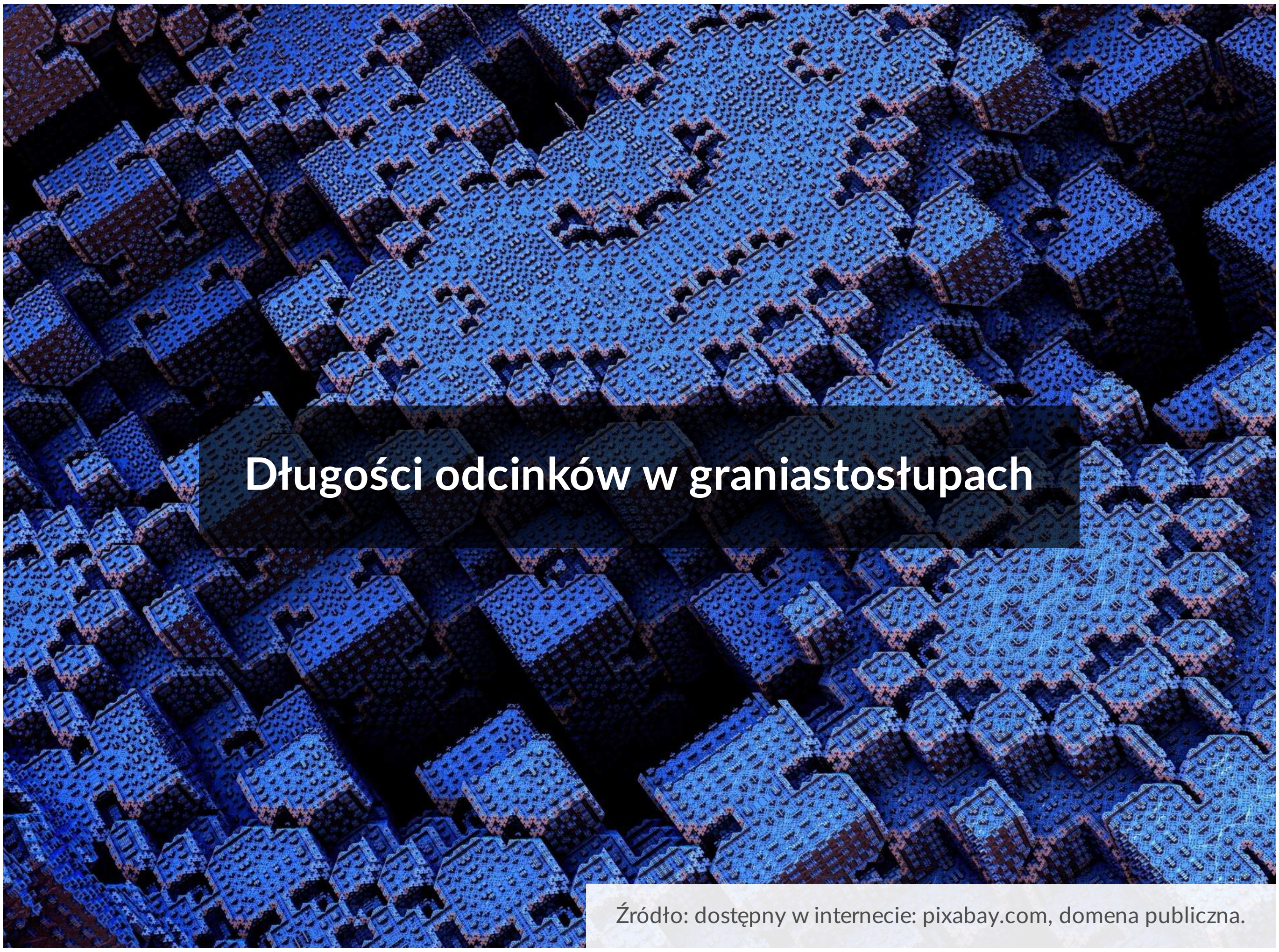
Długości odcinków w graniastosłupach



Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Poznałeś już odcinki w graniastosłupie oraz kąty między odcinkami i płaszczyznami lub między odcinkami. Potrafisz je wskazać i nazwać. Dzięki temu materiałowi nauczysz się obliczać długości odcinków w graniastosłupie korzystając z twierdzenia Pitagorasa, funkcji trygonometrycznych i innych własności trójkątów prostokątnych.

