



Przykłady funkcji złożonych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W tym materiale dowiemy się, jak należy postępować, aby z dwóch funkcji f i g otrzymać funkcje $f \circ g$ i $g \circ f$, które są złożeniem funkcji co nazywamy również superpozycją.

Twoje cele

- Podasz wzory, jakimi są określone złożenia dwóch funkcji.
- Przedstawisz daną funkcję w postaci złożenia dwóch funkcji.
- Zbadasz, czy istnieją złożenia dwóch funkcji.

Przeczytaj

Jeżeli funkcja g odwzorowuje zbiór X w zbiór Y , a f odwzorowuje zbiór Y w zbiór Z , to funkcję h , która odwzorowuje zbiór X w zbiór Z , określoną wzorem $h(x) = f(g(x))$ dla $x \in X$ nazywamy złożeniem funkcji g i f i oznaczamy: $f \circ g$. Dla każdego $x \in X$ mamy:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Funkcję g nazywamy funkcją wewnętrzną funkcji $f \circ g$, natomiast funkcję f nazywamy funkcją zewnętrzną funkcji $f \circ g$.

Funkcja $f \circ g$ jest określona wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wartości funkcji g zawiera się w dziedzinie funkcji f . Zatem, gdy zbiór wartości funkcji g nie jest podzbiorem dziedziny funkcji f , to nie można złożyć funkcji g z funkcją f .

Pamiętaj, że kolejność, w jakiej zapisane są funkcje, jest bardzo istotna. Zapis $f \circ g$ oznacza, że najpierw działa g , potem f .

Będziemy stosować następujące oznaczenia:

D_f – dziedzina funkcji f ,

ZW_f – zbiór wartości funkcji f ,

D_g – dziedzina funkcji g ,

ZW_g – zbiór wartości funkcji g .

Przykład 1

Zbadamy, czy istnieje **złożenie funkcji** $g(x) = x - 3$ z funkcją $f(x) = 2x^2$.

Funkcja wewnętrzna: $g(x) = x - 3$.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$ZW_g = \mathbb{R}$$

Funkcja zewnętrzna: $f(x) = 2x^2$.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$ZW_g \subset D_f$$

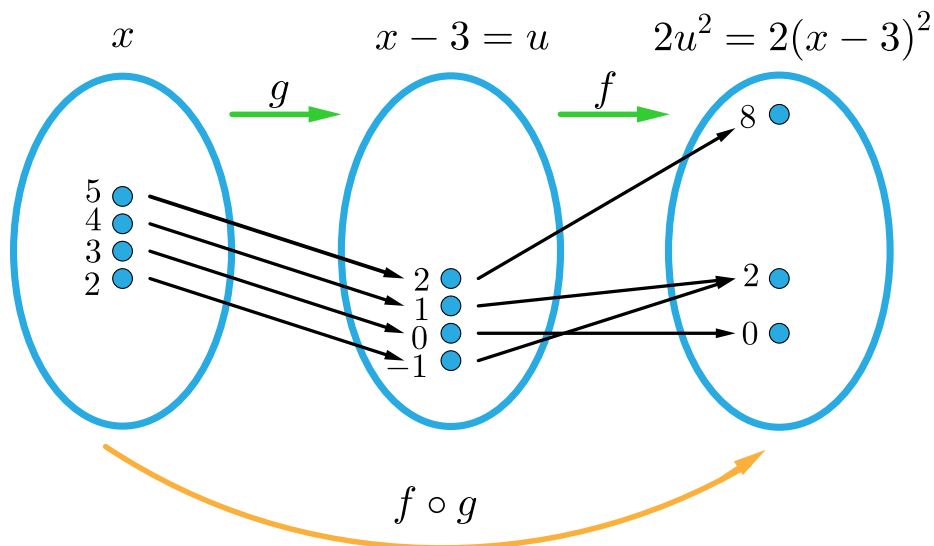
Istnieje więc złożenie $h_1(x) = f(g(x))$.

$$h_1(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = 2(x - 3)^2 \text{ dla każdego } x \in X.$$

Składanie funkcji wygodnie ilustruje się na diagramach odwzorowania.

Zilustrujmy złożenie funkcji $h_1(x) = f(g(x))$.

Pomocniczo wprowadźmy oznaczenie: $x - 3 = u$.



Przykład 2

Zbadamy, czy istnieje **złożenie funkcji** $f(x) = 2x^2$ z funkcją $g(x) = x - 3$.

