



Pole wielokąta

Materiał składa się z sekcji: "Wielokąty wypukłe i wklęsłe", "Obliczanie pól wielokątów", "Pole sześciokąta foremnego", "Pole deltoidu", "Twierdzenie Picka".

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), film, ćwiczenia, w tym ćwiczenia interaktywne.

Zawartość tekstowa: określenie wielokąta wklęsłego oraz wielokąta wypukłego, trapezoidu.

Przykłady: - obliczanie pól wielokątów, metodą podziału na prostsze wielokąty, umieszczonych w układzie współrzędnych.

Pole sześciokąta foremnego, wzór i zastosowanie.

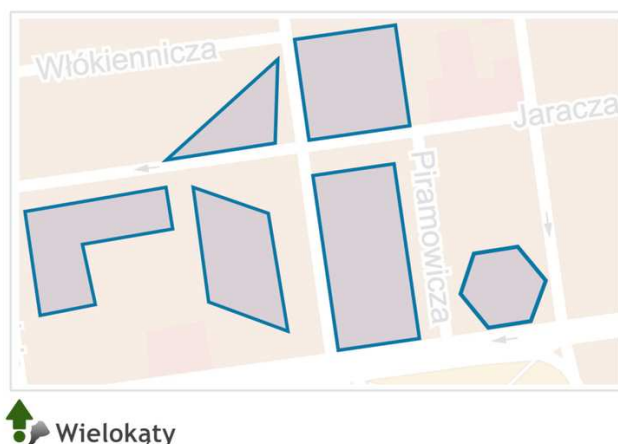
Wzór na pole deltoidu i jego zastosowanie.

Twierdzenie Picka

Ćwiczenia - obliczanie pól wielokątów, również w sytuacjach praktycznych

Pole wielokąta

W tym materiale poznasz definicje wielokątów wypukłych i wklęsłych. Dowiesz się jak obliczać pola różnych wielokątów, w tym także wielokątów foremnych. Rozwiążesz zadania dotyczące tych zagadnień.



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/RHk6Oyen3s9OF](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje różne rodzaje wielokątów na przykładzie planu miasta.

Wielokąty wypukłe i wklęsłe

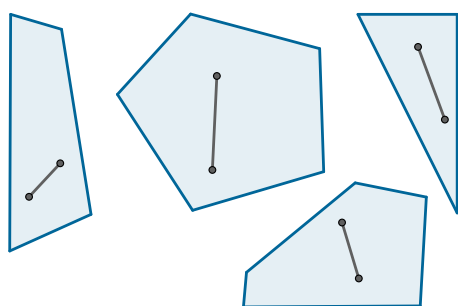
Twierdzenie: Wielokąt wklęsły

Wielokąt jest **wklęsły**, jeżeli co najmniej jeden z jego kątów ma miarę większą od 180° . Wielokąt, który nie jest wklęsły, to **wielokąt wypukły**.

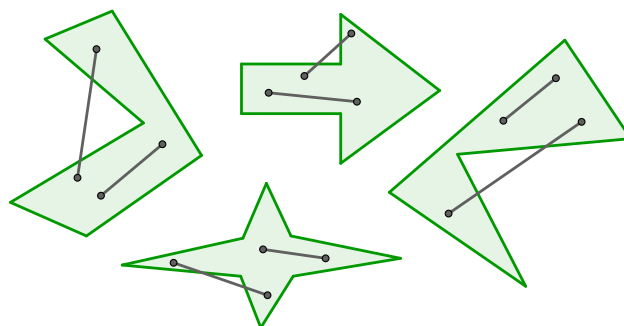
Przykład 1

Rysunek A przedstawia kilka wielokątów wypukłych, a rysunek B kilka wielokątów wklęsłych. Możemy zauważyć, że na rysunku A odcinki łączące wybrane punkty w wielokącie są w nim zawarte, a na rysunku B istnieją odcinki łączące punkty w wielokącie, które częściowo leżą poza tym wielokątem.