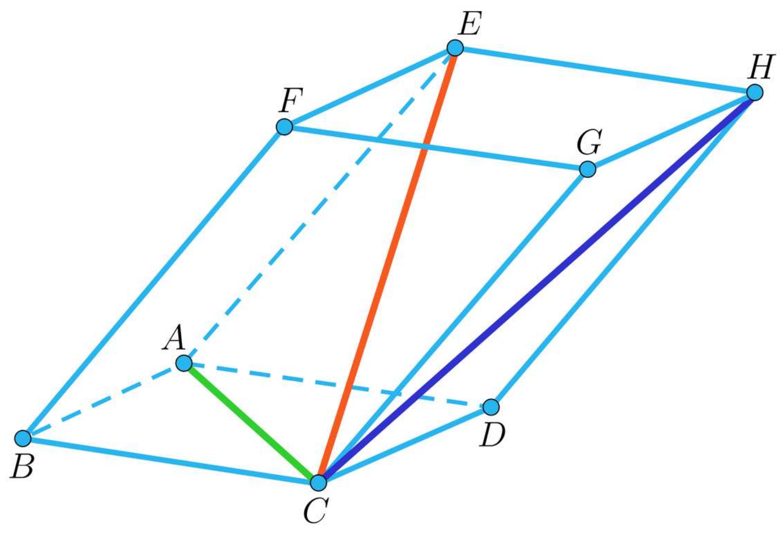
> **Twoje cele**
>
> - Porównasz długości odcinków w graniastosłupie.
> - Obliczysz długości odcinków w graniastosłupie z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych, twierdzenia Pitagorasa i innych własności trójkątów.

Przeczytaj

Przypomnijmy, że w graniastosłupach mamy trzy rodzaje przekątnych:

- **przekątną podstawy** nazywamy przekątną wielokąta, który jest podstawą graniastosłupa,
- **przekątną ściany bocznej** jest przekątna równoległoboku będącego ścianą boczną tego graniastosłupa,
- **przekątną graniastosłupa** nazywamy odcinek łączący wierzchołki różnych podstaw graniastosłupa, które nie należą do jednej ściany bocznej.

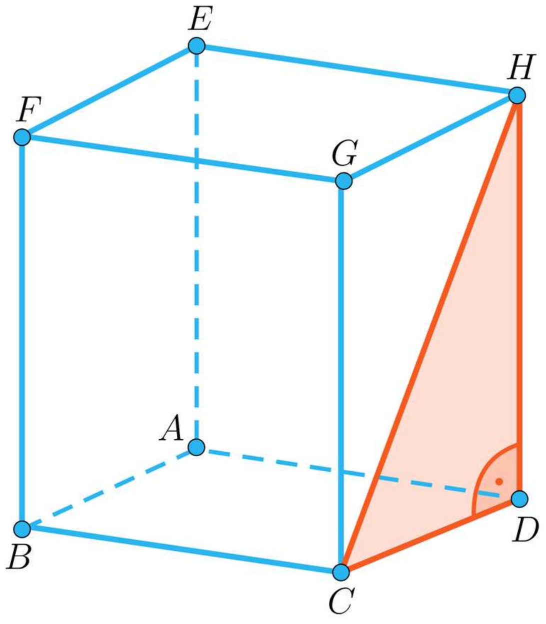
Przykład 1



Odcinek AC jest przekątną podstawy, CH jest przekątną ściany bocznej, CE jest przekątną graniastosłupa.

Zapamiętaj

W graniastosłupie prostym krawędź podstawy, krawędź boczna i przekątna ściany bocznej są bokami trójkąta prostokątnego.



