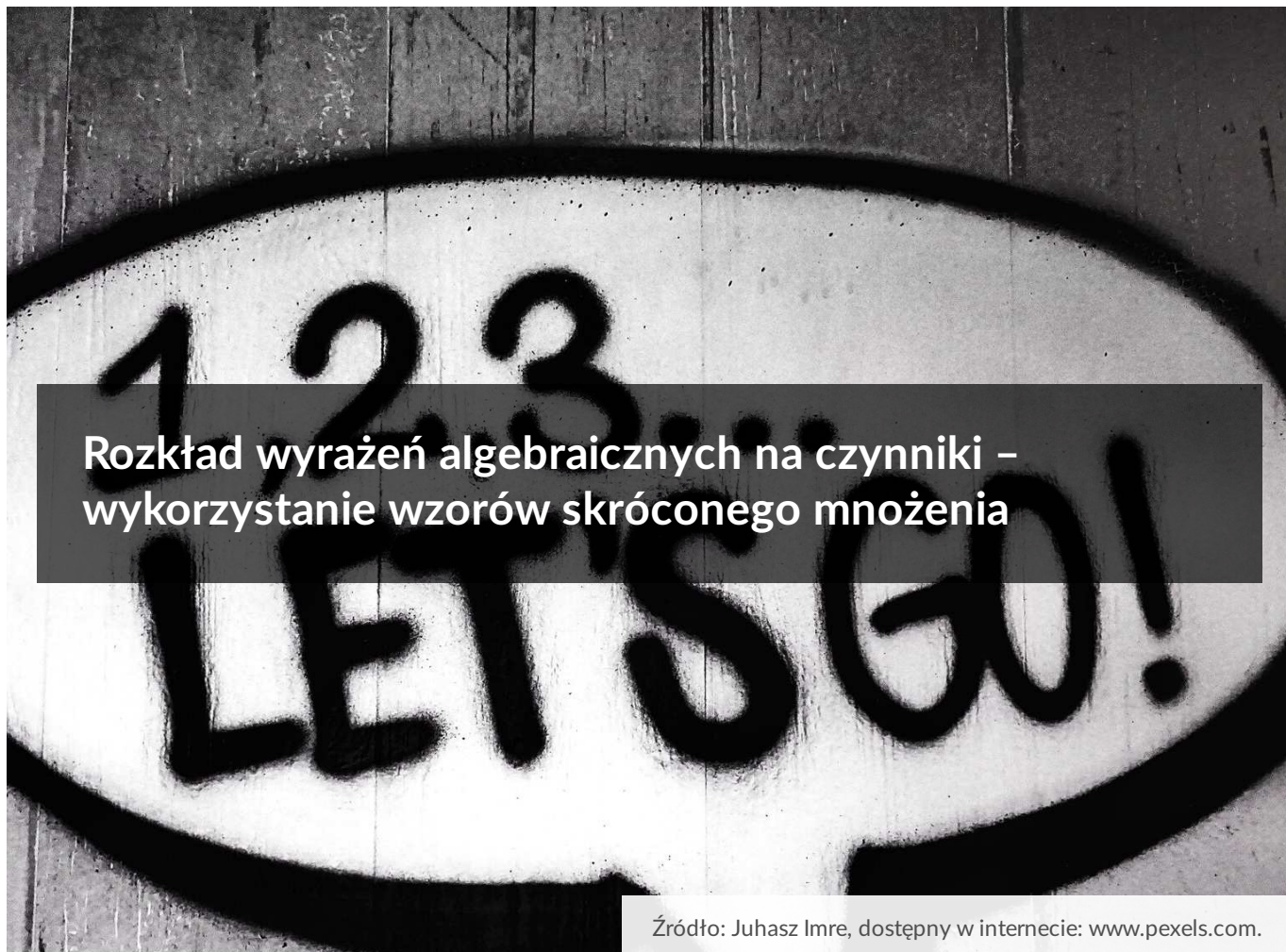




## Rozkład wyrażen algebraicznych na czynniki – wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Rozkład wyrażen algebraicznych na czynniki – wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia

Źródło: Juhasz Imre, dostępny w internecie: [www.pexels.com](http://www.pexels.com).

