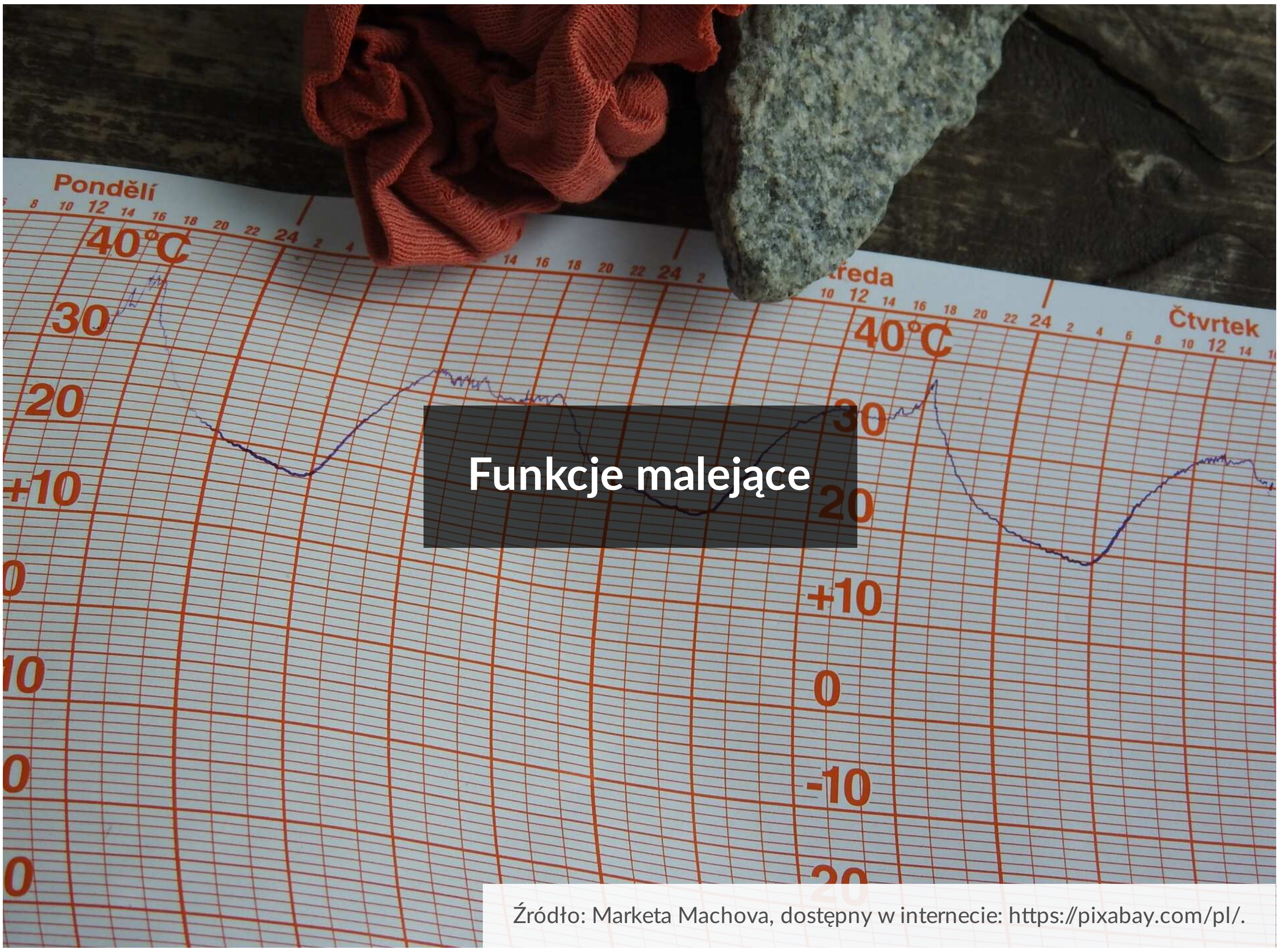
Funkcje malejące



Źródło: Marketa Machova, dostępny w internecie: https://pixabay.com/pl/.

