Ciąg określony rekurencyjnie

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Ciąg określony rekurencyjnie

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Rekurencja opiera się na określeniu zjawisk („*lustro w lustrze*”), sytuacji („*sen we śnie*”), czy zależności za pomocą samych siebie.

Najprostszym przykładem definicji rekurencyjnej w matematyce jest określenie zbioru liczb naturalnych: pierwsza liczba naturalna to 0, a każda następna liczba naturalna powstaje z poprzedniej przez dodanie liczby 1.

Rekurencja ma zastosowanie w różnych dziedzinach wiedzy – ekonomii, biologii, optyce.

Modelem rekurencji w sztuce są na przykład lalki matrioszki.

Rosyjska matrioszka

W tym materiale poznamy przykłady ciągów znanych z historii matematyki, określonych w sposób rekurencyjny.

Twoje cele

- Określisz ciąg liczbowy w sposób rekurencyjny.
- Obliczysz początkowe wyrazy ciągu określonego rekurencyjnie.
- Zapiszesz ciąg określony rekurencyjnie innymi sposobami.

Przeczytaj

Ważnym sposobem opisywania ciągów jest podanie wzoru rekurencyjnego. Wzór rekurencyjny tworzymy w ten sposób, że zapisujemy najpierw pierwszy wyraz ciągu lub kilka początkowych wyrazów tego ciągu. Następnie podajemy wzór na wyraz n-ty (lub na wyraz np. $n+1$) wyrażony za pomocą wyrazów poprzednich.

Wzór rekurencyjny uzależnia więc wartość dowolnego (ogólnego) wyrazu tego ciągu od wartości poprzedzających go wyrazów.

> **Definicja: definicja rekurencyjna ciągu**
>
> Mówimy, że ciąg jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeżeli:
>
> - określony jest pewien skończony zbiór wyrazów tego ciągu (zwykle jest to pierwszy wyraz ciągu lub kilka jego pierwszych wyrazów),
> - pozostałe wyrazy ciągu są zdefiniowane za pomocą poprzednich wyrazów tego ciągu.

Najbardziej znane przykłady ciągów rekurencyjnych to ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny.

Kolejne początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n):

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

Ciąg arytmetyczny (a_n), którego kolejne wyrazy (oprócz wyrazu pierwszego) tworzone są poprzez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r, zwanej różnicą ciągu, można w sposób rekurencyjny określić następująco:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + r \end{cases}, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, 4, \ldots,$$

Ciąg geometryczny (a_n)

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, \ldots,$$

którego kolejne wyrazy (oprócz wyrazu pierwszego) tworzone są poprzez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę q, zwaną ilorazem ciągu, można w sposób rekurencyjny opisać następująco

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

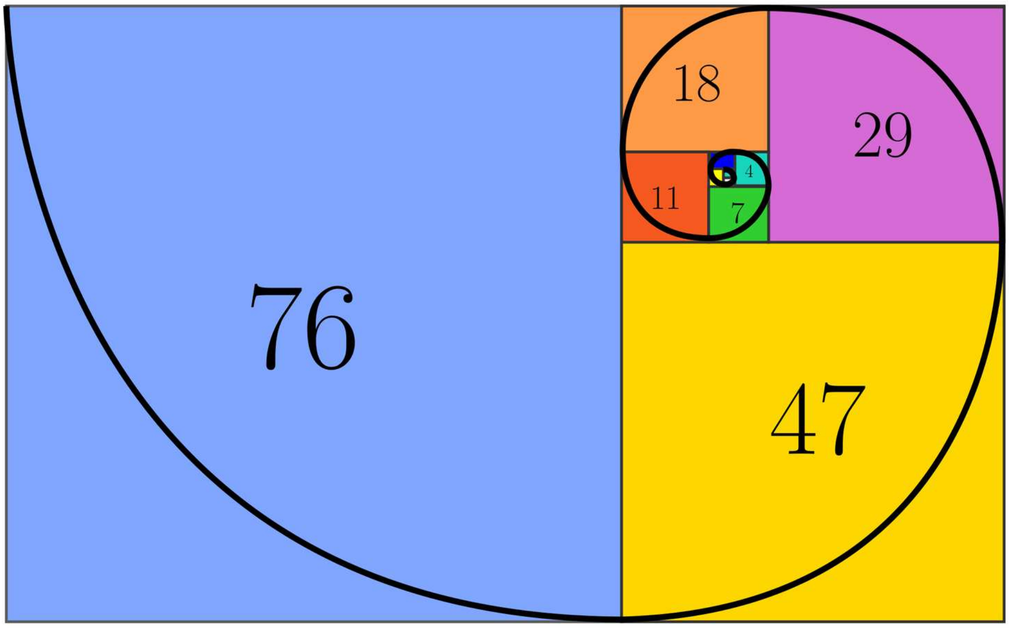
Podamy teraz przykłady ciągów liczbowych, które odegrały ważną rolę w rozwoju arytmetyki, a szczególnie w poszukiwaniu formuły określającej liczby pierwsze.