Rysunek A



Rysunek B



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

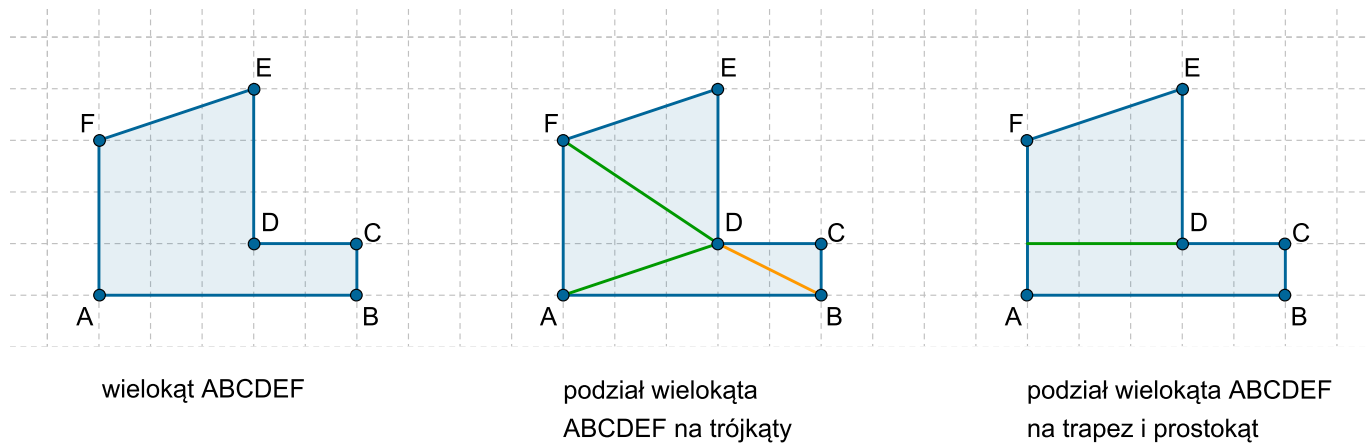
Definicja: Wielokąt wypukły

Jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty w wielokącie jest całkowicie w nim zawarty, to taki wielokąt nazywamy wypukłym.

Trapezoid to czworokąt, w którym nie ma żadnej pary boków równoległych. Czworokąty wypukłe to trapezy albo trapezoidy.

Obliczanie pól wielokątów

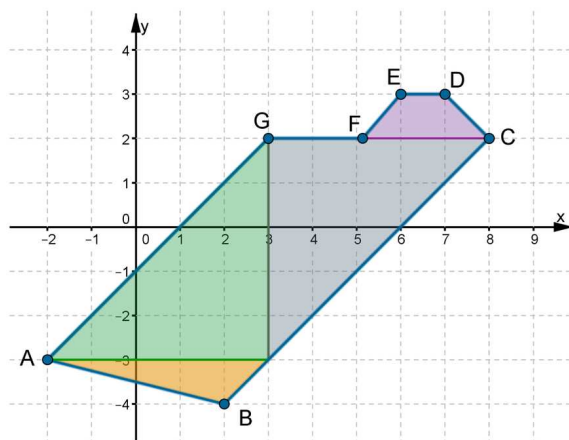
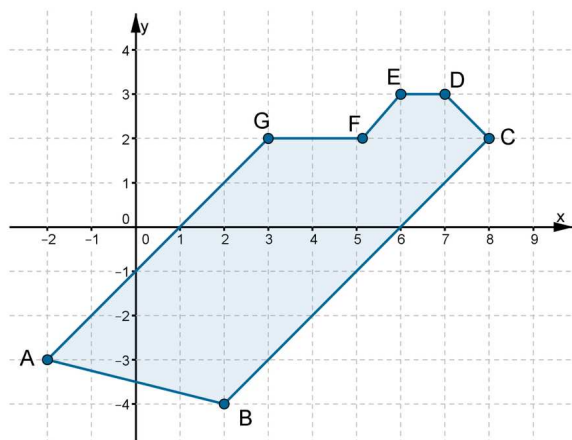
Wiemy już, że każdy wielokąt, zarówno wypukły, jak i wklęsły, można podzielić na skończoną liczbę trójkątów. Pole wielokąta jest równe sumie pól trójkątów. Jednak nie zawsze łatwe jest wyznaczenie tych pól. W praktyce dzielimy więc wielokąt na takie figury, których pola łatwo wyznaczyć, przy tym staramy się, aby tych figur było jak najmniej.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

