Suma wektorów - interpretacja geometryczna

Suma wektorów - interpretacja geometryczna

Źródło: Alex King, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wiesz już, czym jest wektor oraz potrafisz rozpoznać wektory równe i przeciwne. Okazuje się, że w zbiorze wszystkich wektorów na płaszczyźnie można wykonywać pewne działania - pod pewnymi względami podobne do tych wykonywanych w zbiorach liczbowych. W tym rozdziale omówimy graficzne dodawanie wektorów. Na pierwszy rzut oka to działanie nie wygląda na podobne do dodawania liczb, ale opis algebraiczny wektorów, który poznasz w następnych rozdziałach, pozwoli Ci dostrzec analogie pomiędzy dodawaniem wektorów a dodawaniem liczb.

Twoje cele

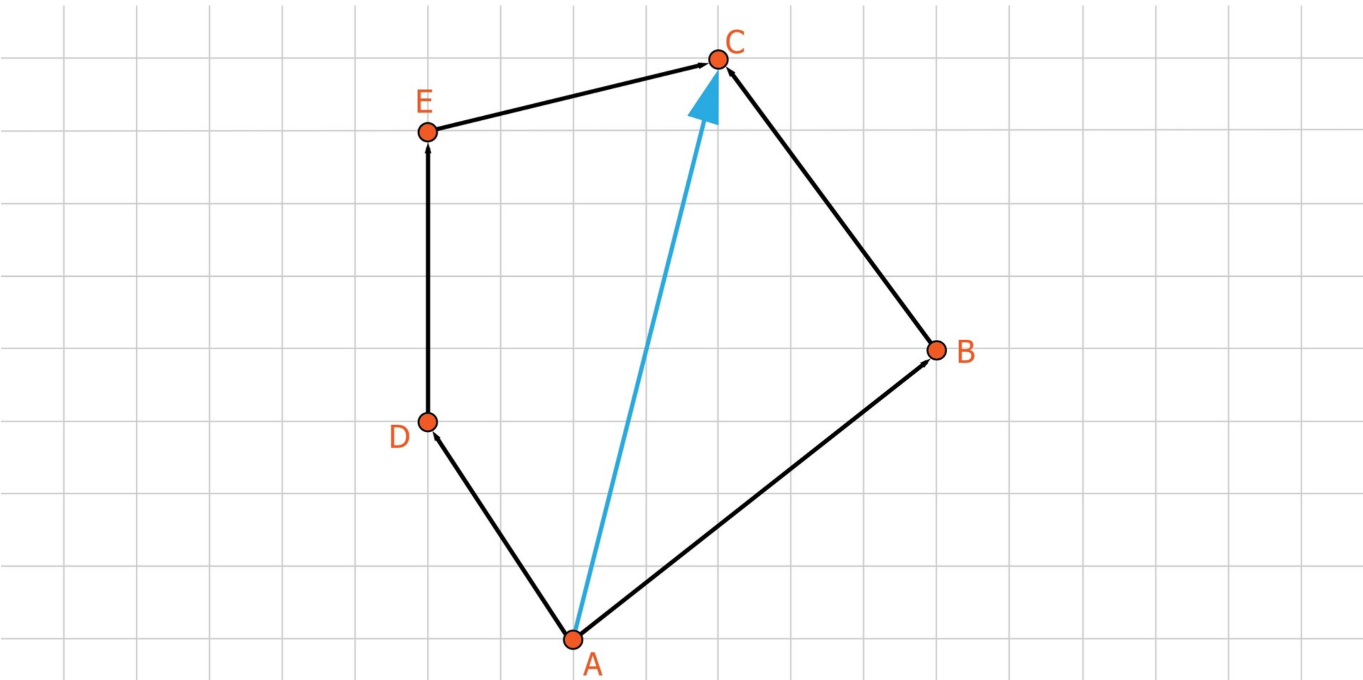
- Wyznaczysz sumę dwóch wektorów przy pomocy reguły trójkąta i reguły równoległoboku.
- Wyznaczysz sumę dowolnej liczby wektorów przy pomocy reguły łańcucha.
- Rozłożysz wektor na składowe.