Przykład 1

Ciąg Lucasa

Ciąg Lucasa (L_n), nazwany tak na cześć dziewiętnastowiecznego matematyka Francoisa Lucasa, zdefiniowany jest w sposób rekurencyjny. Każdy wyraz tego ciągu, począwszy od wyrazu trzeciego, jest sumą dwóch wyrazów go poprzedzających.

$$L_n = \begin{cases} 2, \ n = 0 \\ 1, \ n = 1 \\ L_{n-1} + L_{n-2}, \ n > 1 \end{cases}$$



Spirala zbudowana w kwadratach, których długości boków są kolejnymi wyrazami ciągu Lucasa

Wyrazy tego ciągu to liczby naturalne, zwane oczywiście liczbami Lucasa. Obecnie ciągi tych liczb znajdują zastosowania w algorytmach szyfrowania.

Obliczymy początkowe wyrazy ciągu Lucasa, korzystając ze wzoru rekurencyjnego.

$$L_0 = 2$$

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = L_{2-1} + L_{2-2} = L_1 + L_0 = 1 + 2 = 3$$

$$L_3 = L_{3-1} + L_{3-2} = L_2 + L_1 = 3 + 1 = 4$$

$$L_4 = L_{4-1} + L_{4-2} = L_3 + L_2 = 4 + 3 = 7$$

W tabelce zamieszczamy obliczone wyrazy i jeszcze kilka innych początkowych wyrazów tego ciągu.

Kilka początkowych wyrazów ciągu Lucasa										
L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}
2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

Przykład 2

Ciąg Jacobsthala

Ciąg Jacobsthala to ciąg (J_n) liczb naturalnych nazwany tak na cześć niemieckiego matematyka Ernesta Jacobsthala. Wyrazy ciągu tworzone są w podobny sposób jak liczby Lucasa. Początkowe wyrazy ciągu to 0 i 1. Każdy następny wyraz powstaje przez dodanie wyrazu poprzedniego i dwukrotności liczby poprzedzającej wyraz poprzedni.

Wzór rekurencyjny ciągu liczb Jacobsthala to

$$J_n = \begin{cases} 0,\ n = 0 \\ 1,\ n = 1 \\ J_{n-1} + 2J_{n-2},\ n > 1 \end{cases}$$

Początkowe wyrazy tego ciągu to:

0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, 10923, 21845, 43691, 87381, 174763, 349525, ...

Okazuje się, że ciąg ten można również w inny sposób określić rekurencyjnie.

$$\begin{cases} J_0 = 0 \\ J_1 = 1 \\ J_{n+1} = 2J_n + (-1)^n,\ n \geq 0 \end{cases}$$

Na podstawie tego wzoru określimy wyraz J_6 i sprawdzimy, czy jest to taka sama liczba, jak znaleziona za pomocą poprzedniego wzoru.

