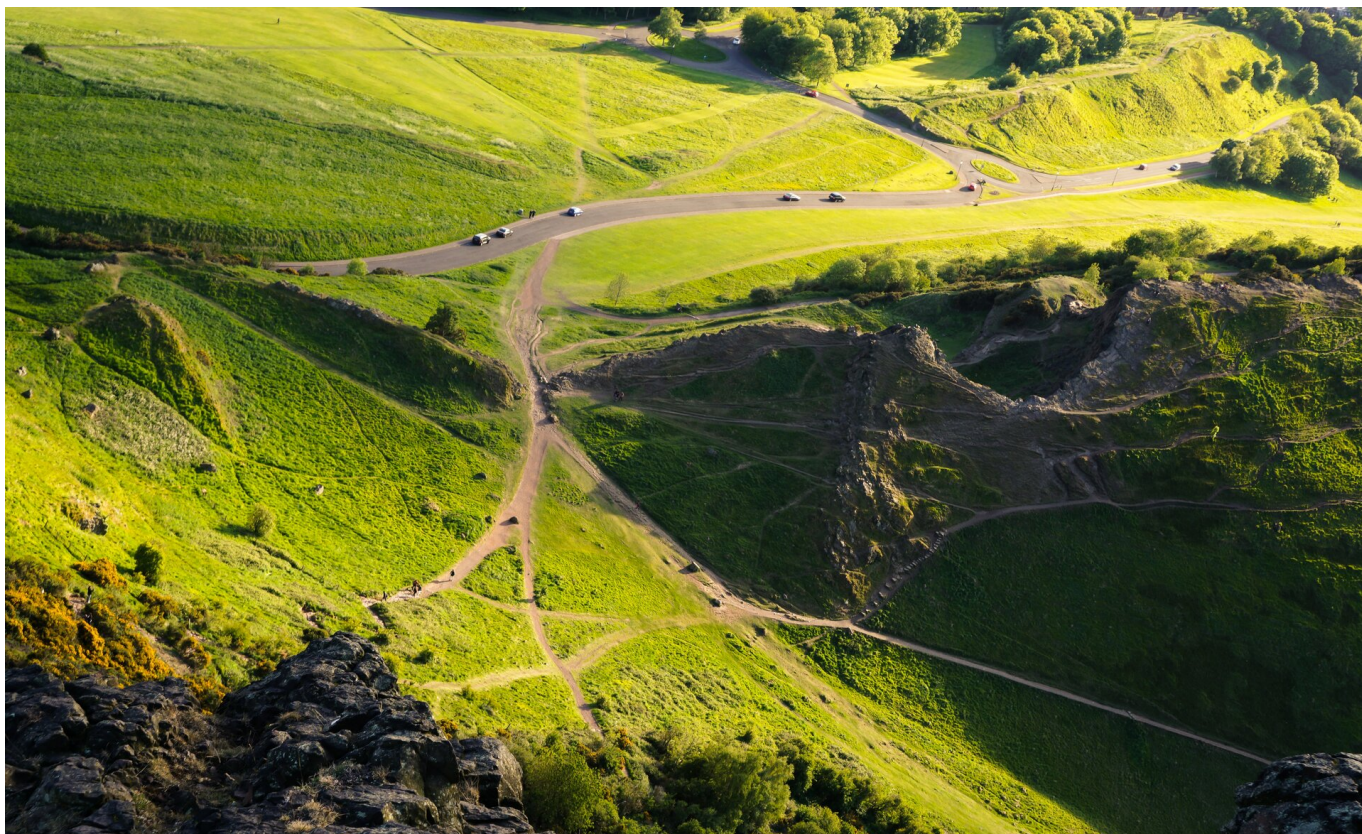




Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji

Źródło: Robert v Ruggiero, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Definicja Heinego funkcji w punkcie wykorzystuje pojęcie granicy ciągu, możemy zatem twierdzenia o arytmetyce granic ciągów przełożyć na ich odpowiedniki dla granicy funkcji. Temat ten poświęcimy omówieniu twierdzeń o arytmetyce granic funkcji oraz ich zastosowaniu w obliczaniu granic funkcji w punkcie.

Twoje cele

- Poznasz twierdzenia o sumie, różnicy, iloczynie oraz ilorazie granic funkcji w punkcie.
- Obliczysz granice pewnych typów funkcji korzystając z poznanych twierdzeń o arytmetyce granic funkcji.
- Dowiesz się co to jest symbol nieoznaczony.

Przeczytaj

Z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów zbieżnych oraz definicji Heinego granicy funkcji w punkcie wynikają następujące twierdzenia o arytmetyce granic funkcji w punkcie.