Przeczytaj

Wektor wypadkowy

Wyobraźmy sobie uproszczoną mapę z zaznaczonymi miejscowościami A, B, C, D i E. Z miejscowości A do miejscowości C można dostać się bezpośrednio poruszając się wzdłuż wektora $\overrightarrow{AC}$, ale można też zrobić to inaczej. Można najpierw przemieścić się z miejscowości A do miejscowości B, a dopiero później do C. Ale można też zrobić po drodze dwa przystanki: w pierwszym etapie przemieszczamy się z miejscowości A do miejscowości D, w drugim – z miejscowości D do miejscowości E, zaś w trzecim – z miejscowości E do miejscowości C. Sytuację ilustruje poniższy rysunek. W takim przypadku powiemy, że wektor $\overrightarrow{AC}$ jest wektorem wypadkowym dla wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ oraz wektor $\overrightarrow{AC}$ jest wektorem wypadkowym dla wektorów $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DE}$ i $\overrightarrow{EC}$. Zwróćmy jeszcze uwagę, w jaki sposób powstają łańcuchy wektorów, których wektorem wypadkowym jest $\overrightarrow{AC}$. Każdy z tych łańcuchów spełnia trzy warunki:

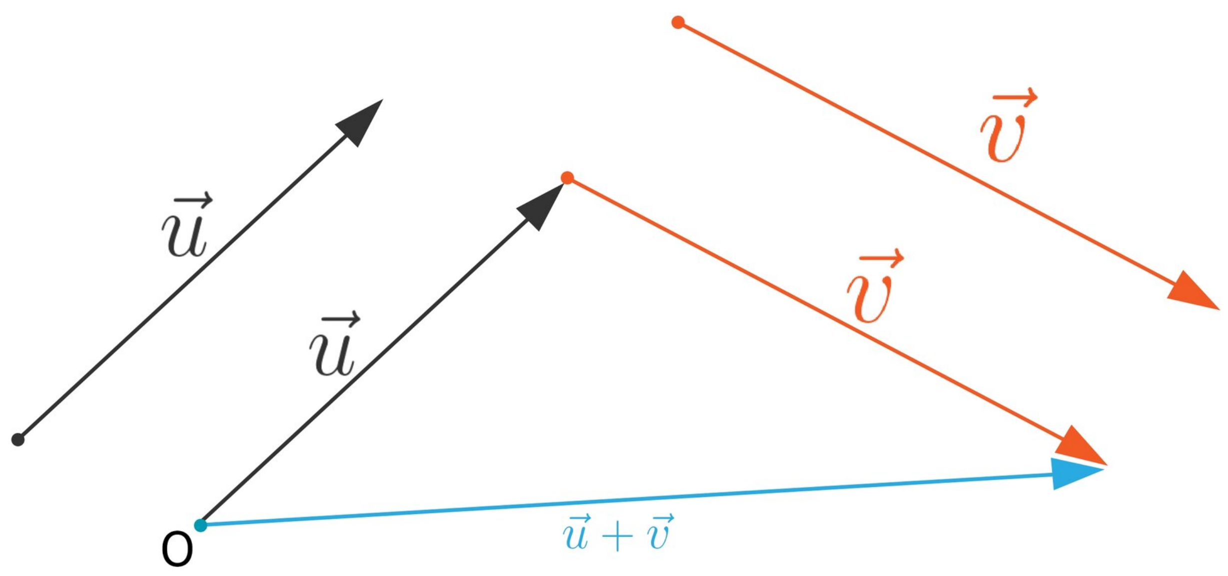
- początek pierwszego wektora pokrywa się z początkiem wektora wypadkowego,
- koniec jednego wektora pokrywa się z początkiem następnego,
- koniec ostatniego wektora łańcucha pokrywa się z końcem wektora wypadkowego.



Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

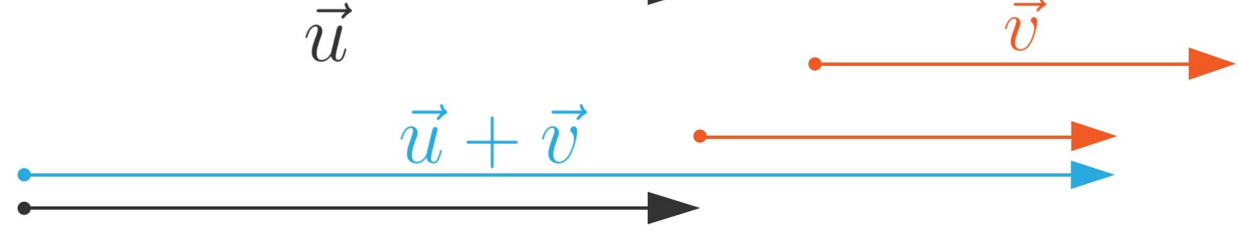
Suma dwóch wektorów - reguła równoległoboku, reguła trójkąta

Sumę wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ wyznaczamy następująco: dowolny punkt O płaszczyzny obieramy jako początek wektora $\overrightarrow{u}$, a koniec wektora $\overrightarrow{u}$ obieramy za początek wektora $\overrightarrow{v}$. Wektor, którego początek znajduje się w punkcie O, a końcem jest koniec wektora $\overrightarrow{v}$ nazywamy sumą wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ i oznaczamy $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

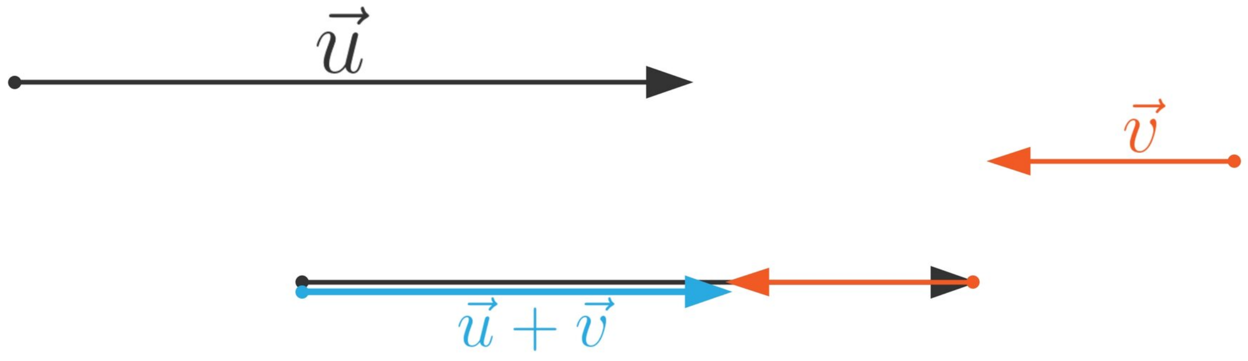


Wektory, których sumę chcemy wyznaczyć nazywamy wektorami składowymi.

Opisana powyżej procedura otrzymywania wektora będącego sumą dwóch wektorów o różnych kierunkach nosi nazwę **reguły trójkąta**. Jak widać na powyższej ilustracji, gdy wektory mają różne kierunki, początki i końce rozważanych wektorów tworzą wierzchołki trójkąta. Zauważmy jeszcze, że chcąc zastosować opisany algorytm do wektorów, które mają ten sam kierunek, wszystkie początki i końce rozważanych wektorów będą leżeć na jednej prostej, zatem nie utworzą trójkąta. Gdy wektory mające ten sam kierunek, mają ten sam zwrot, wówczas ich suma ma ten sam zwrot, który mają składniki.



Gdy wektory mające ten sam kierunek, mają przeciwne zwroty, wówczas ich suma ma zwrot taki jak składnik o większej długości.

