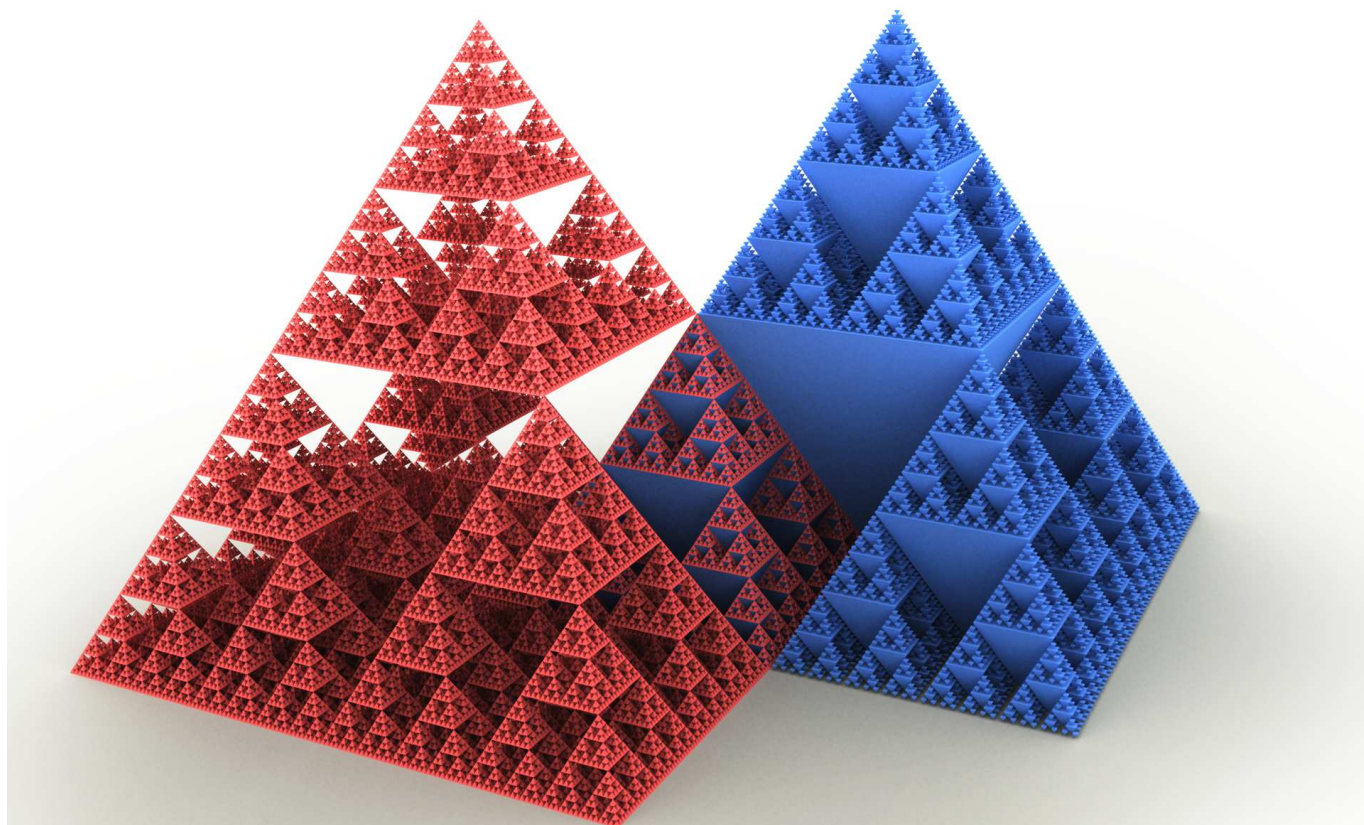