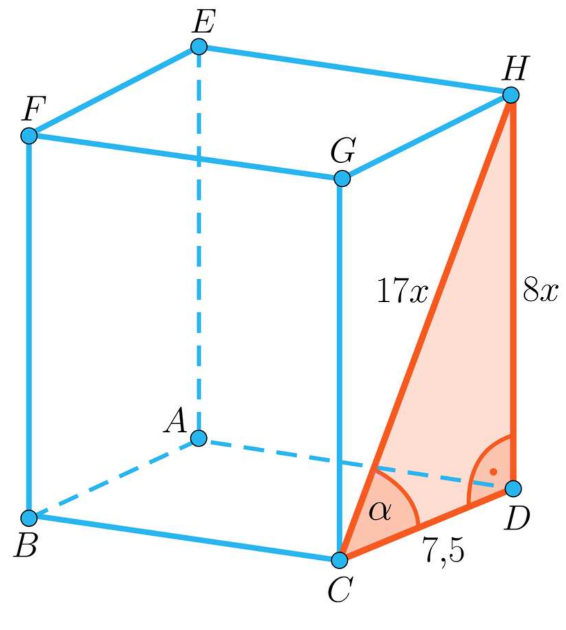
Przykład 2

Sinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym wynosi $\frac{8}{17}$, a krawędź podstawy ma długość $7,5$. Obliczymy długość krawędzi bocznej i przekątnej ściany bocznej tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Przypomnijmy, że w graniastosłupie prostym kąt między przekątną ściany bocznej, a podstawą jest kątem między przekątną ściany bocznej, a krawędzią podstawy.

Zrobimy rysunek pomocniczy, uwzględniając znany sinus:

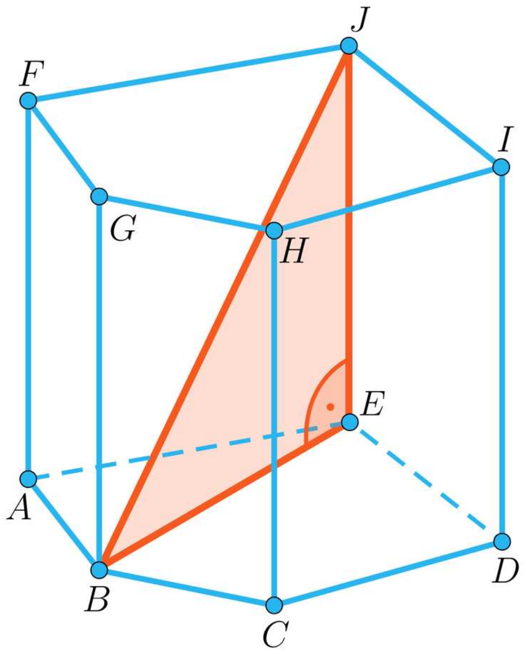


Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $(17x)^2 = (8x)^2 + 7,5^2$. Wykonując dalsze przekształcenia mamy $225x^2 = 56,25$. Ostatecznie $x^2 = 0,25$, co daje $x = 0,5$.

Oznacza to, że krawędź boczna ma długość 4, a przekątna ściany bocznej $8,5$.

Zapamiętaj

W graniastosłupie prostym (co najmniej czworokątnym) trójkąt, którego bokami są przekątna graniastosłupa, przekątna podstawy i krawędź boczna jest prostokątny.