Pokażemy, w jaki sposób obliczyć pole wielokąta $ABCDEF$, gdzie $A = (-2, -3)$, $B = (2, -4)$, $C = (8, 2)$, $D = (7, 3)$, $E = (6, 3)$, $F = (5, 2)$, $G = (3, 2)$?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznaczamy wielokąt $ABCDEF$ w układzie współrzędnych. Następnie dzielimy go na trapez oraz trójkąty i obliczamy pola tych figur.

Pole sześciokąta foremnego

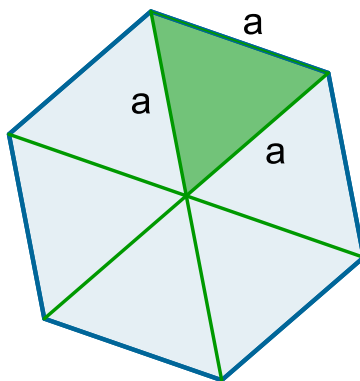
Twierdzenie: Pole sześciokąta foremnego

Pole sześciokąta foremnego o boku długości a jest równe

$$P = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Dowód

Sześciokąt foremny, którego bok ma długość a , można podzielić na 6 przystających trójkątów równobocznych. Długość boku takiego trójkąta jest równa a , zatem jego pole to $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole sześciokąta foremnego jest sześciokrotnie większe od pola trójkąta, zatem

$$P = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Przykład 3

Obliczmy obwód sześciokąta foremnego o polu $24\sqrt{3} \text{ dm}^2$.

Obliczamy długość boku a sześciokąta.

$$\frac{3}{2}\sqrt{3}a^2 = 24\sqrt{3} / : \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$a^2 = \frac{48}{3}$$

$$a^2 = 16$$

$$a = 4,$$

bo $a > 0$.

Obliczamy obwód sześciokąta.

$$L = 6a = 6 \cdot 4$$

$$L = 24 \text{ dm}$$

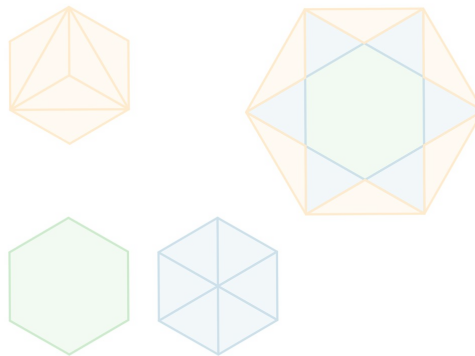
Obwód sześciokąta jest równy 24 dm.

Przykład 4

Obliczmy długość krótszej przekątnej sześciokąta foremnego $ABCDEF$ o boku długości a .

Przesuń suwaki i obserwuj powstawanie trzech wielokątów.

Co zauważasz?



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P3AYv4qJ>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Sześciokąt $ABCDEF$ można podzielić na trzy przystające sześciokąty foremne.

