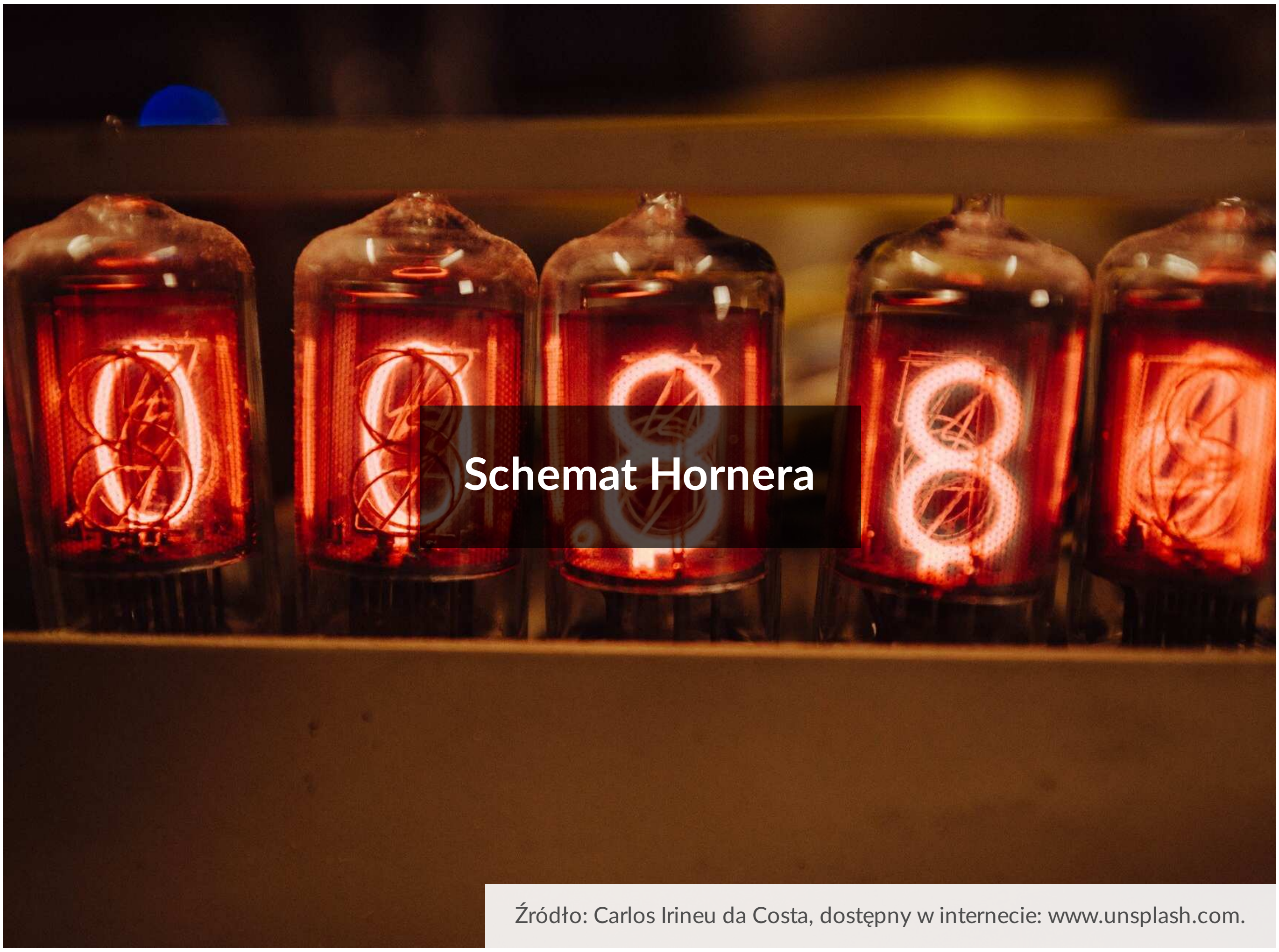
Schemat Hornera



Źródło: Carlos Irineu da Costa, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wielomian przez wielomian możemy dzielić sposobem sposobem pisemnym – za pomocą algorytmu przypominającego metodę pisemnego dzielenia liczb naturalnych. W wyniku takiego dzielenia możemy otrzymać iloraz i resztę, przy czym reszta jest zawsze wielomianem stopnia mniejszego, niż stopień wielomianu, przez który dzielimy, bądź też jest wielomianem zerowym.