Aby obliczyć wyraz J_6, trzeba niestety wyznaczyć aż sześć poprzednich wyrazów. Dwa pierwsze wyrazy przepisujemy bezpośrednio ze wzoru rekurencyjnego, pozostałe obliczymy.

$$J_0 = 0$$

$$J_1 = 1$$

$$J_2 = J_{1+1} = 2J_1 + (-1)^1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$J_3 = J_{2+1} = 2J_2 + (-1)^2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$J_4 = J_{3+1} = 2J_3 + (-1)^3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$J_5 = J_{4+1} = 2J_4 + (-1)^4 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$$

$$J_6 = J_{5+1} = 2J_5 + (-1)^5 = 2 \cdot 11 - 1 = 21$$

Sprawdzamy, że rzeczywiście wyraz J_6 jest taki sam, jak wyznaczony za pomocą innego wzoru.

Przykład 3

Ciąg Jacobsthal–Lucasa

Ciąg liczbowy Jacobsthal–Lucasa tworzony jest w podobny sposób jak ciąg Jacobsthala, ale ma różne wyrazy początkowe.

$$j_n = \begin{cases} 2,\ n = 0 \\ 1,\ n = 1 \\ j_{n-1} + 2j_{n-2},\ n > 1 \end{cases}$$

Początkowe wyrazy tego ciągu to:

2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, 1025, 2047, 4097, 8191, 16385, 32767, 65537, 131071, 262145, 524287, 1048577, ...

Własności ciągu trudno jest określić na podstawie wzoru rekurencyjnego. Dlatego warto zapisać ciąg też za pomocą wzoru ogólnego. Aby określić taki wzór, trzeba zauważyć zależności między kolejnymi wyrazami ciągu. W przypadku ciągu Jacobsthal–Lucasa łatwo widać związek między kolejnymi potęgami liczby 2, a numerami wskaźników kolejnych wyrazów ciągu.

$$j_0 = 2 = 1 + 1 = 2^0 + (-1)^0$$

$$j_1 = 1 = 2 - 1 = 2^1 + (-1)^1$$

$$j_2 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + (-1)^2$$

$$j_3 = 7 = 8 - 1 = 2^3 + (-1)^3$$

$$j_4 = 17 = 16 + 1 = 2^4 + (-1)^4$$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$$j_n = 2^n + (-1)^n \text{ dla } n \geq 0$$

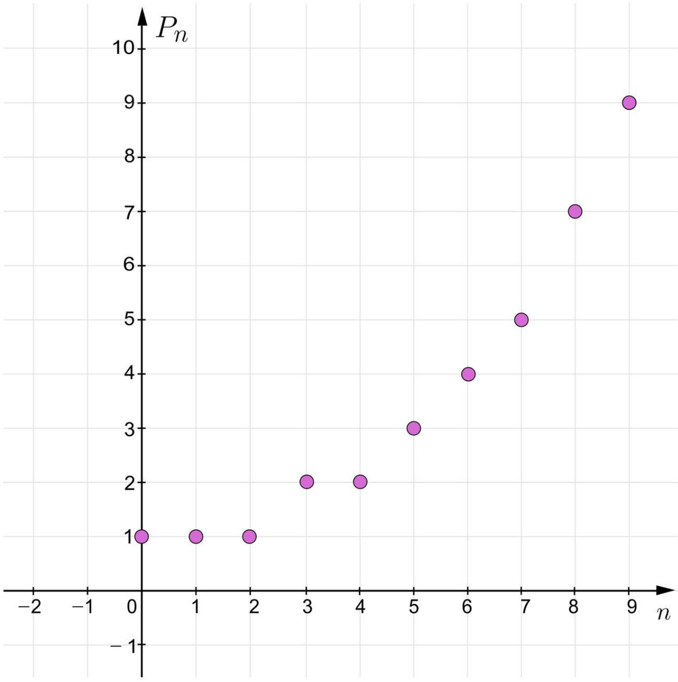
Przykład 4

Ciąg Padovana

Ciąg Padovana (P_n) to ciag liczb naturalnych nazwany tak na cześć architekta Richarda Padovana określony w sposób rekurencyjny następująco:

$$P_n = \begin{cases} 1, \ n = 0 \\ 1, \ n = 1 \\ 1, \ n = 2 \\ P_{n-2} + P_{n-3}, \ n > 2 \end{cases}$$

Rysunek przedstawia fragment wykresu tego ciągu.