Obliczamy długość b boku każdego z mniejszych sześciokątów.

$$3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 / : \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$3b^2 = a^2$$

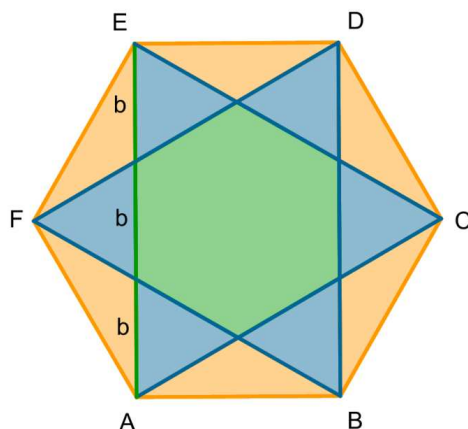
$$b^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$b = \sqrt{\frac{a^2}{3}}$$

$$b = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

bo $a > 0$ i $b > 0$

Krótsza przekątna sześciokąta AE jest 3 razy dłuższa od b .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$|AE| = 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{3}.$$

Krótsza przekątna sześciokąta foremnego o boku długości a jest równa $a\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 1



Oblicz długość krótszej przekątnej sześciokąta foremnego o boku długości a . Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa. Uzupełnij poniższe zdanie odpowiednim wyrażeniem. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz odpowiednie wyrażenie.

Długość krótszej przekątnej wynosi:

- $a\sqrt{5}$
- $a\sqrt{3}$
- $a\sqrt{4}$
- $a\sqrt{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

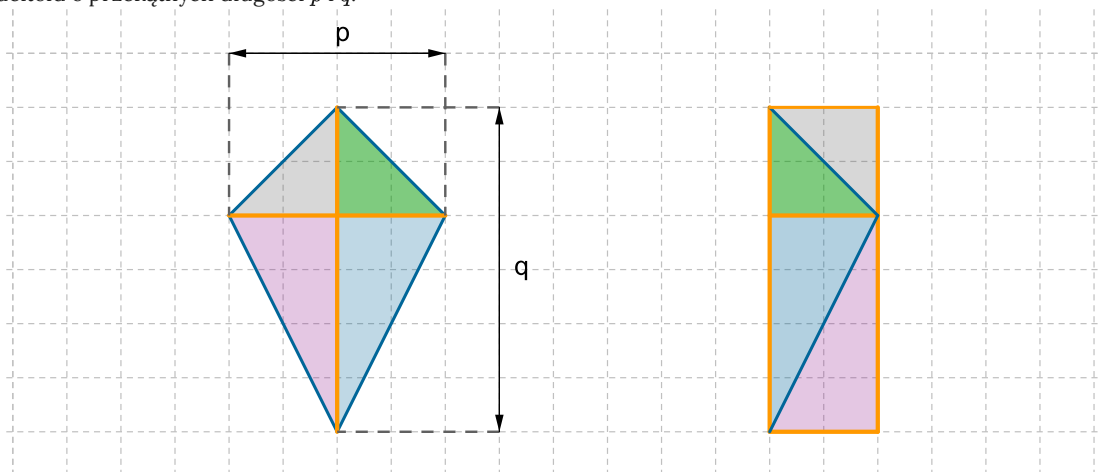
Pole deltoidu

Deltoid jest czworokątem, którego przekątne są prostopadłe i jedna z nich jest zawarta w osi symetrii deltoidu.

Przykład 5

Wykażemy, że pole deltoidu można obliczyć podobnie jak pole rombu.

Rozważmy deltoid o przekątnych długości p i q .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że deltoid można przekształcić w prostokąt o bokach długości $\frac{p}{2}$ i q .

Pole tego prostokąta, jak również pole deltoidu, jest równe $q \cdot \frac{p}{2}$.

Ważne!

Pole deltoidu o przekątnych długości p i q jest równe

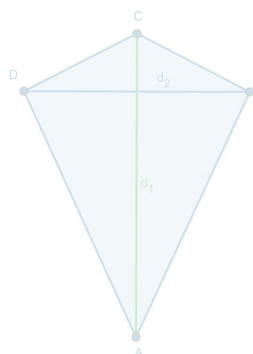
$$P = \frac{p \cdot q}{2}.$$

Pole deltoidu - I sposób
etap 1 z 4

Deltoid to czworokąt, w którym jedna z przekątnych jest jego osią symetrii. Zmieniaj położenie wierzchołków A, B i C, aby zmienić kształt i wielkość deltoidu.