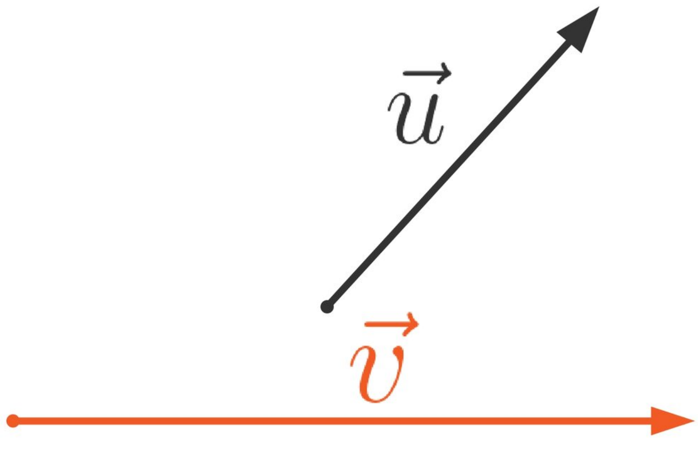


Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Na powyższych ilustracjach niebieski wektor jest sumą wektorów czerwonego i czarnego.

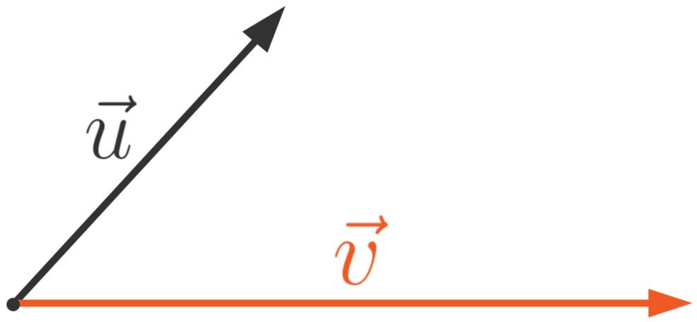
Aby wyznaczyć sumę dwóch wektorów o różnych kierunkach, możemy też zastosować tzw. regułę równoległoboku, która orzeka, że wektor reprezentujący sumę wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ można uzyskać jako przekątną równoległoboku skonstruowanego z użyciem wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Opiszemy teraz jak wykorzystać w praktyce regułę równoległoboku dla dwóch wektorów o różnych kierunkach.