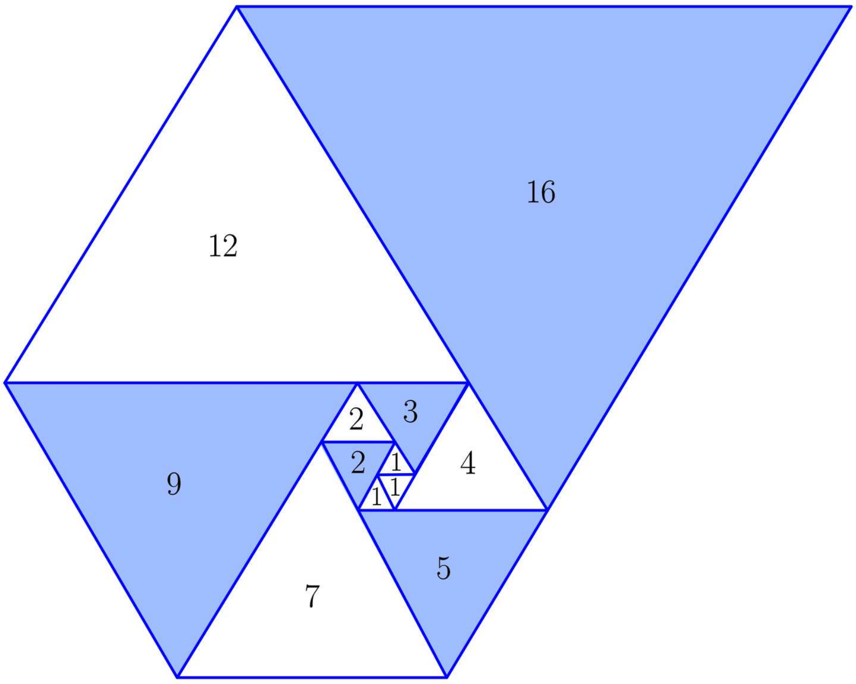


Na podstawie wykresu odczytujemy kilka początkowych wyrazów tego ciągu:

$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, \ldots$

Zauważmy, że jest to ciąg niemalejący.

Figury geometryczne, których długości boków są kolejnymi wyrazami ciągu Padovana, wykorzystywane są często we wzorach architektonicznych.



Spirala trójkątów równobocznych o długościach boków zgodnych z sekwencją Padovana.

Zauważmy, że sposób rekurencyjny określania ciągu nie jest zbyt wygodny, bo obliczenie na przykład wyrazu dziesiątego, wymaga znalezienia aż dziewięciu wyrazów go poprzedzających.
W praktyce zatem częściej stosuje się wzór ogólny ciągu, gdyż korzystając z takiego wzoru można od razu wyznaczyć żądany wyraz ciągu, w szczególności, gdy jest to wyraz o dużym indeksie.

W Przykładzie 5 pokażemy, że jednak w niektórych przypadkach wzór ogólny jest dość skomplikowany i wyrazy o małych wskaźnikach znacznie łatwiej jest wyznaczyć ze wzoru rekurencyjnego.

Przykład 5

Ciąg Pella

Ciąg Pella to ciąg liczbowy (P_n) nazwany tak na cześć siedemnastowiecznego angielskiego matematyka Johna Pella, zdefiniowany w sposób rekurencyjny następująco:

$$P_n = \begin{cases} 0, \ n = 0 \\ 1, \ n = 1 \\ 2P_{n-1} + P_{n-2}, \ n > 1 \end{cases}$$

Kilka początkowych wyrazówa ciągu to:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, ...

Ciąg ten można również określić wzorem ogólnym

$$P_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

Zauważamy, że w tym przypadku znacznie prościej jest wyznaczyć kolejne liczby Pella ze wzoru rekurencyjnego, niż ze wzoru ogólnego.