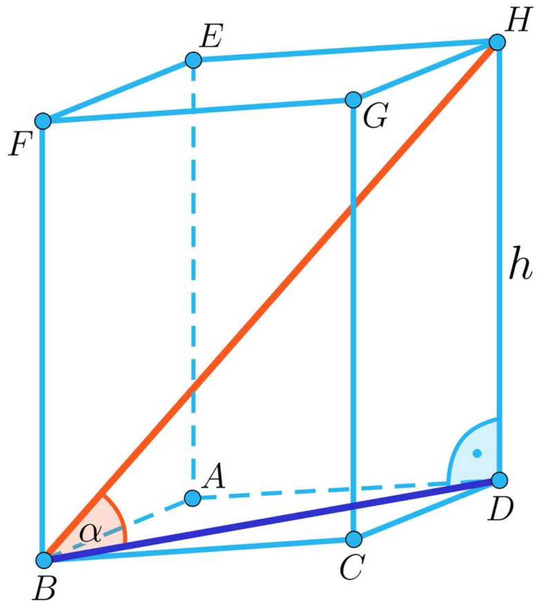


Przykład 3

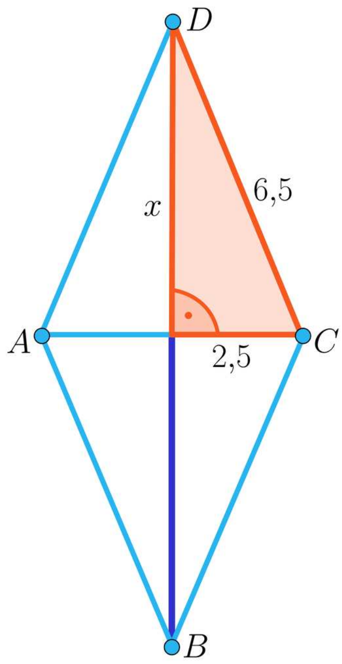
W graniastosłupie prostym o podstawie rombu tangens kąta nachylenia dłuższej przekątnej graniastosłupa do podstawy wynosi $\frac{3}{4}$, krótsza przekątna podstawy ma długość 5, a krawędź podstawy $6,5$. Obliczymy długość krótszej przekątnej tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Dłuższa przekątna graniastosłupa, dłuższa przekątna podstawy i krawędź podstawy tworzą trójkąt prostokątny, jednym z kątów tego trójkąta jest kąt, którego tangens znamy.



Obliczymy długość dłuższej przekątnej podstawy.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy $2,5^2 + x^2 = 6,5^2$, co po przekształceniach daje $x^2 = 36$. A zatem $x = 6$. Stąd dłuższa przekątna podstawy ma długość 12.

Obliczymy długość h korzystając z funkcji trygonometrycznych dla trójkąta BDH. Mamy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{12}$.

Czyli $\frac{3}{4} = \frac{h}{12}$ i stąd $h = 9$.

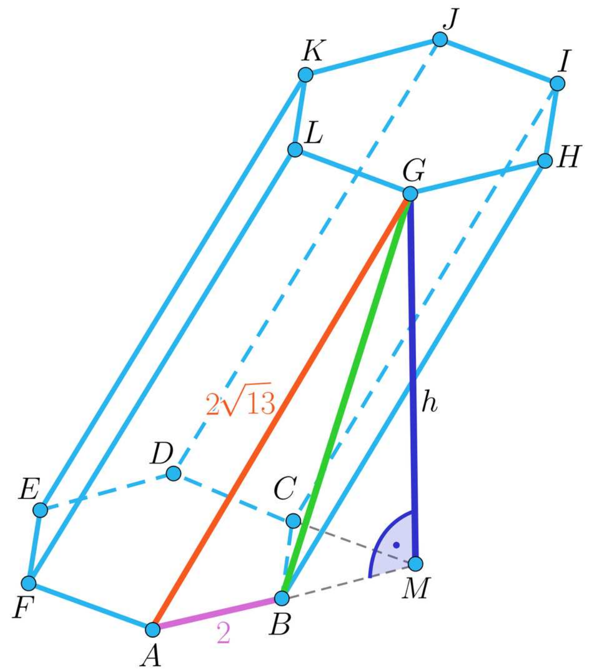
Obliczymy teraz długość krótszej przekątnej graniastosłupa korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CAE : $5^2 + 9^2 = |CE|^2$. A zatem krótsza przekątna graniastosłupa ma długość $|CE| = \sqrt{106}$.

Zapamiętaj

Wysokość graniastosłupa jest odcinkiem łączącym płaszczyzny podstaw, którego długość jest równa odległości między tymi płaszczyznami, oznaczamy ją przez H. Ponadto w graniastosłupach prostych każda z krawędzi bocznych jest wysokością tego graniastosłupa.

Przykład 4

W graniastosłupie pochyłym o podstawie sześciokąta foremnego (jak na rysunku) krawędź podstawy ma długość 2, a krawędź boczna $2\sqrt{13}$. Obliczymy długość przekątnej BG oraz wysokość tego graniastosłupa, jeżeli wiemy, że wysokość ta, poprowadzona z punktu G, przecina płaszczyznę podstawy w punkcie M, który jest współliniowy z prostymi AB i CD.