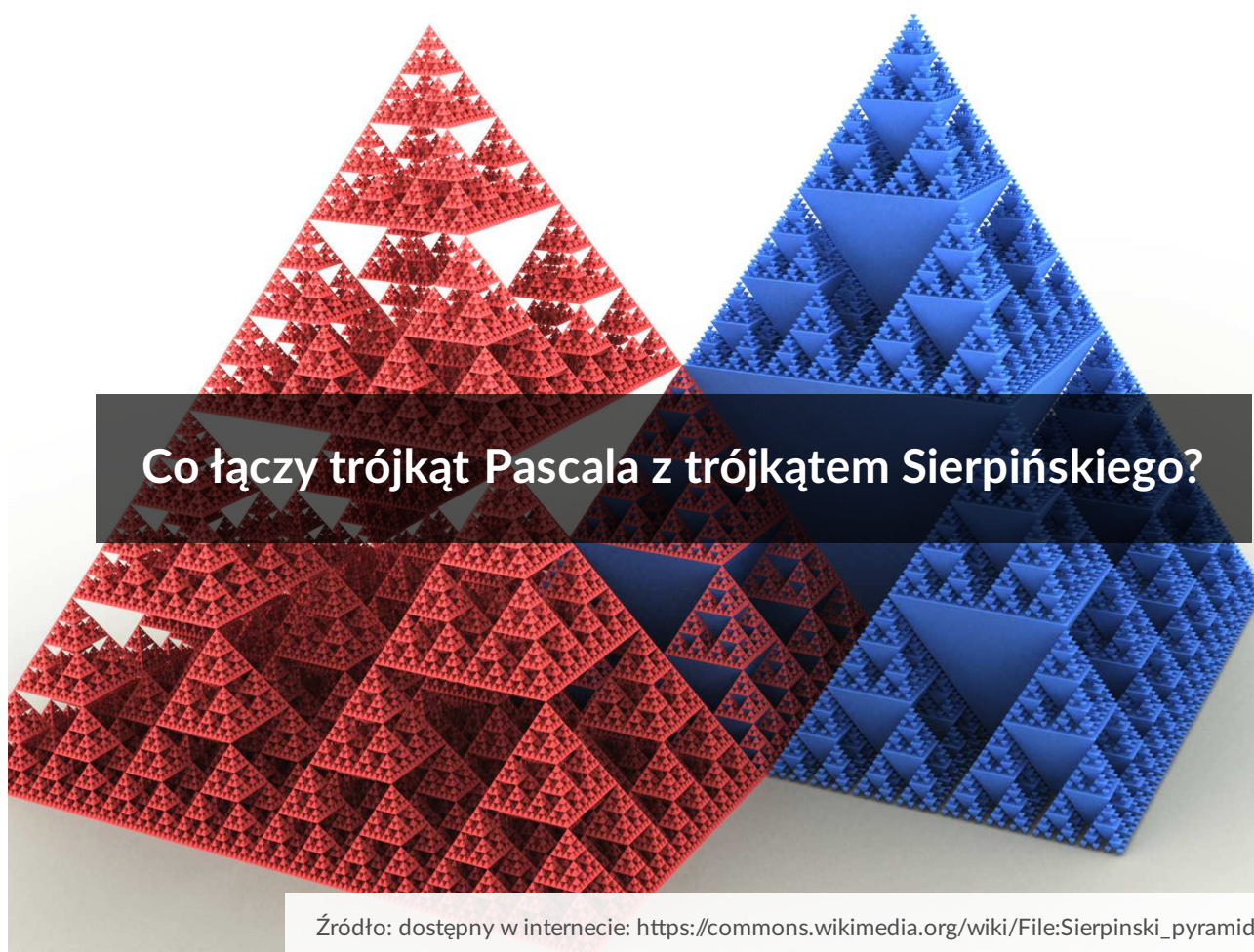