Przekątne d_1 i d_2 deltoidu są do siebie prostopadłe.

W kolejnych etapach wyznaczmy pole deltoidu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P3AYyv4qJ>

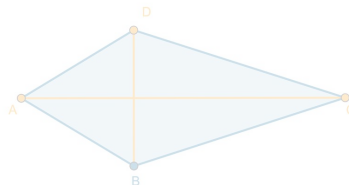
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole deltoidu - II sposób
etap 1 z 5



Deltoid jest czworokątem, w którym jedna z przekątnych jest jego osią symetrii. Zmieniaj położenie wierzchołków A, C i D, aby zmienić kształt i wielkość deltoidu.

W kolejnych etapach wyznaczmy pole deltoidu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P3AYyv4qJ>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



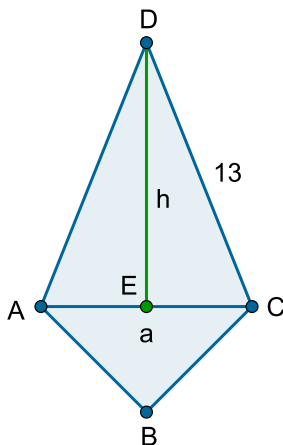
Oblicz pole deltoidu o przekątnych długości 0,4 m i 5 m. Uzupełnij poniższe zdanie odpowiednią liczbą. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz odpowiednią liczbę.

Pole deltoidu wynosi m².

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 6

Krótsza przekątna dzieli deltoid na trójkąt równoboczny o polu $25\sqrt{3}$ i trójkąt równoramienny o ramieniu długości 13. Obliczmy pole deltoidu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy wierzchołki deltoidu A, B, C, D . Trójkąt ABC jest równoboczny i jego pole jest równe $25\sqrt{3}$.

Obliczamy długość boku tego trójkąta.

$$\frac{\sqrt{3}}{4} |AC|^2 = 25\sqrt{3}$$

$$|AC|^2 = 100$$

$$|AC| = 10.$$

Stąd

$$|EC| = \frac{|AC|}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Z trójkąta prostokątnego DEC , korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy długość boku DE .

$$|DE|^2 + |EC|^2 = |DC|^2$$

$$|DE|^2 + 5^2 = 13^2$$

$$|DE|^2 = 169 - 25$$

$$|DE|^2 = 144$$

$$|DE| = 12.$$

Obliczamy pole deltoidu jako sumę pól trójkątów ABC i ACD .

$$P = P_{ABC} + P_{ACD}$$

$$P = 25\sqrt{3} + \frac{1}{2}|AC| \cdot |DE|$$

$$P = 25\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12$$

$$P = 25\sqrt{3} + 60.$$

Pole deltoidu jest równe $25\sqrt{3} + 60$.