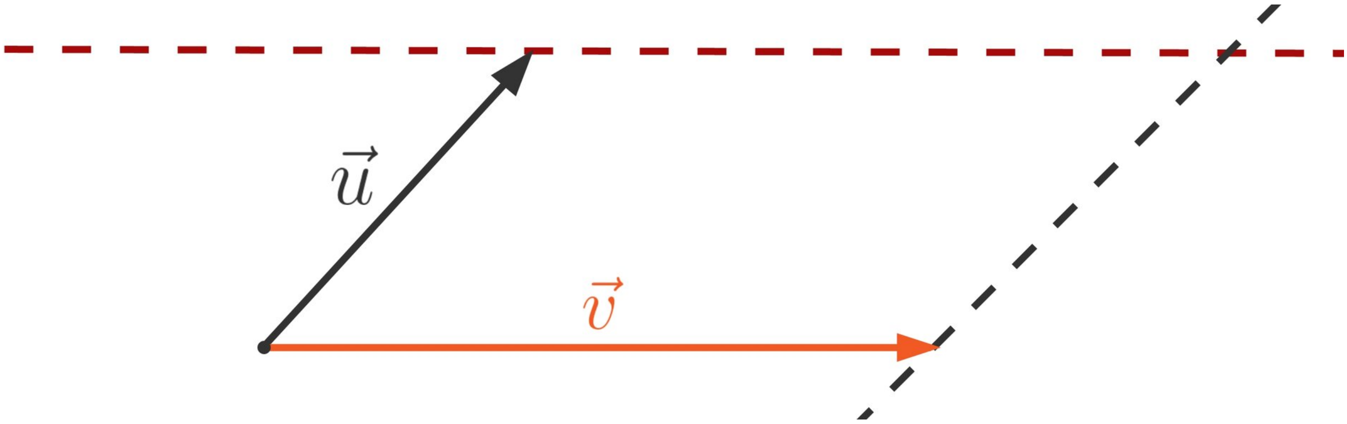


Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

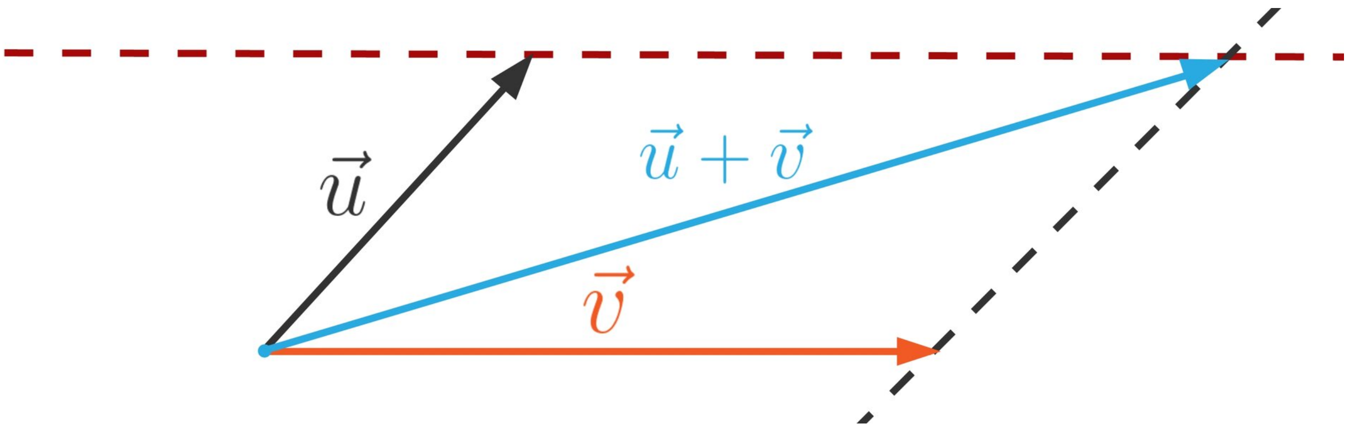
Wektory ustawiamy tak, aby miały wspólny początek.



Przez końce każdego z wektorów prowadzimy proste równoległe do drugiego z nich. Początek obu wektorów, ich końce i punkt przecięcia prostych równoległych do wektorów są wierzchołkami równoległoboku.

