $f(x) + q$

Przekształcenie wykresu funkcji $f(x) + q$ oznacza przesunięcie wykresu funkcji $f(x)$ o q jednostek w górę dla $q > 0$ lub q jednostek w dół dla $q < 0$.

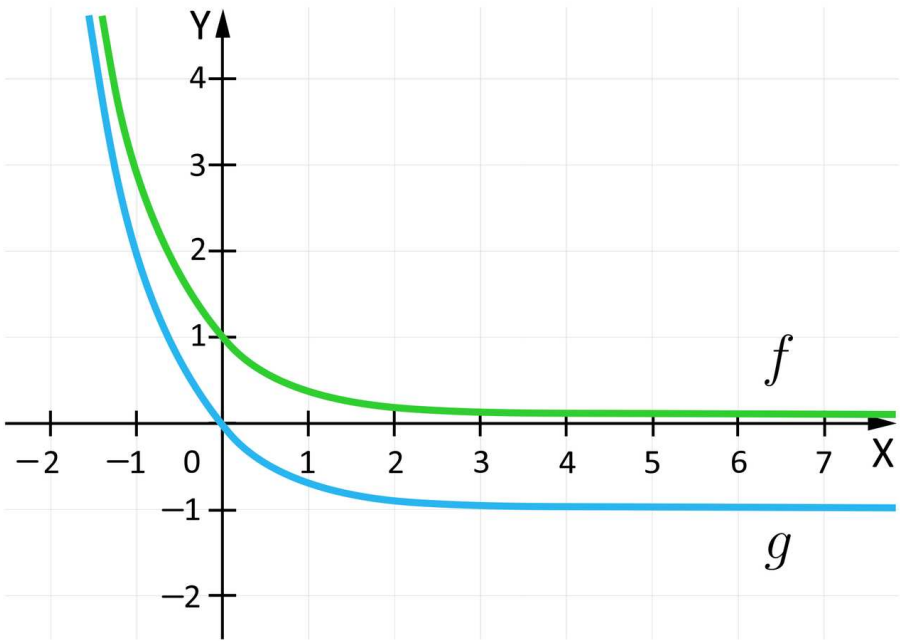
Rozpatrzmy funkcje określone wzorami $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ oraz $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$.

Tabele wartości tych funkcji dla niektórych argumentów przedstawiają się następująco:

Argumenty i Wartości Funkcji					
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

Argumenty i Wartości Funkcji					
x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	8	2	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{8}{9}$

Wykresy tych funkcji naszkicujemy w jednym układzie współrzędnych:



Zauważmy, że wykres funkcji g możemy otrzymać poprzez [przesunięcie wykresu funkcji \$f\$](#) o 1 jednostkę w dół.

Porównajmy niektóre własności dla obu tych funkcji:

- zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(0, \infty)$, funkcji g przedział $(-1, \infty)$,
- wykres funkcji f przechodzi przez punkt o współrzędnych $(0, 1)$, zaś wykres funkcji g przez punkt o współrzędnych $(0, 0)$,
- asymptotą wykresu funkcji f jest prosta $y = 0$, a wykresu funkcji g prosta $y = -1$,
- funkcja f nie ma miejsc zerowych, a miejscem zerowym funkcji g jest liczba 0.

Dla wykresów funkcji określonych wzorami $f(x) = a^x$ oraz $g(x) = a^x + q$ zachodzą następujące własności:

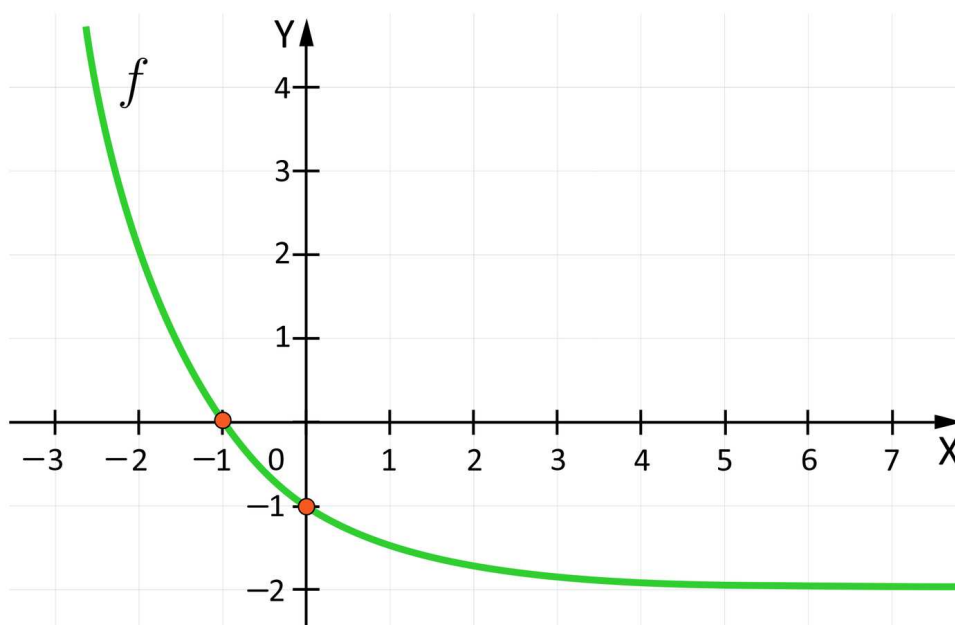
- funkcje mają te same dziedziny, ale różne zbiory wartości,
- wykresy mają różne asymptoty poziome,
- przesunięcie wykres funkcji f w dół powoduje powstanie miejsca zerowego.

Przesunięcie w górę lub w dół wykresu funkcji wykładniczej nie zmienia monotoniczności tej funkcji. Funkcje przed i po przesunięciu wykresu są różnowartościowe.

Przykład 1

Naszkicujemy wykres oraz określimy kilka własności funkcji zadanej wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$.

Wykres funkcji f przedstawia się następująco:



Odczytujemy własności funkcji z wykresu:

- zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-2, \infty)$,
- asymptotą wykresu funkcji jest prosta $y = -2$,

- punkt przecięcia z osią Y ma współrzędne $(0, -1)$,
- miejscem zerowym jest liczba -1 ,
- funkcja jest malejąca,
- dla argumentów mniejszych od -1 funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

Nie każdy wykres funkcji wykładniczej po przesunięciu wzdłuż osi rzędnych układu współrzędnych będzie miał miejsce zerowe.

Przykład 2

Funkcje określone wzorami $f(x) = (\sqrt{2})^x + 2$, $g(x) = (\frac{1}{4})^x + 3$ oraz $h(x) = 5^x + 1$ nie mają miejsc zerowych, ponieważ ich wykresy znajdują się nad osią X układu współrzędnych.

Przykład 3

Określmy funkcję f wzorem $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$. Niech $g(x) = f(x) - 2$. Wyznaczymy:

- zbiór wartości funkcji g ,
- miejsca zerowe funkcji g .

Rozwiązania:

a) ponieważ wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w dół wzdłuż osi rzędnych układu współrzędnych, zatem zbiorem wartości jest przedział $(-2, \infty)$.

b) funkcję g zapiszemy wzorem $g(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x - 2$.

Do wyznaczenia miejsc zerowych rozwiążemy równanie:

$$0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x - 2, \text{ czyli } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x = 2.$$

Równanie możemy zapisać w postaci $2^{-\frac{1}{2}x} = 2$, zatem z tego, że funkcja jest różnowartościowa

$$-\frac{1}{2}x = 1, \text{ więc } x = -2.$$

Miejscem zerowym funkcji g jest liczba -2 .