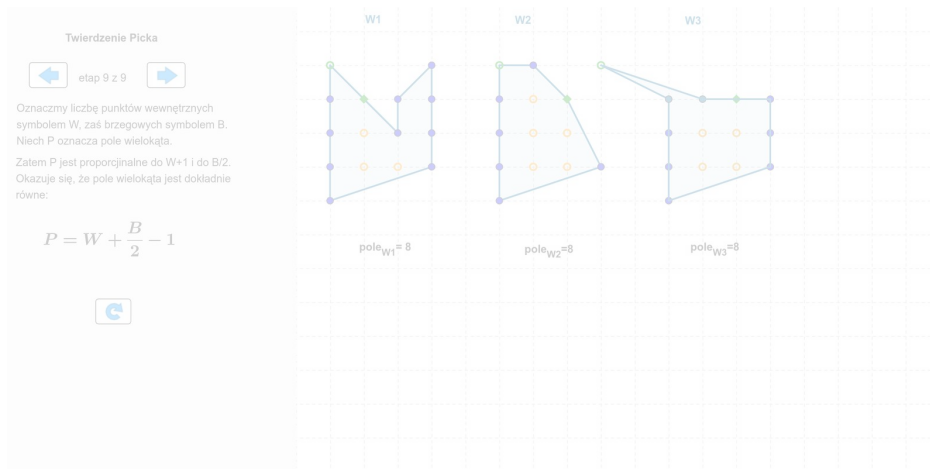
Twierdzenie Picka

Matematyk Aleksander George Pick (1859 – 1943), pracujący na uniwersytetach w Wiedniu, Pradze i Dreźnie, odkrył metodę, która pozwala na obliczenie pola wielokąta, którego wierzchołki są punktami kratowymi (czyli leżą na przecięciu linii tworzących kratki) bez wykorzystania znanych nam wzorów i bez podziału wielokąta na trójkąty (lub inne wielokąty).

Zauważył on, że pole takich wielokątów zależy tylko od liczby punktów kratowych, które leżą wewnątrz i na brzegu wielokąta.

Polecenie 1

Na rysunku przedstawione są trzy wielokąty, których pola są równe. Punkty kratowe leżące na brzegach wielokątów zaznaczone są kolorem niebieskim, a we wnętrzu – żółtym. Zmieniaj położenie wierzchołków wielokątów. Obliczaj w każdym przypadku pole wielokąta i porównuj otrzymany przez Ciebie wynik z wynikiem zapisanym na ekranie.



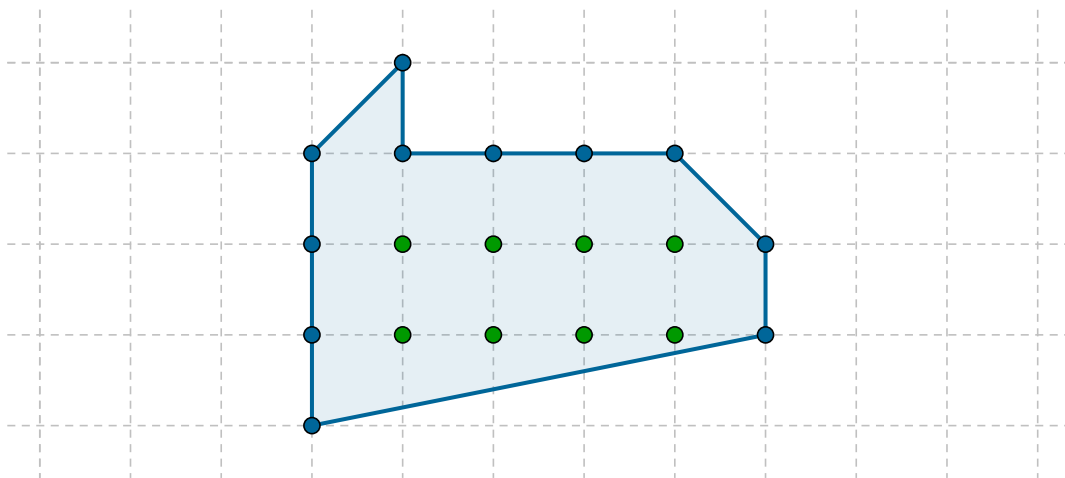
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P3AYv4qJ>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Wyznacz pole wielokąta, korzystając ze wzoru Picka.