W tym materiale pokażemy, jak wykorzystać wzory skróconego mnożenia drugiego stopnia do rozkładu wyrażen algebraicznych na czynniki.



Carl Gauss

Zapisywanie wyrażen algebraicznych w postaci iloczynów wcale nie jest takie łatwe, jak może ci się wydawać. Po pierwsze nie zawsze jest to możliwe (w zbiorze liczb rzeczywistych), a po drugie w wielu wypadkach trzeba się nieźle natrudzić, żeby tego dokonać.

Matematycy przez kilka stuleci usiłowali znaleźć odpowiedź na pytanie – czy każdy wielomian stopnia co najmniej 3 można rozłożyć na czynniki. Rozstrzygającą odpowiedź na to pytanie dał w XVIII wieku jeden z najsłynniejszych matematyków wszechczasów Carl Gauss, który mając zaledwie 22 lata udowodnił, że każdy wielomian można rozłożyć na czynniki

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org,  
domena publiczna.

stopnia co najwyżej drugiego (niestety,  
w wielu wypadkach przy użyciu o wiele  
bardziej zaawansowanych narzędzi niż te,

którymi dysponujesz).

### Twoje cele

- Wykorzystasz wzory skróconego mnożenia do rozkładu wyrażeń algebraicznych na czynniki.
- Dobierzesz najefektywniejszy sposób zapisania w postaci iloczynu wyrażenia algebraicznego, analizując postać tego wyrażenia.

# Przeczytaj

---

**Rozkład na czynniki (faktoryzacja)** wielomianu polega na znalezieniu takich wielomianów jak najniższego stopnia, których iloczyn jest równy danemu. Przy czym znalezione wielomiany nie mogą być tego samego stopnia (lub wyższego) co dany wielomian.

W tej części materiału zajmiemy się rozkładem wyrażeń algebraicznych na czynniki, z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia drugiego stopnia. Przy czym wyrażenia będą miały postać wielomianu:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie:

$a_0, a_1, \dots, a_n$  – dane liczby rzeczywiste.

Przypomnijmy najpierw potrzebne wzory.

**Wzory skróconego mnożenia drugiego stopnia:**

**Ważne!**

**Wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń:**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Ważne!**

**Wzór na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń**

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**Ważne!**

**Wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń**

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

## Zastosowanie wzoru na kwadrat sumy

**Przykład 1**

Podamy teraz przykłady rozkładu na czynniki z bezpośrednim wykorzystaniem wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy.

W poniższych sumach wystarczy tylko zauważyć, który składnik jest podwojonym iloczynem, a które składniki są kwadratami wyrażeń. „Zwijamy” wtedy sumę w kwadrat dwumianu, a następnie zapisujemy kwadrat w postaci iloczynu.

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = (x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$$

$$x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2)^2 + 2 \cdot 4x^2 + 4^2 = (x^2 + 4)^2 = (x^2 + 4)(x^2 + 4)$$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2\sqrt{3}x + 1 &= (\sqrt{3}x)^2 + 2 \cdot \sqrt{3}x \cdot 1 + 1^2 = \\ &= (\sqrt{3}x + 1)^2 = (\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25y^2 + 20xy + 4x^2 &= (5y)^2 + 2 \cdot 5y \cdot 2x + (2x)^2 = \\ &= (5y + 2x)^2 = (5y + 2x)(5y + 2x) \end{aligned}$$

### Przykład 2

W tym przykładzie wyłączymy najpierw przed nawias największy wspólny czynnik, a następnie wyrażenie w nawiasie zapiszemy w postaci iloczynu, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy.

$$98x^2 + 84x + 18 = 2 \cdot (49x^2 + 42x + 9) = 2 \cdot (7x + 3)^2 = 2 \cdot (7x + 3)(7x + 3)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{7}x^4y^4 + 14x^2y^2 + 7\sqrt{7} &= \sqrt{7} \cdot (x^4y^4 + 2\sqrt{7}x^2y^2 + 7) = \\ &= \sqrt{7} \cdot (x^2y^2 + \sqrt{7})(x^2y^2 + \sqrt{7}) \end{aligned}$$

$$x^5y + 20x^4y + 100x^3y = x^3y \cdot (x^2 + 20x + 100) = x^3y \cdot (x + 10)(x + 10)$$