Jakie funkcje nazywamy malejącymi?
Czy funkcja może być malejąca w całej dziedzinie?
Czy funkcja może być malejąca tylko w przedziale, czy też w sumie przedziałów?

Odpowiedzi na te pytania uzyskasz po uważnej analizie poniższego materiału.

> **Twoje cele**
>
> - Rozpoznasz funkcje malejące.
> - Sprawdzisz, czy funkcja jest malejąca.
> - Uzasadnisz, że funkcja jest malejąca.

Przeczytaj

Definicja: Funkcja malejąca

Funkcja liczbowa $f : X \to Y$ jest funkcją malejącą w zbiorze A, $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2, należących do zbioru A, z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcję, która jest malejąca w całej dziedzinie, nazywamy **funkcją malejącą**.

Definicję funkcji malejącej możemy również zapisać krócej.

Funkcja liczbowa $f : X \to Y$ jest funkcją malejącą w zbiorze A,

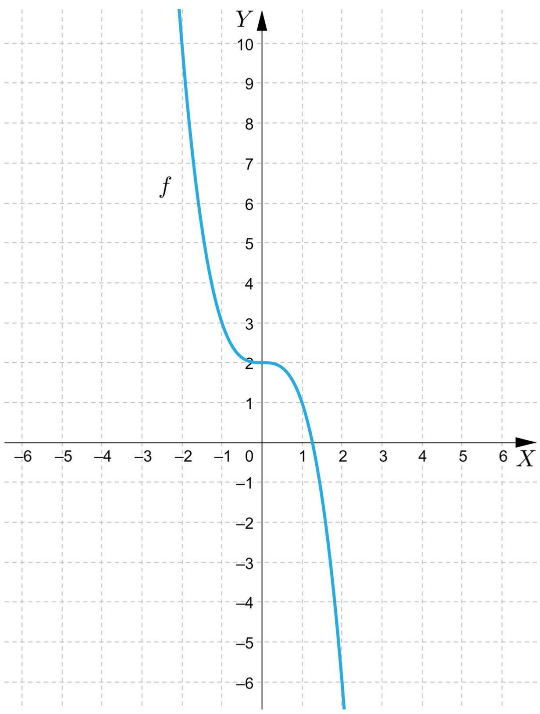
$A \subset X \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A}[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$.

Zwrot „dla każdego x” nazywa się kwantyfikatorem ogólnym, kwantyfikatorem dużym lub kwantyfikatorem uniwersalnym wiążącym zmienną x. Kwantyfikator ogólny oznaczamy symbolem $\forall_x$.

Poniższe przykłady pokażą nam sposoby sprawdzania, czy podana funkcja jest malejąca.

Przykład 1

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Ustalimy, czy funkcja f jest funkcją malejącą.

Rozwiązanie:

Obserwując wykres funkcji zauważamy, że wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji f.

Odczytajmy z wykresu (odpowiednio go przedłużając) wartości funkcji dla argumentów: $-2, 1$.

$f(-2) = 10$

$f(1) = 1$

Z nierówności $-2 < 1$ wynika nierówność $f(-2) > f(1)$.

Możemy wybrać inną parę argumentów. Np. -1 i 2 i podobnie odczytać z wykresu wartości funkcji.

$f(-1) = 3$

$f(2) = -6$

Z nierówności $-1 < 0$ wynika nierówność $f(-1) > f(2)$.

Stąd przypuszczenie, że funkcja f jest funkcją malejącą. Ponieważ na rysunku jest tylko fragment wykresu funkcji, więc nie możemy jednoznacznie ustalić monotoniczności funkcji.

Przykład 2

Funkcja f opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych.

$\{(-5,\ 2),\ (-4,\ 1),\ (-3,\ 0),\ (-2,\ -3),\ (1,\ -5),\ (2,\ -8)\}$.

Pokażemy, że funkcja f jest funkcją malejącą.

Rozwiązanie:

Z nierówności $-5 < -4$ wynika nierówność $(f(-5) = 2) > (f(-4) = 1)$.

Z nierówności $-3 < 2$ wynika nierówność $(f(-3) = 0) > (f(2) = -8)$.