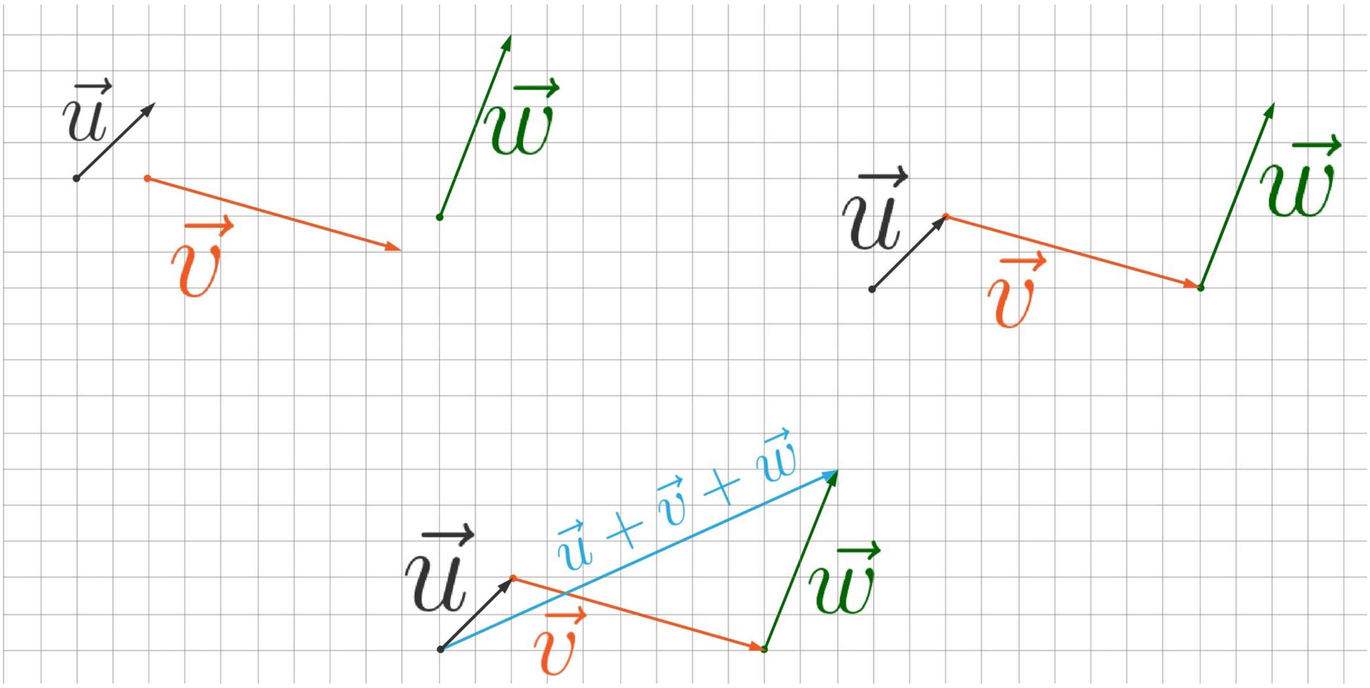


Przekątna równoległoboku zawiera wektor będący sumą rozważanych wektorów: jego początek jest wspólnym początkiem obu wektorów składowych, zaś koniec jest punktem przecięcia poprowadzonych prostych.



Suma przynajmniej trzech wektorów - reguła łańcucha

Jeśli chcemy dodać więcej niż dwa wektory korzystamy z tzw. **reguły łańcucha**, która polega na utworzeniu łańcucha wektorów w taki sposób, że koniec jednego z nich staje się początkiem następnego. Sumą wektorów użytych do utworzenia łańcucha nazywamy wektor o początku w początku pierwszego wektora i końcu w końcu ostatniego wektora. Poniżej przedstawiono zastosowanie reguły łańcucha dla otrzymania sumy trzech wektorów: $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$.



Regułę łańcucha można stosować dla dowolnie wielu wektorów.

Własność: dodawanie wektorów

Dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ zachodzą następujące równości:

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ (*przemienność*)
- $\overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{w}$ (*łączność*)
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ (*wektor zerowy jest elementem neutralnym dodawania wektorów*)
- $\overrightarrow{u} + \left(-\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$

Dowód

Ad. 1) Aby udowodnić, że dodawanie wektorów jest przemienne można posłużyć się równoległobokiem. Rozważmy równoległobok $ABCD$ i przyjmijmy, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ i

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{v}$. Z własności równoległoboku wynika, że $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$. Z definicji sumy wektorów otrzymujemy równości:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u},$$

stąd $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$

Ad. 2) Aby wykazać, że dodawanie wektorów jest łączne, wybierzmy dowolne cztery punkty płaszczyzny i oznaczmy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{w}$.

Wówczas na podstawie definicji sumy wektorów otrzymujemy:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right)$$

Stąd $\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right)$

Ad. 3) Dla dowodu równości trzeciej wystarczy zauważyć, że początek i koniec wektora zerowego znajdują się w tym samym punkcie, zatem po zastosowaniu reguły łańcucha można zauważyć, że koniec drugiego wektora (zerowego) pokrywa się z końcem pierwszego wektora $\overrightarrow{u}$, zatem suma wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{0}$ jest równa wektorowi $\overrightarrow{u}$.