Rozwiązanie

Ponieważ punkty A, B, M oraz punkty D, C, M leżą na jednej prostej, to kąty MBC i BCM mają 60°. A zatem trójkąt BCM jest równoboczny. Czyli $|BM| = 2$, a stąd $|AM| = 4$.

Obliczymy długość wysokości z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta MAG:

$4^2 + h^2 = \left(2\sqrt{13}\right)^2$

Wykonując dalsze przekształcenia, otrzymamy, że wysokość graniastosłupa ma długość $h = 6$.

Obliczymy teraz długość przekątnej ściany bocznej BG z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta GBM:

$2^2 + 6^2 = |BG|^2$

I stąd $|BG| = 2\sqrt{10}$.

Słownik

wysokość graniastosłupa

odcinek łączący płaszczyzny podstaw, którego długość jest równa odległości między płaszczyznami podstaw

przekątna ściany bocznej graniastosłupa

przekątna równoległoboku, który jest ścianą boczną graniastosłupa

przekątna graniastosłupa

odcinek łączący dwa wierzchołki nie leżące na jednej ścianie graniastosłupa

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z apletem przedstawiającym kolejne kroki obliczania długości przekątnych graniastoslupa.
W podstawie graniastosłupa prostego znajduje się deltoid, którego przekątna AC ma długość 4. Krawędź podstawy CD ma długość $2\sqrt{5}$ a kąt ABC jest prosty. Przekątna ściany bocznej DG ma długość 6. Oblicz długości przekątnych graniastosłupa.

Polecenie 2

Wymień trójkąty prostokątne, które są rozważane w graniastosłupie z treści apletu.

Polecenie 3

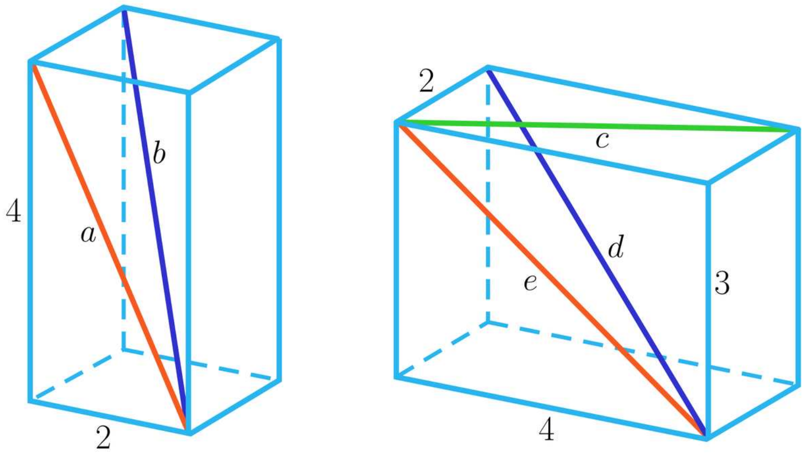
Jaką długość mają przekątne AH i BE w graniastosłupie opisanym w aplecie?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Dane są graniastosłupy jak na rysunku.

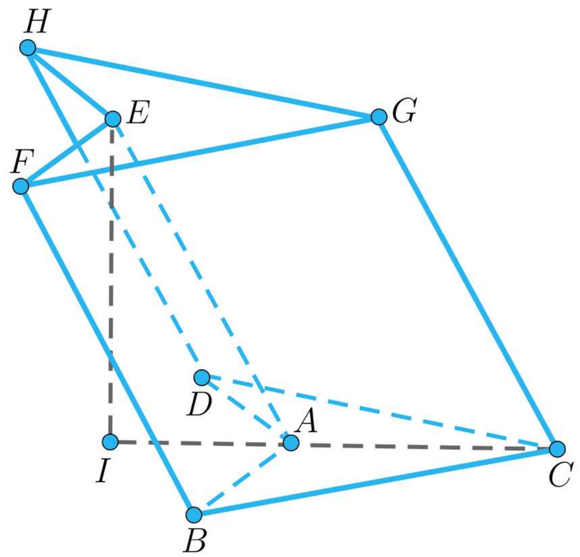


Graniastosłup prawidłowy czworokątny

Prostopadłościan

Ćwiczenie 2

Dany jest graniastosłup pochyły czworokątny jak na rysunku.