Funkcja wewnętrzna: $f(x) = 2x^2$.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$ZW_f = \langle 0, +\infty \rangle$$

Funkcja zewnętrzna: $g(x) = x - 3$.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$ZW_f \subset D_g$$

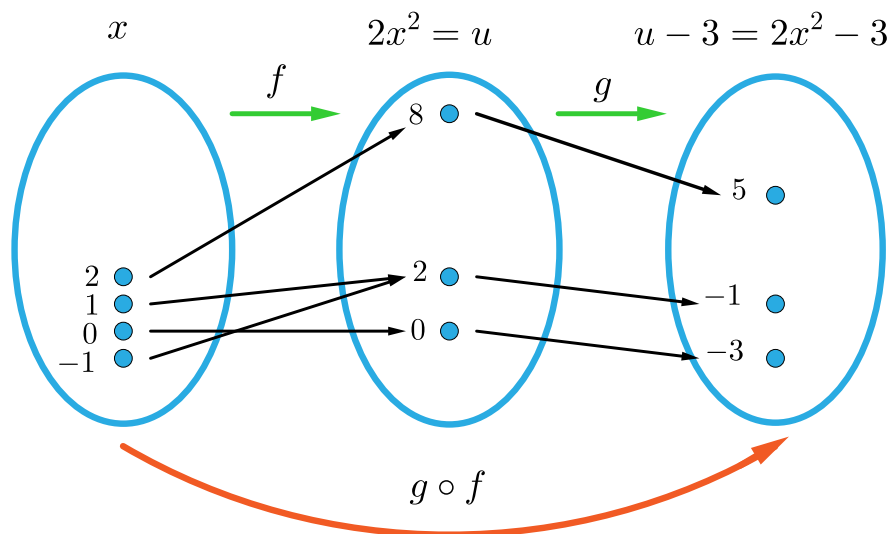
Istnieje więc złożenie $h_2(x) = g(f(x))$.

$$h_2(x) = g(f(x)) = g(2x^2) = 2x^2 - 3 \text{ dla każdego } x \in X.$$

Składanie funkcji wygodnie ilustruje się na diagramach odwzorowania.

Zilustrujmy złożenie funkcji $h_2(x) = g(f(x))$.

Pomocniczo wprowadźmy oznaczenie: $2x^2 = u$.



Przykład 3

Zbadamy, czy istnieje złożenie funkcji f z funkcją g lub złożenie funkcji g z funkcją f oraz podamy wzory odpowiedniego złożenia.

- a) $f(x) = 2^x$ oraz $g(x) = x^3 + 1$
- b) $f(x) = \log_2 x$ oraz $g(x) = -x^2 - 8$
- c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ oraz $g(x) = \log_4(-x)$

Rozwiązanie

a) $f(x) = 2^x$ oraz $g(x) = x^3 + 1$

$1^\circ h_1(x) = f(g(x))$

Funkcja wewnętrzna: $g(x) = x^3 + 1$.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$ZW_g = \mathbb{R}$$

Funkcja zewnętrzna: $f(x) = 2^x$.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$ZW_g \subset D_f$$

Istnieje więc złożenie $h_1(x) = f(g(x))$.

$$h_1(x) = f(g(x)) = f(x^3 + 1) = 2^{x^3+1} \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

$$2^\circ h_2(x) = g(f(x))$$

Funkcja wewnętrzna: $f(x) = 2^x$.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$ZW_f = \mathbb{R}_+$$

Funkcja zewnętrzna: $g(x) = x^3 + 1$.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$ZW_f \subset D_g$$

Istnieje więc złożenie $h_2(x) = g(f(x))$.

$$h_2(x) = g(f(x)) = g(2^x) = (2^x)^3 + 1 = 2^{3x} + 1 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{b)} f(x) = \log_2 x \text{ oraz } g(x) = -x^2 - 8$$

$$1^\circ h_1(x) = f(g(x))$$

Funkcja wewnętrzna: $g(x) = -x^2 - 8$.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$ZW_g = (-\infty, -8)$$

Funkcja zewnętrzna: $f(x) = \log_2 x$.

$$D_f = (0, +\infty) \text{ (z definicji funkcji logarytmicznej).}$$

$$ZW_g \not\subset D_f$$

Nie istnieje złożenie funkcji g z funkcją f , ponieważ zbiór ZW_g nie jest podzbiorem zbioru D_f .

$$2^\circ h_2(x) = g(f(x))$$

Funkcja wewnętrzna: $f(x) = \log_2 x$.