Twierdzenie: Granica sumy funkcji

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ będą dwiema danymi funkcjami o tej samej dziedzinie $D \subset \mathbb{R}$ oraz niech $x_0, a, b \in \mathbb{R}$. Jeśli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b,$$

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = a + b.$$

Twierdzenie: Granica różnicy funkcji

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ będą dwiema danymi funkcjami o tej samej dziedzinie $D \subset \mathbb{R}$ oraz niech $x_0, a, b \in \mathbb{R}$. Jeśli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b,$$

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = a - b.$$

Twierdzenie: Granica iloczynu funkcji

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ będą dwiema danymi funkcjami o tej samej dziedzinie $D \subset \mathbb{R}$ oraz niech $x_0, a, b \in \mathbb{R}$. Jeśli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b,$$

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b.$$

Twierdzenie: Granica ilorazu funkcji

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ będą dwiema danymi funkcjami o tej samej dziedzinie $D \subset \mathbb{R}$ oraz niech $x_0, a, b \in \mathbb{R}$. Jeśli $g(x) \neq 0$ dla $x \in D$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \neq 0,$$

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Spójrzmy na przykład ilustrujący powyższe twierdzenie.

Przykład 1

Obliczmy poniższe granice

1. $\lim_{x \rightarrow 1} [3^{2-x} + \log_2(x + 3)]$
2. $\lim_{x \rightarrow -2} [x^2 + \sin(\pi x)]$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 + 4) \cdot \cos(x - \pi)]$
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x^2 + 6x}{3x + 1}$

Ad. 1. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 1} 3^{2-x} = 3^{2-1} = 3$ oraz $\lim_{x \rightarrow 1} \log_2(x + 3) = \log_2(1 + 3) = \log_2 4 = 2$ więc

$$\lim_{x \rightarrow 1} [3^{2-x} + \log_2(x + 3)] = 3 + 2 = 5.$$

Ad. 2. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = (-2)^2 = 4$ oraz $\lim_{x \rightarrow -2} \sin(\pi x) = \sin(-2\pi) = 0$ więc

$$\lim_{x \rightarrow -2} [x^2 + \sin(\pi x)] = 4 + 0 = 4.$$

Ad. 3. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 4) = 4$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x - \pi) = \cos(-\pi) = -1$ więc

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(x^2 + 4) \cdot \cos(x - \pi)] = 4 \cdot (-1) = -4.$$

Ad. 4. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (x^2 + 6x) = \frac{1}{9} + 2 = \frac{19}{9}$ oraz $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (3x + 1) = 1 + 1 = 2$ więc

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x^2 + 6x}{3x + 1} = \frac{\frac{19}{9}}{2} = \frac{19}{18}.$$

Co to jest symbol nieoznaczony?

Czasami próbując zastosować twierdzenia o arytmetyce granic możemy uzyskać tzw. symbol nieoznaczony. Symbole nieoznaczone to wyrażenia, które są umownym zapisem granicy funkcji wynikającej z twierdzeń o arytmetyce granic, nie posiadające jednak jednoznacznej wartości. Jednym z takich symboli jest $\left[\frac{0}{0} \right]$. Spójrzmy na poniższy przykład.

Przykład 2

Obliczmy granice

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$$

Ad. 1. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 8) = 2^3 - 8 = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 2 - 2 = 0$ więc

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Otrzymujemy zatem symbol nieoznaczony. W takiej sytuacji próbujemy przekształcić funkcję tak aby pozbyć się symbolu nieoznaczonego. W liczniku skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na **różnicę sześcianów**.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12.$$

Ad. 2. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 1 - 1 = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = -1 + 1 = 0$ więc w tym przypadku również otrzymujemy symbol nieoznaczony $\left[\frac{0}{0} \right]$. Przekształcamy zatem funkcję tym razem stosując w liczniku wzór na **różnicę kwadratów**.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2.$$

Zwróćmy uwagę, że tym razem wartość symbolu $\left[\frac{0}{0} \right]$ jest inna niż poprzednio.

Ad. 3. Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 9) = 9 - 18 + 9 = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 3 - 3 = 0$ więc po raz kolejny w granicy otrzymujemy symbol nieoznaczony $\left[\frac{0}{0} \right]$. Tym razem usuniemy go stosując w liczniku wzór na **kwadrat różnicy**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 3 - 3 = 0$$

Po raz kolejny wartość symbolu $\left[\frac{0}{0} \right]$ okazała się inna co pokazuje, że jego wartość nie jest jednoznaczna.