Korzystając z twierdzenie o reszcie umiemy szybko wyznaczać resztę z dzielenia przez wielomiany postaci $(x - a)$.

Dzielenie przez wielomiany tej postaci okaże się szczególnie ważne przy szukaniu pierwiastków wielomianów. Dlatego warto poznać metodę umożliwiające sprawne dzielenie dowolnego wielomianu przez wielomian postaci $(x - a)$.

Ciekawostka

William George Horner był brytyjskim matematykiem żyjącym w latach 1786 - 1837.
W 1819 roku opisał metodę (znaną już wcześniej np. Newtonowi), na której bazuje szybki szkolny sposób dzielenia wielomianu przez dwumian $(x - a)$.

Twoje cele

- Poznasz algorytm zwany schematem Hornera, pozwalający na szybkie i wygodne obliczanie ilorazu wielomianu $W(x)$ przez dwumian postaci $(x - a)$.
- Porównasz trzy metody obliczania tego ilorazu i ocenisz, którą najlepiej zastosować w konkretnych przykładach.
- Udowodnisz algorytm schematu Hornera

Przeczytaj

Prezentacja pokazuje na przykładzie, jak podzielić wielomian $W(x)$ przez dwumian postaci $(x-a)$ za pomocą tzw. schematu Hornera.

Wiemy już jak stosować schemat Hornera. Prześledźmy dowód tego algorytmu dla wielomianu czwartego stopnia.

Podzielimy wielomian

$$W(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

przez dwumian $(x-c)$. Wiadomo, że wynikiem takiego dzielenia jest wielomian stopnia trzeciego

$$Q(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$$

oraz reszta r. Mamy więc, że

$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=\big(b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\big)(x-c)+r=$$

$$=b_3x^4+b_2x^3+b_1x^2+b_0x-cb_3x^3-cb_2x^2-cb_1x-cb_0+r=$$

$$=b_3x^4+(b_2-cb_3)x^3+(b_1-cb_2)x^2+(b_0-cb_1)x+r-cb_0.$$

Z twierdzenia o równości wielomianów otrzymujemy układ pięciu równań z pięcioma niewiadomymi

$$\begin{cases} a_4=b_3 \\ a_3=b_2-cb_3 \\ a_2=b_1-cb_2. \\ a_1=b_0-cb_1 \\ a_0=r-cb_0 \end{cases}$$

Chcemy wyznaczyć współczynniki b_3, b_2, b_1, b_0 oraz resztę r . Dlatego przekształcamy powyższy układ

$$\begin{cases} b_3 = a_4 \\ b_2 = a_3 + cb_3 \\ b_1 = a_2 + cb_2. \\ b_0 = a_1 + cb_1 \\ r = a_0 + cb_0 \end{cases}$$

Tym samym od razu możemy wskazać wartość b_3. Zauważmy, że w kolejnych wierszach pojawia się suma znanych nam współczynników a_n i niewiadomej wyliczona w poprzednim wierszu pomnożonej przez c . Na tej obserwacji bazuje algorytm działania w schemacie Hornera.

> **Przykład 1**
>
> Wykonajmy dzielenie wielomianu $3x^4 - 17x^3 + 5x^2 + 26x - 5$ przez $(x - 5)$ za pomocą schematu Hornera.

> **Przykład 2**
>
> Wykonajmy dzielenie wielomianu $3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9x - 3$ przez $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ za pomocą schematu Hornera.

> **Przykład 3**
>
> Wiadomo, że wielomian $W(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24$ jest podzielny przez dwumiany $(x + 3)$ oraz $(x - 2)$. Zapiszmy wielomian $W(x)$ w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych.
>
> - Użyjmy dwukrotnie schematu Hornera obliczając iloraz wielomianu $W(x)$ przez $(x + 3)$, a następnie iloraz uzyskanego wyniku przez $(x - 2)$.

	1	4	−7	−22	24
−3	1	1	−10	8	0
2	1	3	−4	0	−

$$x^4+4x^3-7x^2-22x+24=$$
$$=\left(x^2+3x-4\right)\left(x+3\right)\left(x-2\right)$$

- Wielomian drugiego stopnia x^2+3x-4 możemy sprowadzić do postaci iloczynowej posługując się wiadomościami z zakresu funkcji kwadratowej: $\Delta=25$, $x_1=-4$, $x_2=1$, więc $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$.