Co łączy trójkąt Pascala z trójkątem Sierpińskiego?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Trójkąt, zwany dzisiaj trójkątem Pascala, został odkryty prawdopodobnie przez Chińczyków lub też niezależnie odkrył go XI – wieczny perski matematyk, astronom i poeta Omar Chajjam.

Nazwa trójkąta powstała w XVII wieku. Genialny francuski matematyk Blaise Pascal wydał w 1653 roku dzieło pt.: *Traktat o trójkącie arytmetycznym*, w którym badał jego własności. Stosował go w pracach dających podwaliny pod przyszły rachunek prawdopodobieństwa. Z uwagi na to, że matematyk był kojarzony z trójkątem, który był istotnym narzędziem jego pracy naukowej, trójkąt został nazwany jego nazwiskiem.

Trójkąt Pascala ma szerokie zastosowanie. Jest wykorzystywany nie tylko w matematyce, ale i choćby w genetyce.

Twoje cele

- Poznasz schemat budowy trójkąta Pascala, dzięki czemu będziesz w stanie podać wartości liczbowe znajdujące się w dowolnym wierszu trójkąta.
- Zastosujesz liczby z n – tego wiersza trójkąta Pascala do ustalenia współczynników rozwinięcia n – tej potęgi dwumianu.
- Poznasz własności trójkąta Pascala i zweryfikujesz ich prawdziwość.
- Poznasz zastosowania trójkąta Pascala.

Przeczytaj

Trójkąt Pascala tworzą liczby całkowite dodatnie $(1, 2, 3, \dots)$ zgodnie z następującym schematem: w wierzchołku trójkąta (czyli w wierszu początkowym – zerowym) oraz na obu jego równych ramionach znajdują się jedynki. W środku, począwszy od trzeciego wiersza, znajdują się sumy dwóch liczb z wiersza powyżej, które są położone bezpośrednio nad daną liczbą. Fragment trójkąta Pascala przedstawiony jest poniżej.

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
	1	5		10		10	5		1
1		6		15		20		15	
	1		6		15		20		1

Trójkąt Pascala

Źródło: Dimitrios Vrettos, <http://commons.wikimedia.org>, licencja: CC BY-SA 3.0.

Przypomnijmy teraz wzór na **współczynnik dwumianowy**:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdzie n, k to dowolne liczby całkowite nieujemne $(0, 1, 2, 3, \dots)$ oraz $n \geq k$. Przypomnijmy także wzór na **dwumian Newtona**, który wiąże się bezpośrednio z trójkątem Pascala, co pokażemy w dalszej części. Dwumian Newtona jest postaci:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n,$$

przy czym n jest dowolną liczbą całkowitą nieujemną oraz a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Liczby w trójkącie Pascala (począwszy od wiersza drugiego) odpowiadają współczynnikom rozwinięcia wzoru na n – tą potęgę sumy.

Na przykład liczby w trzecim wierszu trójkąta Pascala: 1, 3, 3, 1 to kolejne współczynniki liczbowe rozwinięcia sześcienu sumy.

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3.$$

Czym jest zatem trójkąt Pascala?

Jest to ciąg liczb ułożony w trójkąt o określonych własnościach matematycznych.

Własności trójkąta Pascala

1. Symetria.

Pierwszą własnością trójkąta Pascala, którą możemy zauważyć, jest symetria. Mianowicie możemy wykreślić prostą przechodzącą przez pierwsze wyrazy każdego wiersza, następnie kolejną prostą przez drugie wyrazy każdego wiersza. Czynność tę możemy powtarzać w nieskończoność, otrzymując tzw. skosy.

Pierwszy skos składa się z samych jedynek. Drugi to kolejne liczby naturalne, trzeci to [liczby trójkątne](#), a czwarty – [czworościenne \(piramidalne\)](#). Symetria polega na tym, że w każdym przypadku mamy dwie przecinające się proste w punkcie, leżącym na osi symetrii trójkąta.

2. Sumy liczb w poszczególnych wierszach to kolejne potęgi liczby 2.

Kolejne potęgi naturalne dwójki:

- dla 0 mamy: $2^0 = 1$,
- dla 1 mamy: $2^1 = 2$,
- dla 2 mamy: $2^2 = 4$,
- dla 3 mamy: $2^3 = 8$,
- dla 4 mamy: $2^4 = 16$
- i tak dalej.

Sumy liczb w kolejnych wierszach wynoszą:

- dla 0 mamy: $1 = 1$

- dla 1 mamy: $1 + 1 = 2$,
- dla 2 mamy: $1 + 2 + 1 = 4$,
- dla 3 mamy: $1 + 3 + 3 + 1 = 8$,
- dla 4 mamy: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$
- i tak dalej.