$$D_f = (0, +\infty)$$

$$f(D_f) = \mathbb{R}$$

Funkcja zewnętrzna: $g(x) = -x^2 - 8$.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$ZW_f \subset D_g$$

Istnieje więc złożenie $h_2(x) = g(f(x))$.

$$h_2(x) = g(f(x)) = g(\log_2 x) = -(\log_2 x)^2 - 8 \text{ dla każdego } x \in (0, +\infty).$$

$$\text{c) } f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \text{ oraz } g(x) = \log_4(-x)$$

$$1^\circ h_1(x) = f(g(x))$$

Funkcja wewnętrzna: $g(x) = \log_4(-x)$.

$$D_g = \mathbb{R}_- \text{ (z definicji funkcji logarytmicznej).}$$

$$ZW_g = \mathbb{R}$$

Funkcja zewnętrzna: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \text{ (z definicji pierwiastka)}$$

$$ZW_g \not\subset D_f$$

Nie istnieje złożenie funkcji g z funkcją f , ponieważ zbiór ZW_g nie jest podzbiorem zbioru D_f .

$$2^\circ h_2(x) = g(f(x))$$

Funkcja wewnętrzna: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$ZW_f = (0, +\infty)$$

Funkcja zewnętrzna: $g(x) = \log_4(-x)$.

$$D_g = \mathbb{R}_-$$

$$ZW_f \not\subset D_g$$

Nie istnieje złożenie funkcji f z funkcją g , ponieważ zbiór ZW_f nie jest podzbiorem zbioru D_g .

Przykład 4

Dane są funkcje: $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = 1 + x$. Wyrazimy za pomocą wzorów funkcje: $g \circ f$, $f \circ g$.

$$1^\circ 1^\circ (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Funkcja wewnętrzna: $g(x) = 1 + x$.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$ZW_g = \mathbb{R}$$

Funkcja zewnętrzna: $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$ZW_g \not\subset D_f$$

Nie istnieje złożenie funkcji g z funkcją f , ponieważ zbiór ZW_g nie jest podzbiorem zbioru D_f .

Zauważmy, że gdybyśmy określili funkcję $g(x) = 1 + x$ w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, to moglibyśmy złożyć funkcję g z funkcją f .

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$(f \circ g)(x) = f(1 + x) = \frac{1}{1+x} \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

$$2^\circ 2^\circ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Funkcja wewnętrzna: $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$ZW_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Funkcja zewnętrzna: $g(x) = 1 + x$.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$ZW_f \subset D_g$$

Istnieje więc złożenie $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Słownik

funkcja złożona

funkcja h odwzorowująca zbiór X w zbiór Z określona wzorem $h(x) = f(g(x))$ dla każdego $x \in X$, gdy funkcja g odwzorowuje zbiór X na zbiór Y , a f odwzorowuje zbiór Y w zbiór Z

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą przykłady funkcji złożonych, a następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DABAppFzK>

Film nawiązujący do treści materiału, prezentujący przykłady wyznaczania funkcji złożonych.

Polecenie 2

Dane są funkcje: $f(x) = \log_2 x$ oraz $g(x) = x^2 + 2$. Wyraż za pomocą wzorów funkcje: $g \circ f$, $f \circ g$.

Polecenie 3

Zbadaj, czy istnieje złożenie funkcji f z funkcją g lub złożenie funkcji g z funkcją f oraz podaj wzory odpowiedniego złożenia: $f(x) = \sqrt{x}$ oraz $g(x) = x^2$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dane są funkcje $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ oraz $g(x) = 2 - x$. Wybierz wzór funkcji złożonej $h(x) = f(g(x))$.

☐ $h(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2$

☐ $h(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$

☐ $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

☐ $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

Ćwiczenie 2



Dane są funkcje $f(x) = 1 - 4x^2$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ oraz $h(x) = 8x - 1$. Dobierz wzór funkcji do odpowiadającego mu złożenia dwóch funkcji.

$h(g(x))$

$y = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$

$f(g(x))$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 1$

$g(f(x))$

$y = -256x^2 + 64x - 3$

$f(h(x))$

$y = \frac{1}{2} \cdot 16^{x^2}$

Ćwiczenie 3



Dane są funkcje $f(x) = 1 - 4x^2$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ oraz $h(x) = 8x - 1$. Wybierz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Zbiorem wartości funkcji $h(g(x))$ jest przedział $(-1, +\infty)$.

☐ Zbiorem wartości funkcji $f(h(x))$ jest przedział $(-\infty, 1)$.