### Przykład 3

Teraz przed nami trudne zadanie. Aby rozłożyć podane wyrażenie na czynniki, musimy pogrupować najpierw odpowiednio składniki, a następnie skorzystać ze wzoru na kwadrat sumy.

$$A = x^3 + 2x^2 + x + 2x^2 + 4x + 2$$

Grupujemy składniki.

$$A = (x^3 + 2x^2 + x) + (2x^2 + 4x + 2)$$

Wyłączamy wspólne czynniki z obu nawiasów.

$$A = x \cdot (x^2 + 2x + 1) + 2 \cdot (x^2 + 2x + 1)$$

Ponownie wyłączamy przed nawias wspólny czynnik.

$$A = (x^2 + 2x + 1)(x + 2)$$

Zauważmy, że wyrażenie w pierwszym nawiasie to kwadrat sumy  $x + 1$ .

$$A = (x + 1)^2(x + 2)$$

Ostatecznie:

$$A = (x + 1)(x + 1)(x + 2)$$

## Zastosowanie wzoru na kwadrat różnicy

Podobnie, jak wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy, można stosować wzór na kwadrat różnicy.

### Przykład 4

Oto przykłady [rozkładu na czynniki](#) z bezpośrednim wykorzystaniem wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

W poniższych sumach wystarczy tylko zauważyć, który składnik jest podwojonym iloczynem, a które składniki są kwadratami wyrażeń. „Zwinąć” sumę w kwadrat różnicy, a następnie zapisać wyrażenie w postaci iloczynu.

$$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 = (x - 5)^2 = (x - 5)(x - 5)$$

$$x^4 - 14x^2 + 49 = (x^2)^2 - 2 \cdot 7x^2 + 7^2 = (x^2 - 7)^2 = (x^2 - 7)(x^2 - 7)$$

$$5x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = (\sqrt{5}x)^2 - 2 \cdot \sqrt{5}x \cdot 1 + 1^2 =$$

$$= (\sqrt{5}x - 1)^2 = (\sqrt{5}x - 1)(\sqrt{5}x - 1)$$

$$36y^2 - 36xy + 9x^2 = (6y)^2 - 2 \cdot 6y \cdot 3x + (3x)^2 =$$

$$= (6y - 3x)^2 = (6y - 3x)(6y - 3x)$$

### Przykład 5

W tym przykładzie wyłączymy najpierw przed nawias największy wspólny czynnik, a następnie wyrażenie w nawiasie zapiszemy w postaci iloczynu, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

$$128x^2 - 32x + 2 = 2 \cdot (64x^2 - 16x + 1) = 2 \cdot (8x - 1)^2 = 2 \cdot (8x - 1)(8x - 1)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}x^4y^4 - 6x^2y^2 + 3\sqrt{3} &= \sqrt{3} \cdot (x^4y^4 - 2\sqrt{3}x^2y^2 + 3) = \\ &= \sqrt{3} \cdot (x^2y^2 - \sqrt{3})(x^2y^2 - \sqrt{3})\end{aligned}$$

$$x^5y - 18x^4y + 81x^3y = x^3y \cdot (x^2 - 18x + 81) = x^3y \cdot (x - 9)(x - 9)$$

Nie zawsze patrząc na wyrażenie algebraiczne możemy zauważyć, że aby je zapisać w postaci iloczynu, można skorzystać z danego wzoru skróconego mnożenia, często trzeba najpierw odpowiednio rozpisać składniki, a nawet dodać lub odjąć odpowiednie wyrażenie.

### Przykład 6

Zapiszemy w postaci iloczynu wyrażenie  $B = x^3 - 3x^2 + 4$ .