Kolejne przykłady pokazują jak radzić sobie z symbolem nieoznaczonym $\left[\frac{0}{0} \right]$ w innych sytuacjach.

Przykład 3

Obliczymy granicę

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$$

Spróbujmy obliczyć granicę podstawiając w miejsce x wartość graniczną -1 .

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} = \left[\frac{2-2}{-1+1} = \frac{0}{0} \right].$$

Otrzymujemy zatem symbol nieoznaczony, który uniemożliwia nam zastosowanie twierdzeń o arytmetyce granic. Pozbędziemy się go mnożąc licznik i mianownik przez wyrażenie

$\sqrt{x+5} + 2$ i stosując wzór na różnicę kwadratów.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+5-4}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x+5}+2} = \frac{1}{4}.$$

Przykład 4

Obliczmy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin x}.$$

Spróbujmy obliczyć podaną granicę podstawiając w miejsce x wartość graniczną 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin x} = \left[\frac{\sin 0}{\sin 0} = \frac{0}{0} \right].$$

Tym razem aby pozbyć się symbolu $\left[\frac{0}{0} \right]$ zastosujemy wzór na sinus podwojonego argumentu: $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$. Otrzymujemy wówczas

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2 \cos 0 = 2.$$

Dla zainteresowanych

Symbol $\left[\frac{0}{0} \right]$ to nie jedyny symbol nieoznaczony.

Słownik

różnica sześcianów

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

różnica kwadratów

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

kwadrat różnicy

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją, na której pokazano, w jaki sposób można korzystać z twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji. Zapoznaj się z przedstawionymi w animacji przykładami, a następnie wykonaj zamieszczone pod nim polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DFZ3quala>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji. Opowiada Piotr Kryszkiewicz.

Polecenie 2

Korzystając z twierdzenia o arytmetyce granic, oblicz granicę funkcji.

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + 3 \sin x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$

b. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{x-1}{x+2} + \frac{x}{x+3} \right)$

Polecenie 3

Oblicz granicę.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{4x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1} \right)$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{2x^3 - x}{1 - 2x^2} =$$

☐ -2

☐ 3

☐ $-\frac{2}{3}$

☐ $\frac{5}{9}$

Ćwiczenie 2



$$\lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{x^2 + x + 3}{x + 1} - \frac{2x}{x + 3} \right] =$$

☐ -2

☐ 1

☐ -3

☐ 3

☐ -1

Ćwiczenie 3



Wskaż granice równe (-1) .

☐ $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x + \pi) - \sin(x + \pi)]$

☐ $\lim_{x \rightarrow -2} [(x^2 + 2x)(x + 1)]$

☐ $\lim_{x \rightarrow 3} [2 \log_{\frac{1}{3}} x + 3^{x-3}]$

Ćwiczenie 4



$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{2x-6} =$$

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{1}{6}$

☐ $\frac{1}{12}$

Ćwiczenie 5



Uporządkuj granice od najmniejszej do największej.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [2x \sin(\pi(x - 1))]$$



$$\lim_{x \rightarrow -\pi} [3x + \sin(\frac{x}{2})]$$



$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 6}{x + 2}$$



$$\lim_{x \rightarrow 4} [\log_2(\frac{1}{2x}) - 3^{2x-8}]$$



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Przenieś w puste pola poprawne liczby.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\sqrt{6x+2}-2}{3x-1} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{8x^3+1}{2x+1} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-4} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+2}{x^2-2x-3} = \boxed{}$$

Ćwiczenie 8



Połącz w pary granice z ich poprawnymi wartościami.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{4}} \frac{4x+1}{16x^2-1}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \left[\frac{1}{x} + \frac{x-1}{2x+1} \right]$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x-18}{x^3-27}$$

$$\frac{2}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-5x+2}{2x^2+3x-2}$$

$$-\frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{2x+5}$$

$$\frac{7}{2}$$

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna oraz stosuje twierdzenie o sumie, różnicy, iloczynie oraz ilorazie granic funkcji;
- wie, czym jest symbol nieoznaczony $\left[\frac{0}{0}\right]$;
- potrafi pozbyć się symbolu nieoznaczonego $\left[\frac{0}{0}\right]$ stosując znane wzory skróconego mnożenia oraz wzory trygonometryczne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- śniegowa kula;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie oglądają animację prezentującą przykłady wykorzystania twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji. Po ustalonym czasie nauczyciel pyta uczniów czy mieli wątpliwości ze zrozumieniem pokazanych rozwiązań i tłumaczy je.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po każdym zakończonym zadaniu wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Animacja” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

- [Różnica kwadratów](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Animacja” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji”.