3. Suma kwadratów wszystkich elementów wiersza o numerze n (numerując od zera) jest równa środkowemu elementowi wiersza $2n$.

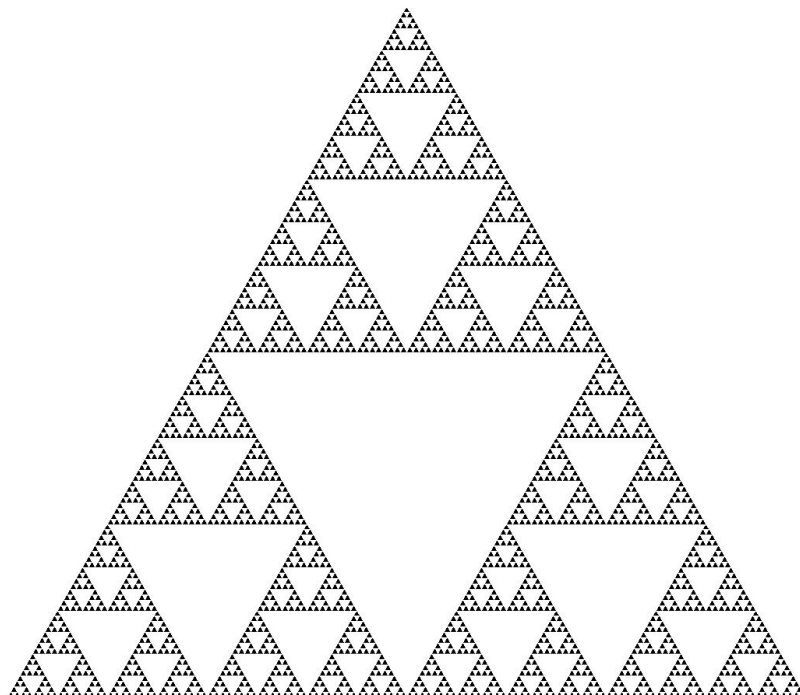
Weźmy na przykład wiersz trzeci i szósty (dla $n = 3$, $2n = 6$). Wiersz trzeci: 1, 3, 3, 1.

Suma kwadratów wyrazów wiersza trzeciego: $1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20$.

Wiersz szósty: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Jak widzimy na tym przykładzie, suma kwadratów wyrazów wiersza trzeciego rzeczywiście równa się środkowemu wyrazowi wiersza szóstego, czyli 20.

4. Zastępując w trójkącie Pascala każdą liczbę nieparzystą jedynką, a parzystą zerem, otrzymujemy geometryczny wzór trójkąta Sierpińskiego.



Trójkąt Sierpińskiego to trójkąt równoboczny „z dziurami”. Po połączeniu środków boków trójkąta równobocznego, otrzymujemy 4 mniejsze trójkąty. Usuwamy trójkąt środkowy. Procedurę powtarzamy dla każdego z pozostałych trójkątów, i tak w nieskończoność. Punkty, które nigdy nie zostaną usunięte, tworzą trójkąt Sierpińskiego.

Słownik

liczby trójkątne

to takie liczby, które odpowiednio ułożone, mogą utworzyć regularny trójkąt. Znajdują się one na trzeciej przekątnej trójkąta Pascala (licząc od jeden, nie od zera jak w przypadku wierszy) i wynoszą kolejno: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