Podobnie, analizując pozostałe pary punktów, zauważamy, że większej wartości argumentu odpowiada mniejsza wartość funkcji.

Stąd wniosek, że funkcja f jest funkcją malejącą.

Przykład 3

Funkcja f opisana jest za pomocą tabelki.

x	-4	-2	0	1	3	5
$f(x)$	8	6	4	2	0	-3

Pokażemy, że funkcja f jest funkcją malejącą.

Rozwiązanie:

Analizując tabelkę opisującą funkcję f zauważamy, że im większy jest argument funkcji tym mniejsza jest jej wartość. Np.

- z nierówności $-4 < 0$ wynika nierówność $(f(-4) = 8) > (f(0) = 4)$;
- z nierówności $1 < 5$ wynika nierówność $(f(1) = 2) > (f(5) = -3)$.

Stąd wniosek, że funkcja f jest funkcją malejącą.

Przykład 4

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru

$f(x) = -2x + 3$, gdy $x \in \mathbb{R}$.

Korzystając z definicji wykażemy, że funkcja f jest malejąca.

Rozwiązanie:

Założenie: $f(x) = -2x + 3$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ oraz $x_1 < x_2$

Teza: $f(x_1) > f(x_2)$

Dowód:

Obliczamy wartości funkcji f dla argumentów x_1 i x_2.

$f(x_1) = -2x_1 + 3$

$f(x_2) = -2x_2 + 3$

Obliczamy różnicę wartości funkcji: $f(x_1) - f(x_2)$

$f(x_1) - f(x_2) = (-2x_1 + 3) - (-2x_2 + 3) = -2x_1 + 3 + 2x_2 - 3 = -2x_1 + 2x_2 =$

$= -2 \cdot (x_1 - x_2)$

Na podstawie założeń ustalimy znak otrzymanego iloczynu.

$x_1 - x_2 < 0$, bo z założenia $x_1 < x_2$.

Zatem iloczyn $-2 \cdot (x_1 - x_2) > 0$.

Stąd $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

Dla dowolnych dwóch liczb $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

Stąd wniosek, że funkcja f jest malejąca w zbiorze $\mathbb{R}$.

Przykład 5

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

- $f(x) = \frac{5}{x}$, gdy $x \in (-\infty,\ 0)$,
- $f(x) = \frac{5}{x}$, gdy $x \in (0,\ \infty)$,
- $f(x) = \frac{5}{x}$, gdy $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Sprawdzimy, czy funkcja f jest funkcją malejącą.

Rozwiązanie:

Ad. a)

Założenie: $f(x) = \frac{5}{x}, x_1, x_2 \in (-\infty,\ 0)$ oraz $x_1 < x_2$

Teza: $f(x_1) > f(x_2)$

Dowód:

Obliczamy wartości funkcji f dla argumentów x_1 i x_2.

$f(x_1) = \frac{5}{x_1}$

$f(x_2) = \frac{5}{x_2}$

Obliczamy różnicę wartości funkcji: $f(x_1) - f(x_2)$

$f(x_1) - f(x_2) = \frac{5}{x_1} - \left(\frac{5}{x_2}\right) = \frac{5}{x_1} - \frac{5}{x_2} = \frac{-5x_1 + 5x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-5 \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 \cdot x_2}$

Ustalamy znak otrzymanego ilorazu na podstawie założeń:

- $x_1 - x_2 < 0$, bo z założenia $x_1 < x_2$.
- $x_1 \cdot x_2 > 0$, ponieważ z założenia wiadomo, że $x_1 < 0$ oraz $x_2 < 0$

Zatem $\frac{-5 \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 \cdot x_2} > 0$, stąd $f(x_1) > f(x_2)$.

Dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 należących do przedziału $(-\infty,\ 0)$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty,\ 0)$.

Ad. b)

Założenie: $f(x) = \frac{5}{x}, x_1, x_2 \in (0,\ \infty)$ oraz $x_1 < x_2$

Teza: $f(x_1) > f(x_2)$

Dowód:

Obliczamy wartości funkcji f dla argumentów x_1 i x_2.