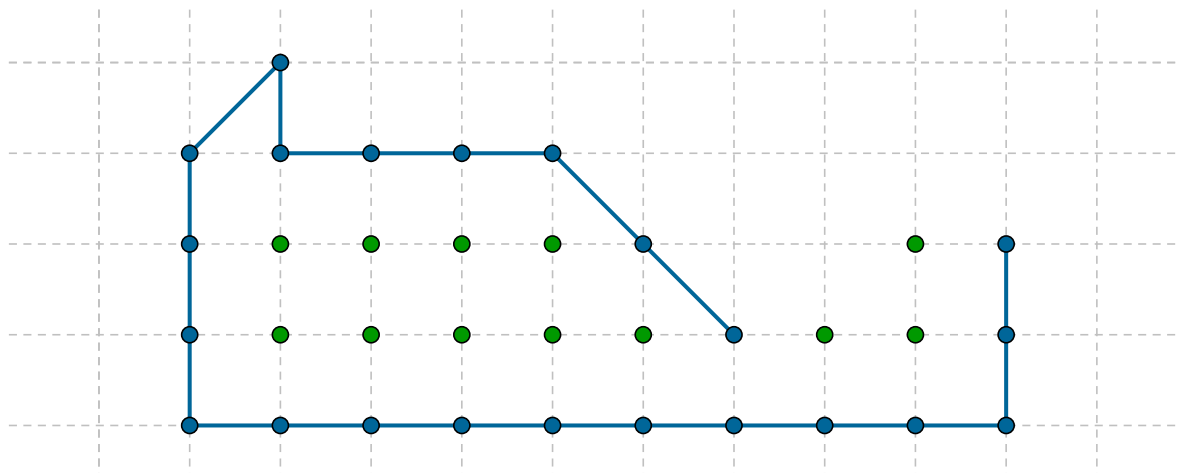
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

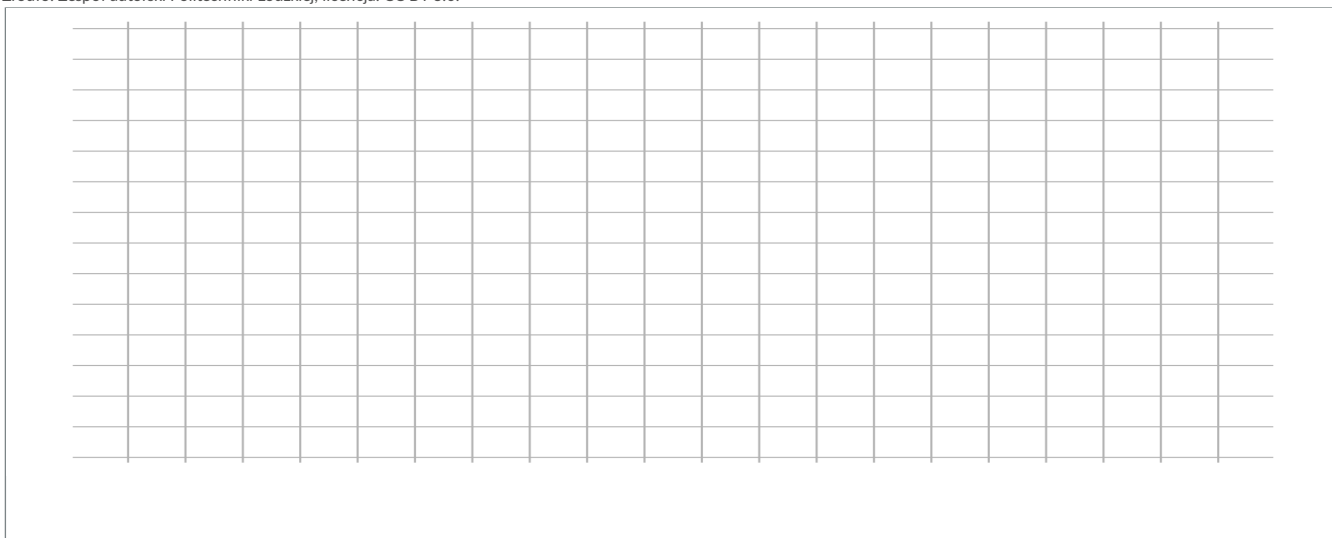
Ćwiczenie 4



Bronek nie dokończył rysunku wielokąta W . Dokończ rysunek, wiedząc, że pole wielokąta jest równe $21,5$, a każdy z brakujących wierzchołków leży w jednym z punktów zaznaczonych na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednie słowo.