Do wyrażenia dodajemy  $4x$  i jednocześnie odejmujemy  $4x$ , wyrażenie  $-3x^2$  zapisujemy w postaci  $(-4x^2 + x^2)$ .

$$B = x^3 - \underbrace{3x^2}_{-4x^2 + x^2} + 4 = x^3 - \underbrace{4x^2 + x^2}_{-4x^2 + x^2} + 4 + \underbrace{4x - 4x}$$

Grupujemy składniki.

$$B = (x^3 - 4x^2 + 4x) + (x^2 - 4x + 4)$$

Wyłączamy z pierwszego nawiasu wspólny czynnik.

$$B = x \cdot (x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 4x + 4)$$

Ponownie wyłączamy wspólny czynnik.

$$B = (x^2 - 4x + 4)(x + 1)$$

Zapisujemy pierwszy z nawiasów w postaci iloczynu – korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

$$B = (x - 2)(x - 2)(x + 1)$$

## Zastosowanie wzoru na różnicę kwadratów

Najczęściej wykorzystywanym wzorem w rozkładzie na czynniki jest wzór na różnicę kwadratów.

### Przykład 7

Zapiszemy każde z podanych wyrażen w postaci iloczynu, stosując wzór na różnicę kwadratów.

a)

$$x^2 - 121 = x^2 - 11^2 = (x - 11)(x + 11)$$

b) Aby rozłożyć na czynniki podane wyrażenie, zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów.

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

c) Ponownie zastosujemy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów.

$$\begin{aligned} (x^2 - 2)^2 - 9 &= (x^2 - 2 - 3)(x^2 - 2 + 3) = (x^2 - 5)(x^2 + 1) = \\ &= (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x^2 + 1) \end{aligned}$$

d) Wyłączamy najpierw wspólny czynnik poza nawias i korzystamy z tego, że  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

$$4x^5y^2 - 32x^3 = 4x^3(x^2y^2 - 8) = 4x^3(xy - 2\sqrt{2})(xy + 2\sqrt{2})$$

## Rozkład na czynniki z zastosowaniem kilku wzorów skróconego mnożenia

Jeśli chcemy rozłożyć na czynniki wyrażenie algebraiczne, z którego postaci nie możemy bezpośrednio wywnioskować, jaki sposób rozkładu zastosować, sprowadzamy to wyrażenie do najprostszej postaci. I dopiero wtedy ustalamy sposób rozkładu (jeśli ten rozkład jest możliwy).

### Przykład 8

Zapiszemy w postaci iloczynu wyrażenie  $C = (y + 1)^2 - (x + 1)^2 + 2 \cdot (x - y)$ .

**Krok 1** – wykonujemy wskazane działania

$$C = y^2 + 2y + 1 - x^2 - 2x - 1 + 2x - 2y$$

**Krok 2** – redukujemy wyrazy podobne

$$C = y^2 - x^2$$

**Krok 3** – rozkładamy na czynniki

$$C = (y - x)(y + x)$$

### Przykład 9

Rozłożymy na czynniki wielomian  $D = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 4x$ .

**Krok 1** – wyłączamy wspólny czynnik

$$D = x \cdot (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4)$$

**Krok 2** – wyraz wolny wielomianu to 4, zatem szukamy najpierw możliwości zapisania wyrażenia znajdującego się w nawiasie w postaci iloczynu takich wyrażen, aby wystąpiło mnożenie  $1 \cdot 4$  lub  $2 \cdot 2$  albo  $(-1) \cdot (-4)$  lub  $(-2) \cdot (-2)$ .

Współczynnik przy  $x^4$  to 1. Zatem próbujemy poszukać takich dwóch wyrażen, aby wystąpiło mnożenie  $x^2 \cdot x^2$  lub  $x \cdot x^3$ .

