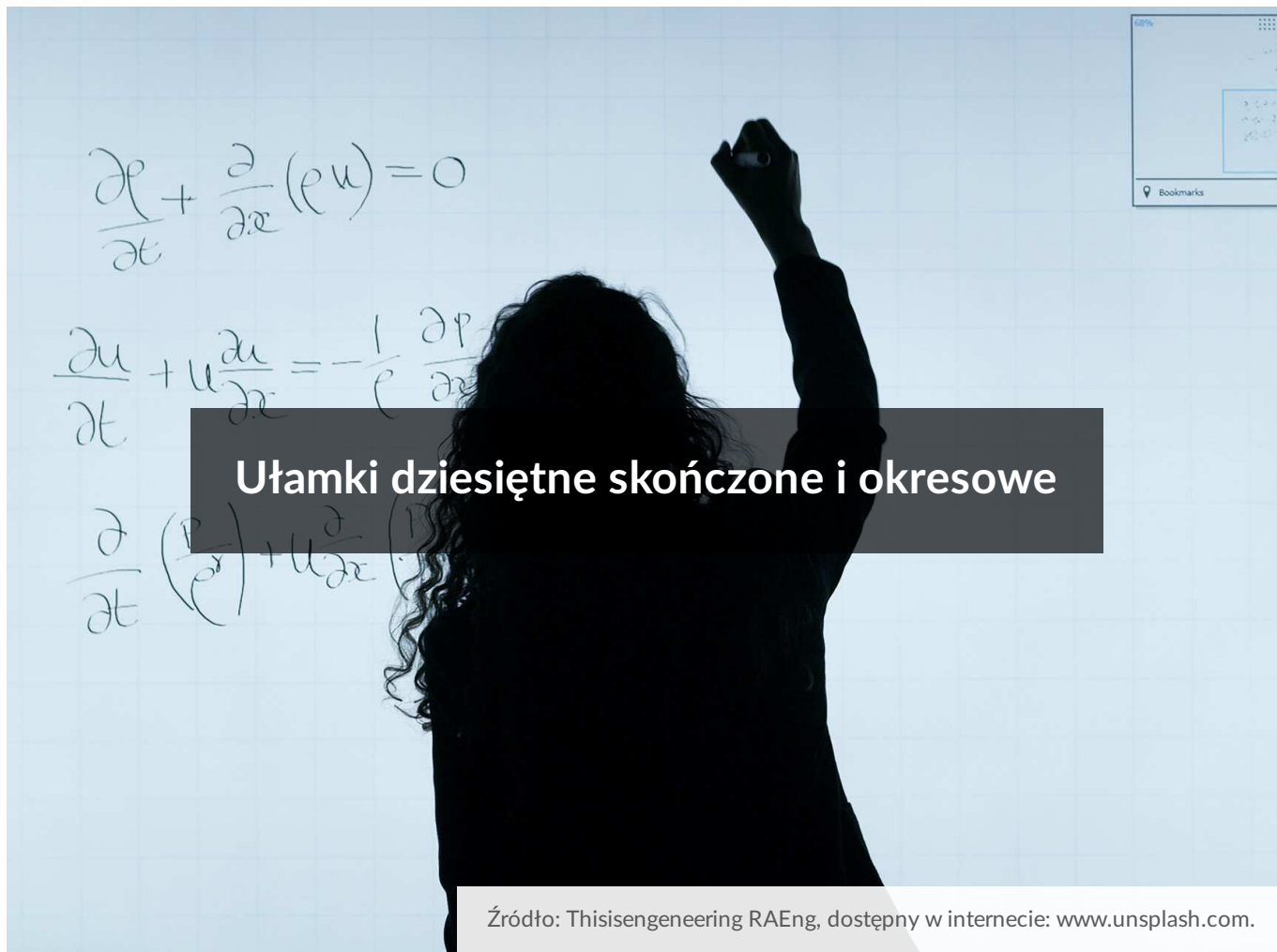




Ułamki dziesiętne skończone i okresowe

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Jak twierdził doktor Szuman w powieści *Lalka* Bolesława Prusa:

” Dobry Polak poci się przy drugiej cyfrze dziesiętnej, przy piątej dostaje gorączki, przy siódmej zabija go apopleksja.

Pomimo tej mało optymistycznej diagnozy, przypomnimy jednak podstawowe wiadomości o ułamkach dziesiętnych, które w dobie komputerów są najczęściej spotykaną formą zapisu liczb wymiernych.

Twoje cele

- Zamienisz ułamki:
 - zwykłe na dziesiętne skończone lub okresowe,
 - dziesiętne, również zapisane jako okresowe, na zwykłe.
- Wśród ułamków zwykłych rozpoznasz te, których rozwinięcie dziesiętne jest skończone, a pozostałe ułamki dziesiętne zapiszesz w postaci okresowej.