Wiemy, że punkty I, A, C są współliniowe, odcinek EI jest wysokością graniastosłupa oraz $|EI| = 4$, $|EC| = \sqrt{41}$, $|IA| = 2$. Wówczas

Przekątna podstawy AC ma długość:

- 3
- 5
- $\sqrt{37}$
- $\sqrt{57}$

Krawędź boczna ma długość:

- $2\sqrt{5}$
- 5
- 6
- $2\sqrt{3}$

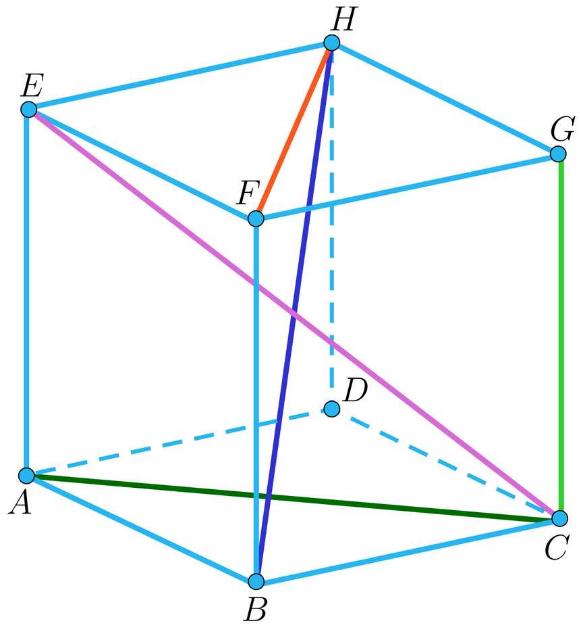
Przekątna AG graniastosłupa ma długość:

- $\sqrt{17}$
- 4
- $2\sqrt{5}$
- $\sqrt{41}$

Ćwiczenie 3

Podstawą graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku jest romb.

Wiemy, że $|AB| = 5$, $|BD| = 6$ i $|AE| = 7$. Ustaw odcinki CD, CG, HF, CE, BH, AC w kolejności rosnącej długości.



- BH
- FH
- CG
- CE
- CD
- AC

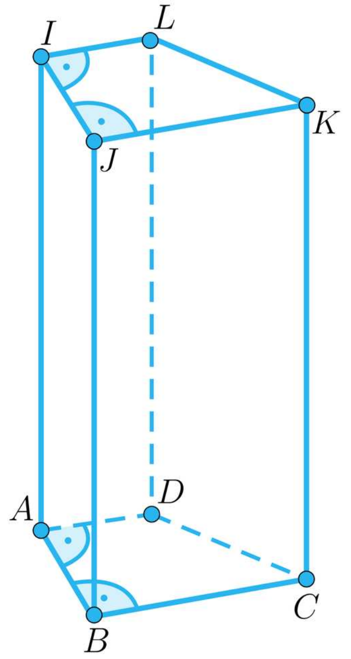
Ćwiczenie 4

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym cosinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do podstawy wynosi $\frac{5}{13}$, a wysokość ma długość 36. Przekątna tego graniastosłupa ma długość:

- $3\sqrt{194}$
- 39
- 5
- 15

Ćwiczenie 5

Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez prostokątny o podstawach AD i BC (patrz rysunek).



Wiemy, że $|AD| = 2$, $|BC| = 4$ i $|CD| = \sqrt{13}$. Wysokość graniastosłupa ma długość 12. Uzupełnij zdanie wybierając odpowiednie wartości.

Uzupełnij tabelę odpowiednimi długościami odcinków.