Słownik

definicja rekurencyjna ciągu

mówimy, że ciąg jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeżeli:

- określony jest pewien skończony zbiór wyrazów tego ciągu (zwykle jest to pierwszy wyraz ciągu lub kilka jego pierwszych wyrazów),
- pozostałe wyrazy ciągu są zdefiniowane za pomocą poprzednich wyrazów tego ciągu

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady zawarte w animacji. Staraj się najpierw samodzielnie rozwiązać podane tam zadania, a następnie porównaj z rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DcPwFriVH

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej ciągu określonego rekurencyjnie.

Polecenie 2

Zapisz za pomocą wzoru rekurencyjnego ciąg określony dla $n \geq 1$ następująco:

pierwszy wyraz tego ciągu to (-1), drugi wyraz to 2, a każdy następny wyraz powstaje poprzez pomnożenie dwóch wyrazów bezpośrednio go poprzedzających.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ciąg (a_n) jest określony wzorem:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - a_{n-1},\ n \geq 2 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5

Liczby Padovana (P_m) można określić również dla ujemnych wskaźników $m \leq 2$ w posób następujący:

$$P_m = \begin{cases} 1,\ m = 2 \\ 1,\ m = 1 \\ 1, m = 0 \\ P_{m+3} - P_{m+1},\ m < 0 \end{cases}$$

Ćwiczenie 6

Ciąg (a_n) określony jest wzorem:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + 2n,\ n \geq 0 \end{cases}$$

Ćwiczenie 7

Matematycy indyjscy w III wieku p.n.e. kolejne przybliżenia liczby $\sqrt{2}$ tworzyli, korzystając z następujących ułamków:

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots, \frac{577}{408}, \ldots$$

Odkryj regułę, która pozwoli ci tworzyć kolejne wyrazy ciągu (a_n) przedstawionego powyżej. Zapisz odkrytą regułę w postaci wzoru ogólnego ciągu, wykorzystując wyrazy ciągu Pella.

Ćwiczenie 8

Ciąg ośmiowyrazowy (a_n) określony jest za pomocą tabelki. Określ ten ciag rekurencyjnie.

Kolejne wyrazy ciągu								
n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	-2	5	0	7	2	9	4	11

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciąg określony rekurencyjnie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa II lub III

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach

$$\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_n = a_n + \frac{1}{2} \cdot a_n(1 - a_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa ciąg liczbowy w sposób rekurencyjny;
- oblicza początkowe wyrazy ciągu określonego rekurencyjnie;
- zapisuje ciąg określony rekurencyjnie innymi sposobami;

- prowadzi proste rozumowania, mające na celu uogólnienie zauważanych zależności.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- skacząca żaba;
- mini-konkurs.

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą skaczącej żaby przypominają wiadomości na temat ciągów (pierwsza „żaba” to uczeń siedzący w pierwszej ławce, następna „żaba” to uczeń siedzący w trzeciej ławce, itp. „Żaby” kolejno przedstawiają informacje na temat ciągów – wiadomości nie mogą się powtarzać).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów tworzą wspólną definicję rekurencji.
2. Praca w 5 grupach. Każda z grup analizuje jeden przykład ciągu opisanego w sekcji Przeczytaj, odpowiednio w Przykładzie 1, 2, 3, 4, 5.
3. Zadaniem grupy jest określenie własności danego ciągu i takie przygotowanie wiadomości na jego temat, aby w atrakcyjny sposób zaprezentować go kolegom. Uczniowie mogą korzystać z Internetu, zdobywając np. dodatkowe informacje na temat danego ciągu lub jego twórcy.
4. Po upływie wyznaczonego czasu grupy prezentują swoje dokonania w formie mini–konkursu. Każdy element prezentacji jest punktowany przez odbiorców.
5. Grupa, która zbierze najwięcej punktów otrzymuje nagrodę (może to być stopień).

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Liderzy grup opowiadają o problemach, dobrych pomysłach i przebiegu pracy swoich grup.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

- Rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana na zajęciach wprowadzających określenie rekurencyjne ciągu geometrycznego lub arytmetycznego.