☐ Zbiorem wartości funkcji $g(f(x))$ jest przedział $\left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$.

☐ Zbiorem wartości funkcji $f(g(x))$ jest przedział $(-\infty, 1)$.

Ćwiczenie 4



Dane są funkcje: $f(x) = x^2 - 1$ oraz $g(x) = \sqrt{x + 2}$. Przeciągnij odpowiednie liczby całkowite w wyznaczone miejsca.

1. $f(D_f) = \langle \boxed{}, +\infty \rangle$ oraz $D_g = \langle \boxed{}, +\infty \rangle$, więc istnieje złożenie $g(f(x))$.

2. Złożenie $g(f(x))$ można opisać wzorem $y = (x^2 + \boxed{})^{\frac{1}{2}}$.

3. $g(D_g) = \langle \boxed{}, +\infty \rangle$ oraz $D_f = \mathbb{R}$, więc istnieje złożenie $f(g(x))$.

4. Złożenie $f(g(x))$ można opisać wzorem $y = x + \boxed{}$ dla $x \in D_g$.

1

2

0

$\frac{1}{2}$

1

$-\frac{1}{2}$

-2

-1

Ćwiczenie 5



Dane są funkcje $f(x) = \log_3 x$ oraz $g(x) = \frac{1}{3}x + 9$. Zaznacz zdanie prawdziwe.

- ☐ Nie istnieje złożenie $g(f(x))$.
- ☐ Złożenie $g(f(x))$ można wyrazić wzorem $y = 9 + \log_3 \sqrt[3]{x}$ dla każdego $x \in (0, +\infty)$.
- ☐ Złożenie $g(f(x))$ można wyrazić wzorem $y = \frac{1}{3} + \log_3(x + 9)$ dla każdego $x \in (0, +\infty)$.
- ☐ Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje złożenie $f(g(x))$.

Ćwiczenie 6



Dane są funkcje $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ oraz $g(x) = \log_3 x$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje złożenie $g(f(x))$	☐	☐
Nie istnieje złożenie $f(g(x))$	☐	☐
Złożenie $g(f(x))$ można wyrazić wzorem $y = -x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$	☐	☐

Ćwiczenie 7



Dane są funkcje $g(x) = -2x^2 - 8$ oraz $f(x) = -\frac{2}{x}$. Wybierz wzór funkcji złożonej $h(x) = f(g(x))$.

☐ $h(x) = -\frac{1}{x^2+4}$

☐ $h(x) = \frac{8}{x^2} - 8$

☐ $h(x) = \frac{1}{x^2+4}$

☐ $h(x) = -\frac{8}{x^2} - 8$

Ćwiczenie 8



Dane są funkcje $f(x) = \log_{0,5}(x + 2)$ oraz $g(x) = 4x^2 - 1$. Zaznacz zdania prawdziwe.

☐ Złożenie $g(f(x))$ można wyrazić wzorem $y = 4[\log_{0,5}(x + 1)] \cdot [\log_{0,5}(x + 3)]$.

☐ Złożenie $f(g(x))$ można wyrazić wzorem $y = \log_{0,5}(x^2 + 0,25) - 2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

☐ Prawdą jest, że $g(D_g) \subset D_f$.

☐ Prawdą jest, że $f(D_f) \subset D_g$.

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przykłady funkcji złożonych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
- 2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
- 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;

Zakres rozszerzony 2) posługuje się złożeniami funkcji;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje funkcje złożoną;
- określa, czy istnieje złożenie funkcji f z funkcją g ;
- znajduje wzory określające odpowiednie złożenia;
- rozpoznaje funkcje wewnętrzne i zewnętrzne na podstawie wzorów funkcji złożonych;
- rozwiązuje zadania, posługując się definicją funkcji złożonej;
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny;
- burza mózgów;
- pokaz multimedialny;
- rozwiązywanie zadań pod kontrolą nauczyciela.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu;
- projektor multimedialny;
- e-podręcznik;
- arkusze papieru, pisaki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- uczniowie przypominają określenie funkcji;
- nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

- uczniowie analizują przykłady zawarte w sekcji Przeczytaj tematu „Przykłady funkcji złożonych”;
- uczniowie oglądają animację „Przykłady funkcji złożonych” i omawiają ją wraz z nauczycielem, następnie samodzielnie rozwiązują zadania pod animacją;
- nauczyciel kontroluje pracę uczniów, udzielając im wskazówek;
- uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

- wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela;
- uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień;

- nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

- zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą przeanalizować treść animacji jako pracę własną przed lekcją.