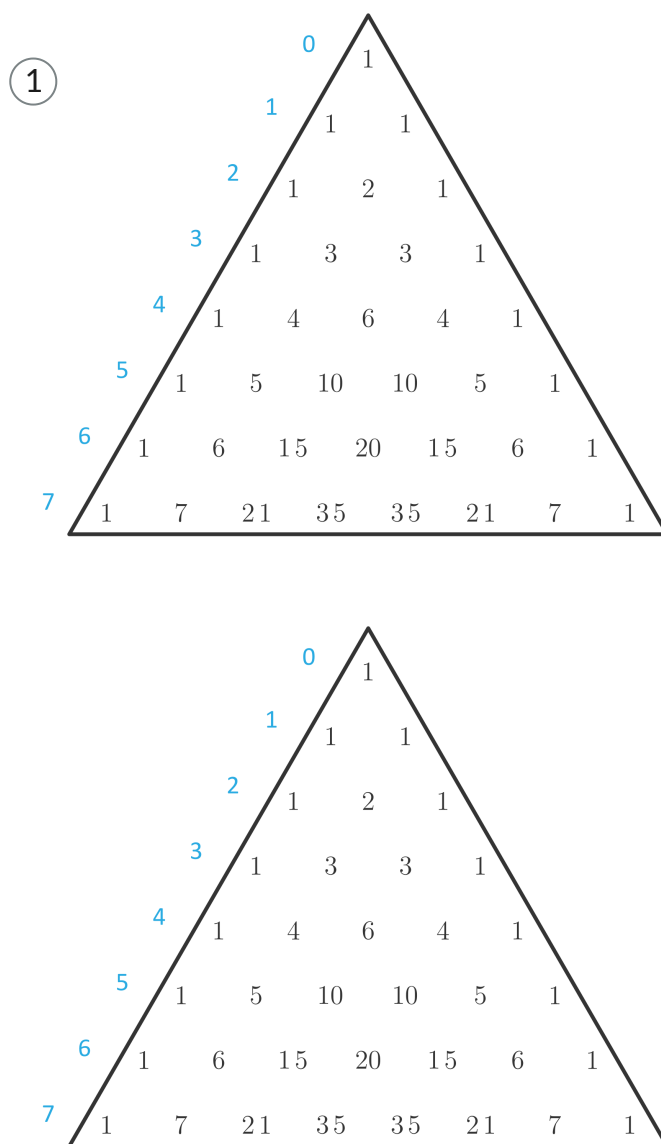
liczby czworościenne

liczby leżące na czwartej przekątnej trójkąta Pascala. Te liczby to kolejno 1, 4, 10, 20, 35, 56, ...; oznaczają ilość kul, z których można zbudować czworościan

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych przedstawiającą związek trójkąta Pascala z trójkątem Sierpińskiego.



1. {audio}Rysujemy trójkąt Pascala dla $n = 7$.

Polecenie 2

Narysuj trójkąt Pascala dla $n = 9$ i zamaluj pola z tymi liczbami, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 1. Co zauważasz?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dopasuj podane poniżej ciągi liczb do poszczególnych wierszy trójkąta Pascala.

drugi wiersz, trzeci wiersz, czwarty wiersz, piąty wiersz, szósty wiersz, siódmy wiersz

wiersze		wartości występujące w wierszu
drugi wiersz		
trzeci wiersz		
czwarty wiersz		
piąty wiersz		
szósty wiersz		
siódmy wiersz		

Ćwiczenie 2



Wiedząc już, jak powstaje trójkąt Sierpińskiego, uzupełnij tabelę, przeciągając podane poniżej elementy w odpowiednie pola.

drugi wiersz, trzeci wiersz, czwarty wiersz, piąty wiersz, szósty wiersz, siódmy wiersz

wiersze		wartości występujące w wierszu
drugi wiersz		
trzeci wiersz		
czwarty wiersz		
piąty wiersz		
szósty wiersz		
siódmy wiersz		

Ćwiczenie 3



Wykorzystując własność związaną z budową trójkąta Pascala, oblicz współczynniki rozwinięcia siódmej potęgi dwumianu $(a + b)^7$.

$$(a + b)^7 = \boxed{} a^7 + \boxed{} a^6 b + \boxed{} a^5 b^2 +$$
$$\boxed{} a^4 b^3 + \boxed{} a^3 b^4 + \boxed{} a^2 b^5 + \boxed{}$$
$$a b^6 + \boxed{} b^7$$

Ćwiczenie 4



Uzupełnij równości. Zweryfikuj własność trójkąta Pascala, która mówi, że suma kwadratów wszystkich elementów wiersza o numerze n (numerując od zera) jest równa środkowemu elementowi wiersza $2n$.