Krótsza przekątna podstawy, Dłuższa przekątna podstawy, Przekątna największej ściany bocznej, Dłuższa przekątna graniastosłupa, Krótsza przekątna graniastosłupa

	Długości odcinków
Krótsza przekątna podstawy	
Dłuższa przekątna podstawy	
Przekątna największej	

ściany bocznej		
Dłuższa przekątna graniastosłupa		
Krótsza przekątna graniastosłupa		

Ćwiczenie 6

Wybierz Prawda jeśli zdanie jest prawdziwe i Fałsz, jeśli jest fałszywe

	Prawda	Fałsz
Jeżeli krawędzie podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego zwiększymy dwukrotnie, to długość przekątnej podstawy również wzrośnie dwukrotnie.	□	□
Jeżeli krawędcie podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego zwiększymy dwukrotnie, to długość przekątnej ściany bocznej również wzrośnie dwukrotnie.	□	□
Jeżeli krawędcie podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego zwiększymy dwukrotnie, to długość przekątnej	□	□

graniastosłupa również wzrośnie dwukrotnie.		

Ćwiczenie 7

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDEF$ jest trójkąt równoramienny prostokątny ABC, taki, że $|AB| = |BC| = 2$. Cosinus kąta między przekątnymi ścian bocznych BD i BF wynosi $\frac{10}{11}$. Oblicz długość przekątnej CD ściany bocznej.

Ćwiczenie 8

W podstawie graniastosłupa pochyłego $ABCDEFGH$ znajduje się trapez równoramienny $ABCD$ taki, że $AD \parallel BC \ \ (|AD| > |BC|)$ i $|AD| = 8$, $|AB| = 3\sqrt{2}$ a wysokość trapezu ma długość 3. Ściana $BCGF$ jest prostopadła do płaszczyzny podstawy a jej przekątna BG ma długość $4\sqrt{2}$. Przekątne BG i CF tej ściany przecinają się pod kątem 45°. Oblicz długość wysokości tego graniastosłupa.

Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Długości odcinków w graniastosłupach

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa: X Stereometria, poziom podstawowy

Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje odcinki w graniastosłupie,
- porównuje długości odcinków w graniastosłupie,
- oblicza długości odcinków w graniastosłupie z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych, twierdzenia Pitagorasa i innych własności trójkątów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody pracy:

- burza mózgów
- dyskusja
- ćwiczeniowa

Formy pracy:

- praca całą klasą
- praca w parach
- praca samodzielna

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora
- materiały zawarte w e-podręczniku
- modele graniastosłupów

Przebieg lekcji:

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wraz z uczniami przypomina dotychczasowe wiadomości o kątach i odcinkach w graniastosłupach (może się w tym celu posłużyć materiałami z poprzednich lekcji e-podręcznika).
2. Nauczyciel formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o wskazanie charakterystycznych trójkątów prostokątnych w różnych modelach graniastosłupów.
2. Nauczyciel analizuje przykłady zawarte w sekcji Przeczytaj, pokazując również niektóre zależności między odcinkami na modelach lub apletach 3D w GeoGebrze.
3. Nauczyciel przedstawia uczniom Prezentację przykładu obliczania długości odcinków w graniastosłupach. Stara się, aby pomysły na kolejne kroki wychodziły od uczniów, prowadzi dyskusję nad kolejnymi etapami rozwiązywania zadania.
4. Nauczyciel dzieli uczniów na 6 grup. Każda z grup losuje jedno zadanie spośród ćwiczeń z sekcji Sprawdź się (oprócz 4 i 6).
5. Wybrany uczeń z każdej grupy prezentuje rozwiązanie na tablicy.
6. Jeżeli nikt z grupy nie miał pomysłu w fazie wstępnej zadania, grupa może poprosić o pomoc wybranego ucznia z innej grupy, ale tylko we wprowadzeniu, a nie rozwiązaniu całego zadania.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie wykonują samodzielnie ćwiczenie 4 z sekcji Sprawdź się.
2. Uczniowie dokonują ewaluacji kryteriów sukcesu wybraną przez nauczyciela metodą.

Praca domowa:

Ćwiczenie 6 z sekcji Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

Rodzaje graniastosłupów

Wskazówki metodyczne:

Aplet można wykorzystać jako powtórzenie wiadomości przed kartkówką.