Jeśli wielokąt ma wszystkie boki równej długości oraz wszystkie kąty równe, to jest to wielokąt .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Istnieje wielokąt, który nie ma przekątnych.
- ☐ Wielokąt wklęsły nie ma przekątnych.
- ☐ Pięciokąt foremny może mieć pole równe polu sześciokąta foremnego.
- ☐ Z każdych czterech odcinków można zbudować czworokąt.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Jeżeli czworokąt jest wklęsły, to jedna jego przekątna leży wewnątrz tego czworokąta, a druga leży poza czworokątem.

☐ Romb jest czworokątem foremnym.

☐ Jeżeli czworokąt jest wypukły, to obie jego przekątne leżą wewnątrz tego czworokąta.

☐ Niektóre deltoidy są prostokątami.

☐ Każdy prostokąt jest rombem.

☐ Każdy bok wielokąta musi mieć długość mniejszą niż suma długości boków pozostałych.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Udowodnij, że jeśli przekątne czworokąta są prostopadłe, to niezależnie od jego kształtu pole czworokąta jest równe połowie iloczynu długości przekątnych.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Uporządkuj rosnąco liczby P_1 , P_2 , P_3 , gdzie P_1 jest polem sześciokąta, którego bok ma długość 0,5. P_2 jest polem rombu, którego przekątna ma długość 1, a bok ma długość 2. Natomiast P_3 jest polem deltoidu o przekątnych długości $\sqrt{3}$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Oszacuj, ile m^2 szkła potrzeba na wykonanie dwóch witraży, z których jeden ma kształt sześciokąta foremnego o boku długości 0,5 m, a drugi deltoidu o przekątnych długości $2\sqrt{3}$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Odcinki długości 6 cm oraz 8 cm są przekątnymi deltoidu. Ile takich deltoidów możesz narysować? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 2

☐ Nieskończenie wiele

☐ 4

☐ 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Odcinki długości 6 cm oraz 8 cm są przekątnymi rombu. Ile takich rombów możesz narysować? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 4

☐ 3

☐ 1

☐ 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Uzupełnij odpowiedzi na poniższe pytania, wpisując w luki odpowiednie liczby.

- Wielokąt foremny o 4 bokach podzielono na trójkąty przekątnymi poprowadzonymi z jednego wierzchołka. Ile jest tych trójkątów?

Odpowiedź: Liczba tych trójkątów to .

- Wielokąt foremny o 5 bokach podzielono na trójkąty przekątnymi poprowadzonymi z jednego wierzchołka. Ile jest tych trójkątów?

Odpowiedź: Liczba tych trójkątów to .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Wielokąt foremny o n bokach podzielono na trójkąty, przekątnymi poprowadzonymi z jednego wierzchołka. Połącz pytania z poprawnymi odpowiedziami.

Ile wynosi miara kąta w tym wielokącie?

$$\frac{180^\circ (n-2)}{n}$$

Ile jest tych trójkątów?

$$n - 2$$

Ile wynosi suma miar wszystkich kątów tych trójkątów?

$$180^\circ (n - 2)$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Punkt O jest punktem wewnętrznym ośmiokąta foremnego. Leży on w odległości 10 od każdego z wierzchołków. Oblicz pole ośmiokąta.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Każdy z boków trójkąta równobocznego podzielono na trzy równe części. Połączono punkty podziału i otrzymano sześciokąt foremny. Oblicz pole tego sześciokąta, jeżeli bok trójkąta ma długość a .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Bok kwadratu ma długość a . Każdy z boków tego kwadratu podzielono na trzy równe części. Połączono punkty podziału i otrzymano ośmiokąt. Oblicz pole tego ośmiokąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.