$f(x_1) = \frac{5}{x_1}$

$f(x_2) = \frac{5}{x_2}$

Obliczamy różnicę wartości funkcji: $f(x_1) - f(x_2)$

$f(x_1) - f(x_2) = \frac{5}{x_1} - \left(\frac{5}{x_2}\right) = \frac{5}{x_1} - \frac{5}{x_2} = \frac{-5x_1 + 5x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-5 \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 \cdot x_2}$

Ustalamy znak otrzymanego ilorazu na podstawie założeń:

- $x_1 - x_2 < 0$, bo z założenia $x_1 < x_2$.
- $x_1 \cdot x_2 > 0$, ponieważ z założenia wiadomo, że $x_1 > 0$ oraz $x_2 > 0$

Zatem $\frac{-5 \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 \cdot x_2} > 0$, stąd $f(x_1) > f(x_2)$.

Dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 należących do przedziału $(0,\ \infty)$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $(0,\ \infty)$.

Ad. c)

W poprzednich podpunktach wykazaliśmy, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty,\ 0)$ oraz w przedziale $(0,\ \infty)$. Sprawdzimy, czy jest malejąca w sumie przedziałów.

Weźmy dwa argumenty funkcji f należące do zbioru $\mathbb{R} - \{0\}$,

$x_1 = -5$ oraz $x_2 = 5$

I obliczmy wartości funkcji dla tych argumentów:

$f(-5) = -1$ oraz $f(5) = 1$.

> Okazuje się, że $x_1 < x_2$, ale $f(x_1) < f(x_2)$.
>
> Stąd funkcja f nie jest malejąca w zbiorze $\mathbb{R} - \{0\}$.

> **Ważne!**
>
> - Funkcja jest malejąca, jeżeli wraz ze wzrostem argumentów maleje wartość funkcji.
> - Funkcja jest malejąca w przedziale, ale nie w sumie przedziałów.

Słownik

> **funkcja malejąca**
>
> funkcja jest malejąca, jeżeli wraz ze wzrostem argumentów maleje wartość funkcji

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie materiał przedstawiony w animacji. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać podane przykłady, a następnie porównaj je z podanymi rozwiązaniami.

Po uważnym przeanalizowaniu przykładów przedstawionych w animacji wykonaj samodzielnie poniższe polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DvpPOdr9f

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej funkcji malejących.

Polecenie 2

Wykaż na podstawie definicji, że funkcja $f(x) = 5 - 2x^2$ jest malejąca w przedziale $\langle 0,\ \infty)$.

Polecenie 3

Wykaż, że funkcja $f(x) = \sqrt{2 - x}$ jest funkcją malejącą w całej dziedzinie.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcje malejące

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości,miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości wieksze (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przyjmowane;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna pojęcie funkcji malejącej
- sprawdza, czy funkcja jest malejąca
- uzasadnia, że funkcja jest malejąca

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- niedokończone zdania
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie, metodą niedokończonych zdań, porządkują swoje dotychczasowe wiadomości na temat funkcji.
   Przykładowe zdania, które należy dokończyć:
   a) Funkcją nazywamy ....
   b) Funkcję można opisać za pomocą ....
   c) Dziedziną funkcji nazywamy ....
   d) Dwie funkcje są równe, jeżeli ....
3. Po zakończonej pracy nauczyciel ocenia poprawność odpowiedzi i wyjaśnia wszystkie wątpliwości.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i porównują między sobą uzyskane informacje. Następnie, podzieleni na dwie grupy, poszukują odpowiedzi na pytania postawione w sekcji „Wprowadzenie”. Wnioski przedstawiają na forum klasy.
3. Uczniowie oglądają animację przedstawiającą przykłady sposobów sprawdzania, czy dana funkcja jest malejąca i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 4 i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia 5 – 8.
2. Zadanie dla chętnych:
   Wykaż, że funkcja $f(x) = |x - 1|$ jest malejąca dla $x \in (-\infty,\ 1\rangle$.

Materiały pomocnicze:

Monotoniczność funkcji

Funkcja i jej własności

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animację na zajęciach podsumowujących wiadomości o funkcjach.