wiersz drugi, wiersz trzeci, wiersz czwarty, wiersz piąty, wiersz szósty, $__{}^2 + __{}^2 + __{}^2 + __{}^2 = __{}^2$,
środkowy element wiersza dwunastego

wiersze	suma kwadratów	element wiersza
wiersz drugi		
wiersz trzeci	$__{}^2 + __{}^2 + __{}^2 + __{}^2 = __{}^2$	
wiersz czwarty		
wiersz piąty		
wiersz szósty		środkowy element wiersza dwunastego

Ćwiczenie 5



Zweryfikuj stwierdzenie, że wykorzystując liczby w kolejnych wierszach trójkąta Pascala można utworzyć kolejne potęgi liczby 11.

$$11^0 = 1$$

$$11^1 = 11$$

$$11^2 = 121$$

Wypisz liczby z kolejnych wierszy trójkąta Pascala.

Ćwiczenie 6



Kolejną własnością trójkąta Pascala jest fakt, że drugi element z n -tego wiersza podniesiony do kwadratu równy jest sumie trzeciego elementu z n -tego wiersza oraz trzeciego elementu z wiersza $n + 1$.

Przykład: $5^2 = 10 + 15$, $6^2 = 15 + 21$, itd.

Udowodnij tę własność.

Ćwiczenie 7



Liczby czworościenne w trójkącie Pascala wyznaczają ilość kul, z których można zbudować czworościan o danej wysokości a liczby trójkątne - ilość kul potrzebnych do ułożenia danej warstwy kul. Wyznacz liczbę kul potrzebną do ułożenia dziesiątej warstwy oraz liczbę kul potrzebną do zbudowania czworościanu o wysokości 10.



Do ułożenia dziesiątej warstwy potrzeba 80 kul. Do zbudowania czworościanu o wysokości 10 potrzeba 260 kul.



Do ułożenia dziesiątej warstwy potrzeba 25 kul. Do zbudowania czworościanu o wysokości 10 potrzeba 100 kul.



Do ułożenia dziesiątej warstwy potrzeba 45 kul. Do zbudowania czworościanu o wysokości 10 potrzeba 250 kul.



Do ułożenia dziesiątej warstwy potrzeba 55 kul. Do zbudowania czworościanu o wysokości 10 potrzeba 220 kul.

Ćwiczenie 8



Uzupełnij tabelę, przeciągając podane poniżej elementy w odpowiednie miejsca.

3, 4

numer skosu (licząc od 1)	rodzaj liczb	opis
liczby		
3		
4		

Dla nauczyciela

Autor: Elżbieta Miterka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Co łączy trójkąt Pascala z trójkątem Sierpińskiego?

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $(n \ 0) = 1$, $(n \ 1) = n$, $(n \ n - 1) = n$, $(n \ k) = (n \ n - k)$, $(n \ k) + (n \ k + 1) = (n + 1 \ k + 1)$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wylicza wartości liczbowe znajdujące się w dowolnym wierszu trójkąta Pascala;
- stosuje liczby z dowolnego wiersza trójkąta Pascala do ustalenia współczynników rozwinięcia potęgi dwumianu;
- weryfikuje prawdziwość stwierdzeń dotyczących własności trójkąta Pascala;
- szuka analogii w zakresie wykorzystania trójkąta Pascala.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją

- Uczniowie przed lekcją zapoznają się z sekcją „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat, wskazuje cele zajęć.
2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie wzoru na kwadrat sumy dwóch dowolnych wyrażeń oraz na sześcián sumy dwóch dowolnych wyrażeń. Wspólnie porównują współczynniki we wzorach z drugim i trzecim wierszem trójkąta Pascala.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenie 1 z sekcji „Sprawdź się”.
2. Uczniowie w parach analizują informacje dotyczące związku trójkąta Sierpińskiego z trójkątem Pascala oraz w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Rozwiązują ćwiczenie 2 z sekcji „Sprawdź się”.
3. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 4-7 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenie 3 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Trójkąt Pascala

Wskazówki metodyczne:

Materiał w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można wykorzystać do powtórzenia wiadomości dotyczących zastosowań trójkąta Pascala. Materiał można też wykorzystać w tematach związanych z potęgą dwumianu.