- Wykorzystasz umiejętność zamiany postaci zapisu ułamków do ich porównywania.

Przeczytaj

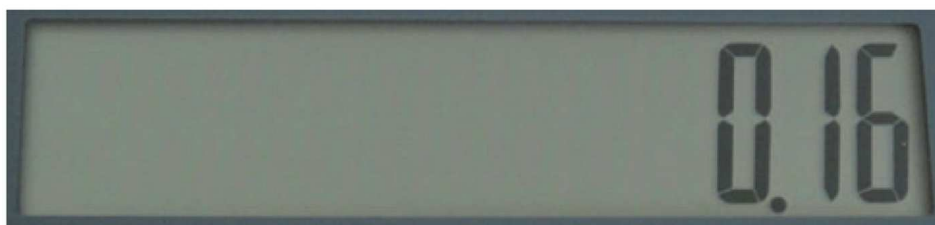
Bawiąc się zwykłym kalkulatorem, możemy się przekonać, jak postrzega ułamki zwykłe nasza elektroniczna „maszynka”.



Źródło: Anshraf Ali, dostępny w internecie:
www.unsplash.com.

Przykład 1

Jeśli, naciskając odpowiednie przyciski, podzielimy 4 przez 25, to zobaczymy na ekranie kalkulatora liczbę:



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 4.0.

Przykład 2

Po rozkazie „21 podzielić przez 90” ujrzymy z kolei:



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 4.0.

W pierwszym przykładzie otrzymaliśmy ułamek dziesiętny skończony, czyli taki, którego zapis dziesiętny kończy się na pewnym miejscu po przecinku (po przecinku występuje skończona liczba cyfr).

W drugim przykładzie kalkulator nieco nas „oszukał”. Wykorzystując bowiem własne obliczenia, widzimy, że: $\frac{21}{90} = 0,23333\dots$, gdzie trójki po przecinku nigdy się nie kończą. Mamy więc w rzeczywistości do czynienia z ułamkiem dziesiętnym nieskończonym okresowym. Oznaczamy go następująco: $0,2333\dots = 0,2(3)$.

Ważne!

Jeśli w ułamku dziesiętnym nieskończonym okresowym powtarza się np. grupa cyfr 345, to powtarza się także grupa 345345, czy też 345345345. Stąd jest sens mówić o najkrótszej z powtarzających się grup cyfr.

Uwaga. Zamiast mówić: „ułamek dziesiętny” używamy też terminu: „rozwiniecie dziesiętne ułamka zwykłego”.

Pamiętasz zapewne umowę, według której w nawias bierzemy zawsze najkrótszą z powtarzających się w nieskończoność grup cyfr rozwinięcia dziesiętnego. Tę grupę cyfr nazywamy **okresem** rozpatrywanego ułamka, a liczbę cyfr występujących w tej najkrótszej grupie nazywamy **długością okresu**.

Przykład 3

Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{11}{16}$ jest skończone: $\frac{11}{16} = 0,6875$ i powstaje w wyniku przedstawionego poniżej dzielenia. Zauważmy, że dzielenie zostało zakończone, gdy pojawiła się reszta zero.

Przykład 4

Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{4}{11}$ jest nieskończone i okresowe:

$$\frac{4}{11} = 0,363636\dots$$

Na podstawie powyższych przykładów możemy zrozumieć, na czym polega mechanizm, który sprawia, że każdy ułamek zwykły daje się zapisać w postaci rozwinięcia dziesiętnego. Otóż, reszt z dzielenia przez mianownik jest skończenie wiele (gdy dzielimy przez liczbę naturalną dodatnią q , wtedy jedyne możliwe reszty, jakie mogą się pojawić, to: 0, 1, 2, 3, ... itd. aż do $q - 1$) i w końcu:

- albo któraś z reszt jest równa zero i rozwinięcie dziesiętne jest skończone,
- albo każda reszta jest niezerowa, a wtedy któraś z reszt musi się powtórzyć i w efekcie rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone, okresowe.

Twierdzenie: o rozwinięciu dziesiętnym ułamka zwykłego

Każdy ułamek zwykły ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe.

Uwaga!

Rozwinięcie dziesiętne skończone można też zapisać w postaci nieskończonej, dopisując zera po jego ostatniej niezerowej cyfrze. W praktyce szkolnej z tej możliwości nie korzystamy i wyraźnie odróżniamy rozwinięcia dziesiętne skończone od nieskończonych, okresowych.

Uwaga!

Jeśli ułamek $\frac{p}{q}$ ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe, to w jego okresie jest mniej niż q cyfr.