Ad. 4) Przypomnijmy, że wektor przeciwny do danego wektora $\overrightarrow{u}$ ma ten sam kierunek i długość, co wektor $\overrightarrow{u}$. Wektor $\overrightarrow{u}$ i wektor do niego przeciwny różnią się jedynie zwrotem, zatem jeśli $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, to $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$. Po przyłożeniu początku wektora $\overrightarrow{BA}$ do końca wektora $\overrightarrow{AB}$, koniec wektora $\overrightarrow{BA}$ znajduje się w punkcie A, czyli w punkcie przyłożenia wektora $\overrightarrow{AB}$. Zatem suma wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ jest wektorem zerowym.

Słownik

suma wektorów

wektor, który powstaje po ułożeniu wektorów składowych w łańcuch w taki sposób, że koniec jednego wektora jest początkiem następnego - sumą wektorów składowych jest wektor o początku w początku pierwszego wektora łańcucha i końcu w końcu ostatniego wektora łańcucha

wektor wypadkowy

suma wektorów; w pewnych szczególnych przypadkach (np. składanie sił lub przemieszczeń) wektor wypadkowy zastępuje działanie kilku innych wektorów

Animacja

Polecenie 1

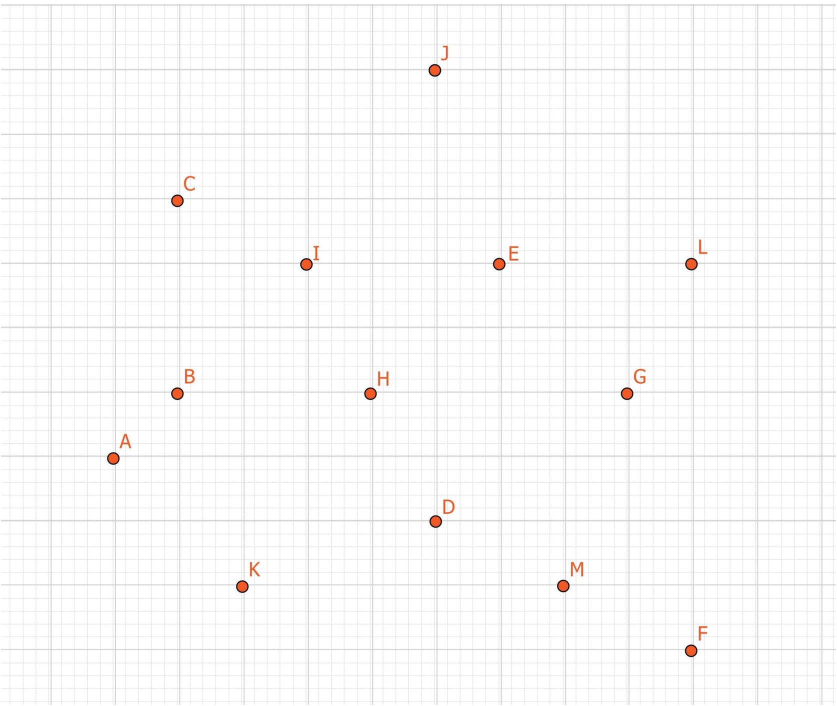
Obejrzyj poniższą animację. Na jej podstawie rozwiąż polecenie 2.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1EPMgX7D

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego sumy wektorów.

Polecenie 2



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Suma wektorów – interpretacja geometryczna

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznaczy sumę dwóch wektorów przy pomocy reguły trójkąta i reguły równoległoboku,
- wyznaczy sumę dowolnej liczby wektorów przy pomocy reguły łańcucha,
- rozłoży wektor na składowe.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- ćwiczeń przedmiotowych;
- z użyciem komputera;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Animacja”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wskazaną (lub wybraną) osobę o odczytanie tematu lekcji: Suma wektorów - interpretacja geometryczna. Następnie zadaje uczniom pytanie: „co wiesz na ten temat?” Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji. Na końcu ustalają kryteria sukcesu
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania , omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom

informacji zwrotnej.Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 3, a następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką
2. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
3. Praca indywidualna – implementacja poznanej techniki do rozwiązywania problemów informatycznych – wykonywanie ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.
2. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

Suma/różnica wektorów w układzie współrzędnych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Suma wektorów - interpretacja geometryczna”.