Słownik

funkcja wykładnicza

funkcja postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ oraz $x \in \mathbb{R}$

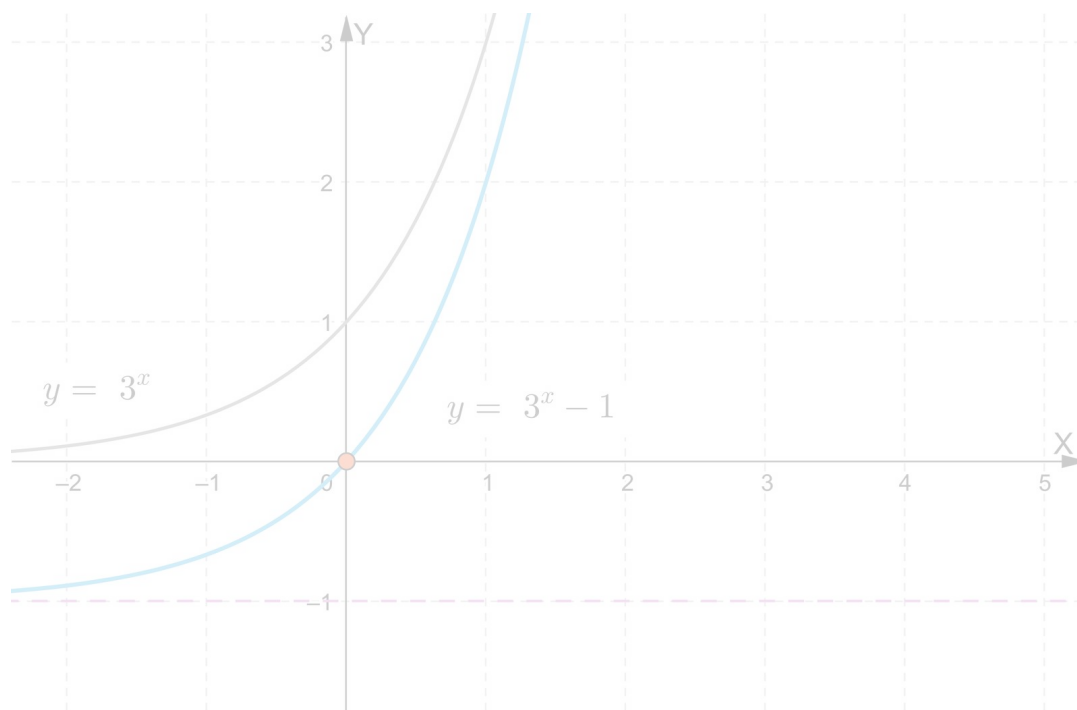
przekształcenie wykresu funkcji $f(x) + q$

przesunięcie wykresu funkcji $f(x)$ wzdłuż osi Y o q jednostek w górę lub w dół

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet, a następnie zaobserwuj, które własności funkcji określonej wzorem $f(x) = a^x$ ulegają zmianie po przesunięciu wzdłuż osi Y .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DkeBDXrkN>

Polecenie 2

Do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = a^x + 4$ należy punkt o współrzędnych $(-2, 6)$.

a) wyznacz wzór tej funkcji,

b) oblicz wartość funkcji dla argumentu 4.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Określmy funkcję f wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Wtedy asymptotą wykresu funkcji $y = f(x) + 3$ jest prosta o równaniu:

☐ $y = -3$

☐ $y = 3$

☐ $x = 3$

Ćwiczenie 2



Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$ oraz $y = f(x) - 2$. Pogrupuj elementy zgodnie z podanym opisem.

Własności funkcji $f(x)$:

funkcja ma dokładnie jedno miejsce zerowe

asymptotą wykresu funkcji jest prosta $y = 0$

Własności funkcji $f(x) - 2$:

do wykresu funkcji należy punkt o współrzędnych $(2, 0)$

do wykresu funkcji należy punkt o współrzędnych $(2, 2)$

asymptotą wykresu funkcji jest prosta $y = -2$

funkcja nie ma miejsc zerowych

Ćwiczenie 3



Funkcję f określono za pomocą wzoru $f(x) = (\sqrt{3})^x - 3$. Uzupełnij zdania, przeciągając w puste miejsce odpowiednią liczbę lub przedział.

Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział .

Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba .

Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla argumentów należących do przedziału .

Ćwiczenie 4



Funkcję określimy wzorem $f(x) = (\frac{1}{2})^x - 4$. Uzupełnij zdania odpowiednimi liczbami.

Miejscem zerowym funkcji jest liczba .

Dla argumentu 0 funkcja przyjmuje wartość .

Funkcja przyjmuje wartości większe od -2 dla argumentów mniejszych od .

Ćwiczenie 5



Połącz wzór funkcji ze zbiorem wartości tej funkcji:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$$

$$(3, \infty)$$

$$f(x) = 2^x - 3$$

$$(1, \infty)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$$

$$(-1, \infty)$$

$$f(x) = 4^x - 1$$

$$(-3, \infty)$$

Ćwiczenie 6



Niech $f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^x$. Określmy funkcję g wzorem $g(x) = f(x) - 3$. Wstaw odpowiednie wartości tej funkcji dla podanych argumentów:

$$\begin{aligned} g(3) &= \boxed{} \\ g(-1) &= \boxed{} \\ g(2) &= \boxed{} \\ g(-2) &= \boxed{} \end{aligned}$$

$\sqrt{5} - 3$

$\frac{1}{25}$

$\frac{1}{125}$

$\frac{\sqrt{5}-75}{25}$

$-\frac{14}{5}$

2

Ćwiczenie 7



Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = 3^x - 1$. W celu otrzymania wykresu funkcji zadanej wzorem $g(x) = 3^x + 4$ należy wykres funkcji f przesunąć o:

☐ 4 jednostki w górę

☐ 5 jednostek w górę

☐ 5 jednostek w dół

Ćwiczenie 8



Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$.

a) naszkicuj wykres tej funkcji,

b) wyznacz, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres i własności funkcji $y = f(x) + q$, gdzie $f(x) = a^x$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;

14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza wartości funkcji wykładniczych dla zadanych argumentów po przekształceniu wykresu tej funkcji wzdłuż osi Y układu współrzędnych,
- odczytuje własności funkcji wykładniczych po przesunięciu wykresu tej funkcji wzdłuż osi rzędnych układu współrzędnych,
- wskazuje różnice pomiędzy wykresami i własnościami funkcji wykładniczej przed i po przesunięciu w górę lub w dół,
- stosuje poznaną wiedzę do rozwiązywania poleceń i ćwiczeń interaktywnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- z użyciem e-podręcznika;
- objaśnienie nowej wiedzy;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Wspólnie na forum klasy omawiają pytania i problemy.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przeprowadza z uczniami pogadankę na temat praktycznego zastosowania funkcji wykładniczej. Uczniowie podają własne propozycje, zdobyte na podstawie wcześniejszych doświadczeń i obserwacji.
2. Uczniowie zapoznają się z materiałem dotyczącym tematu z e-podręcznika.
3. Uczniowie zapoznają się z materiałem z sekcji „Aplet” i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
4. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia numer 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Uczniowie udzielają odpowiedzi, a reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
5. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Przeprowadza z uczniami ligę zadaniową. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która rozwiąże poprawnie zadania jako pierwsza, wygrywa,

a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane przed całą klasą i omawiane krok po kroku.

6. W kolejnym etapie uczniowie indywidualnie realizują ćwiczenia 6-8. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Wykres i własności funkcji $y = f(x) + q$, gdzie $f(x) = a^x$ ” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wykres i własności funkcji $y = f(x) + q$, gdzie $f(x) = a^x$ ”).

Materiały pomocnicze:

- [Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał z sekcji „Aplet” można wykorzystać do utrwalenia wiadomości dotyczących przekształcania wykresów funkcji wykładniczych.