„Rozpisujemy”  $2x^3$  w postaci  $-x^3 + 3x^3$ , aby wyłączyć w konsekwencji wspólny czynnik przed nawias.

$$D = x \cdot (x^4 - x^3 + 3x^3 - 3x^2 - 4x + 4)$$

$$D = x \cdot [x^3 \cdot (x - 1) + 3x^2 \cdot (x - 1) - 4 \cdot (x - 1)]$$

$$D = x \cdot (x - 1)(x^3 + 3x^2 - 4)$$

**Krok 3** – ponownie stosujemy „chwyt” taki jak wyżej – zapisujemy  $3x^2$  w postaci  $-x^2 + 4x^2$ .

$$D = x \cdot (x - 1)(x^3 - x^2 + 4x^2 - 4)$$

$$D = x \cdot (x - 1)[x^2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (x^2 - 1)]$$

**Krok 4** – wyrażenie w ostatnim nawiasie to różnica kwadratów, zatem możemy zapisać to wyrażenie w postaci:  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$  i wyłączyć wspólny czynnik.

$$D = x \cdot (x - 1)[x^2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (x - 1)(x + 1)]$$

$$D = x \cdot (x - 1)(x - 1)(x^2 + 4x + 4)$$

**Krok 5** – wyrażenie w ostatnim nawiasie zapisujemy jako kwadrat dwumianu  $(x + 2)$ .

$$D = x \cdot (x - 1)^2(x + 2)^2$$

Ostatecznie:

$$D = x \cdot (x - 1)(x - 1)(x + 2)(x + 2)$$

## Słownik

**rozkład na czynniki (faktoryzacja)**

to zapisanie wielomianu w postaci iloczynu wielomianów jak najniższego stopnia



# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją pokazującą wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia w rozwiązywaniu równań, nierówności i dowodzeniu twierdzeń. Spróbuj rozwiązać podane przykłady też w inny sposób, bez stosowania wzorów skróconego mnożenia. Oceń, które sposoby są najefektywniejsze.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DKN9s5DUn>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego rozkładu wyrażeń algebraicznych na czynniki za pomocą wzorów skróconego mnożenia.

---

## Polecenie 2

Rozwiąż nierówność  $(x^2 + 2x)^2 - (2x + 4)^2 < 0$ . Skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej  $a$  prawdziwa jest nierówność

$$2a^2 + 12a + 1 > -25.$$

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Rozkład wyrażeń algebraicznych na czynniki – wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia drugiego stopnia**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

- 1) stosuje wzory skróconego mnożenia na:  $(a + b)^2$ ,  $(a - b)^2$ ,  $a^2 - b^2$ ,  $(a + b)^3$ ,  $(a - b)^3$ ,  $a^3 - b^3$ ,  $a^n - b^n$ ;
- 2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- 3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;
- 4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu  $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$ .

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wykorzystuje wzory skróconego mnożenia do rozkładu wyrażeń algebraicznych na czynniki
- dobiera niealgorytmiczne sposoby zapisania w postaci iloczynu wyrażenia algebraicznego, analizując postać tego wyrażenia
- tworzy pomocnicze obiekty matematyczne w celu rozwiązania nietypowego problemu

- uzasadnia przebieg rozumowania prowadzącego do wykorzystania efektywnych strategii

### **Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

### **Metody i techniki nauczania:**

- drzewo pomysłów
- krokodyl

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

Nauczyciel prosi uczniów, aby w domu przypomnieli sobie sposoby wykonywania działań na wyrażeniach algebraicznych.

#### **Faza wstępna:**

Uczniowie przypominają wspólnie znane im wzory skróconego mnożenia drugiego stopnia i ich zastosowania.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami rozkładu wielomianu na czynniki zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania.

Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady rozkładu na czynniki z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia (np. przy skracaniu wyrażeń wymiernych, określaniu dziedziny funkcji, itp.).

Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.

Teraz uczniowie w grupach zapoznają się z animacją i ewentualnie dopisują na plakacie pozyskane informacje.

Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „drzemie na brzegu rzeki” i tylko „ożywia się” w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

### **Faza podsumowująca:**

Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji – uczniowie mogą korzystać z wytworzonych plakatów.

Liderzy grup omawiają wyniki prac uczestników, uczniowie wzajemnie oceniają swoją pracę.

Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

### **Praca domowa:**

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

### **Materiały pomocnicze:**

### **Działania na wyrażeniach algebraicznych – zadania, zadania generatorowe**

### **Wskazówki metodyczne:**

Animację można wykorzystać w tematach poświęconych rozwiązywaniu równań i nierówności wielomianowych.