Zamiana ułamka dziesiętnego na ułamek zwykły jest najprostsza w sytuacji, gdy rozpatrujemy [ułamek dziesiętny skończony](#).

Przykład 5

$$0,175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}.$$

Gdy zamieniamy na ułamek zwykły [rozwińnięcie dziesiętne nieskończone](#), sytuacja jest już nieco trudniejsza.

Już wiesz

Aby pomnożyć ułamek dziesiętny przez potęgę liczby 10, wystarczy odpowiednio w prawo przesunąć przecinek w zapisie dziesiętnym danego ułamka, np.:

$$23,456 \cdot 100 = 2345,6.$$

Aby podzielić ułamek dziesiętny przez potęgę liczby 10, wystarczy odpowiednio w lewo przesunąć przecinek w zapisie dziesiętnym danego ułamka, np.:

$$98,76 : 1000 = 0,09876.$$

Przykład 6

Zapiszemy ułamek $0, (9)$ w postaci ułamka zwykłego. Przyjmijmy, że $x = 0, (9)$.

Wtedy:

$$10x = 9, (9) = 9 + 0, (9),$$

$$10x = 9 + x.$$

$$\text{Stąd: } 9x = 9$$

$$\text{i ostatecznie: } x = 1.$$

Prawdziwa jest zatem równość $0, (9) = 1$.

Ważne!

Równość $0, (9) = 1$ należy rozumieć następująco: $0, 999 \dots$ jest innym sposobem zapisu liczby 1, podobnie, jak $0, 333 \dots$ jest innym zapisem liczby $\frac{1}{3}$.

Uwaga!

Powyższy przykład pokazuje, że rozwinięcie dziesiętne skończone można też zapisać w postaci okresowej, nie używając do tego celu zer dopisywanych w nieskończoność po jego ostatniej niezerowej cyfrze.

W ten sposób zapiszemy na przykład

$$0, 16 = 0, 15 + 0, 01 = 0, 15 + 0, 00(9) = 0, 15(9),$$

$$0, 6875 = 0, 6874 + 0, 0001 = 0, 6874 + 0, 0000(9) = 0, 6874(9).$$

Powyższe przykłady proponujemy jedynie jako ciekawostkę. W zastosowaniach szkolnych pozostaniemy przy wygodnym dla nas zapisywaniu rozwinięć dziesiętnych liczb wymiernych z podziałem na skończone i nieskończone okresowe.

Słownik

ułamek dziesiętny skończony

ułamek, w którego rozwinięciu dziesiętnym po przecinku występuje skończona liczba cyfr różnych od zera

ułamek dziesiętny nieskończony okresowy

ułamek, w którego rozwinięciu dziesiętnym, począwszy od pewnego miejsca po przecinku, cyklicznie powtarza się pewna grupa cyfr (zwana okresem tego ułamka)

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją. Bazując na rozwiązanych w niej przykładach rozwiąż kolejne polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaRTVZrdC>

Film nawiązujący do treści materiału o ułamkach dziesiętnych skończonych i okresowych.

Polecenie 2

Wynik działania $(0, (135) + \frac{11}{37}) \cdot 7\frac{2}{5} - 2, (36)$ zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

Polecenie 3

Rozpatrujemy rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{41}{54}$. Przez a, b, c, d oznaczamy cyfry tego rozwinięcia, które znajdują się na miejscach odpowiednio: pierwszym, drugim, trzecim oraz setnym. Oblicz wartość wyrażenia $a \cdot (b + c + d)$.

Polecenie 4

Dane są liczby: $x = 0, (176834)$ oraz $y = 0, (34)$. Zapisz w postaci ułamka nieskracalnego iloraz $\frac{x}{y}$. Podaj rozwinięcie dziesiętne (skończone lub nieskończone okresowe) tego ilorazu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ułamki dziesiętne skończone i okresowe

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

Uczeń:

- wskazuje wśród podanych liczb w postaci dziesiętnej liczby wymierne oraz niewymierne,
- przedstawia liczbę podaną w postaci ułamka zwykłego w postaci ułamka dziesiętnego (skończonego lub nieskończonego okresowego),
- wyznacza rozwinięcie dziesiętne ułamków zwykłych,
- wyznacza wskazaną cyfrę po przecinku liczby podanej w postaci rozwinięcia dziesiętnego okresowego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.
2. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Ułamki dziesiętne skończone i okresowe”, a następnie określa cele i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z animacją.
2. Uczniowie wykonują wspólnie na forum klasy ćwiczenia nr 1-2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Rozwinięcia dziesiętne ułamka zwykłego](#)
- [Zamiana ułamków zwykłych na liczby dziesiętne i odwrotnie](#)

Animację można wykorzystać na zajęciach poświęconych wykonywaniu działań na liczbach rzeczywistych.