- Zatem $W(x)=(x-2)(x-1)(x+3)(x+4)$.

Przykład 4

Wielomian $W(x)=6x^4+36x^3+55x^2+6x+9$ jest podzielny przez wielomian $P(x)=x^2+6x+9$. Zapiszmy wielomian $W(x)$ w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych.

- Zauważmy, że $P(x)=(x+3)^2$. Możemy więc zastosować dwukrotne dzielenie schematem Hornera przez dwumian $(x+3)$.

	6	36	55	6	9
−3	6	18	1	3	0
−3	6	0	1	0	−

$$6x^4+36x^3+55x^2+6x+9=(x+3)^2\left(6x^2+1\right)$$

- Uzyskany wielomian jest nierozkładalny.

- Zatem $W(x) = (x+3)^2 \left(6x^2+1\right)$.

Słownik

dzielenie wielomianów z resztą

dla każdego wielomianu $W(x)$ i niezerowego wielomianu $P(x)$ istnieją wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$ takie, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, przy czym wielomian $R(x)$ nazywany **resztą z dzielenia** jest stopnia mniejszego niż stopień wielomianu $P(x)$ lub jest wielomianem zerowym

podzielność wielomianów

wielomian $W(x)$ jest **podzielny** przez niezerowy wielomian $P(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x)$

wielomian nierozkładalny

wielomian stopnia dodatniego, którego nie można przedstawić w postaci iloczynu co najmniej dwóch wielomianów stopnia dodatniego

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, w której zaprezentowane są trzy metody dzielenia wielomianu przez dwumian postaci $(x - a)$. Zwróć szczególną uwagę na dzielenie z pomocą schematu Hornera. Jeśli opanowałeś już algorytm dzielenia pisemnego, możesz pominąć pierwszą część animacji. Opis dzielenia schematem Hornera zaczyna się w minucie 3:23.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1ESmfiF6

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej dzielenia wielomianów przez dwumian.

Polecenie 2

Porównaj zapis dzielenia schematem Hornera w powyższej animacji z zapisem zaprezentowanym w prezentacji i przykładach na początku lekcji.

Wybierz ten sposób zapisu, który jest dla Ciebie wygodniejszy. Następnie oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian postaci $P(x)$ w następujących przykładach:

a. $W(x) = x^5 + 2x^4 - 15x^3 + x^2 + 7x + 10$, $P(x) = x + 5$;

b. $W(x) = 2x^4 + 7x^3 - 14x^2 - x - 2$, $P(x) = x - \frac{1}{2}$;

c. $W(x) = 2x^3 + 5\sqrt{2}x^2 + \left(6 - \sqrt{6}\right)x + \left(1 - 2\sqrt{3}\right)$, $P(x) = x + \sqrt{2}$.

Polecenie 3

Rozważmy wielomian $W(x) = 100x^{100} + 99x^{99} + 98x^{98} + \cdots + 3x^3 + 2x^2 + x$. W wyniku dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 1$ otrzymujemy wielomian $Q(x) = b_{99}x^{99} + \cdots + b_1x + b_0$ oraz resztę r. Oblicz współczynnik b_0.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Schemat Hornera

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- Zna algorytm zwany schematem Hornera, pozwalający na szybkie i wygodne obliczanie ilorazu wielomianu $W(x)$ przez dwumian postaci $(x - a)$.
- Porównuje trzy metody obliczania tego ilorazu i ocenia, którą najlepiej zastosować w konkretnych przykładach.
- Dowodzi algorytmu schematu Hornera

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- metoda tekstu przewodniego;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają znane im metody obliczania ilorazu wielomianów.
2. Nauczyciel przedstawia temat lekcji „Schemat Hornera”, a następnie wraz z uczniami określa kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się z metodami dzielenia wielomianów przedstawionymi w animacji, następnie opisują je na forum klasy.
3. Uczniowie w swoich grupach rozwiązują ćwiczenia w sekcji „Sprawdź się” (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Schemat Hornera”).

Materiały pomocnicze

- Pierwiastki równań

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać animację do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące schematu Hornera.