Określanie dziedziny funkcji opisanej wzorem

Źródło: OlafPictures, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Bardzo ważnym elementem funkcji liczbowej jest jej dziedzina. W tym materiale poznasz sposoby wyznaczania dziedziny funkcji opisanej wzorem. Znajdziesz odpowiedź na pytania: czy dziedziną każdej funkcji liczbowej jest zawsze cały zbiór liczb rzeczywistych? Jaki wpływ na dziedzinę funkcji ma rodzaj działania znajdujący się we wzorze opisującym funkcję? Jak można odczytać dziedzinę funkcji opisanej za pomocą wykresu?

Twoje cele

- Wyznaczysz dziedzinę funkcji opisanej wzorem.
- Odczytasz dziedzinę funkcji z jej wykresu.

Przeczytaj

Bardzo często obok wzoru opisującego funkcję, zapisana jest jej dziedzina. W jaki sposób postępujemy, gdy mamy tylko wzór funkcji? Jak wówczas określamy jej dziedzinę? Odpowiedzi na powyższe pytania uzyskasz, analizując poniższe przykłady.

Pamiętamy, że przez dziedzinę funkcji zapisanej za pomocą wzoru, rozumiemy zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których są wykonalne wszystkie działania zapisane we wzorze funkcji. Oznacza to, że dziedziną funkcji liczbowej jest zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których można obliczyć wartość funkcji.

Przykład 1

Wyznaczymy dziedziny następujących funkcji:

a. $f(x) = -2x + 5$,
b. $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-5}$,
c. $f(x) = \sqrt{x+7}$,
d. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-8}}$.

Rozwiązanie:

a. W zbiorze liczb rzeczywistych możemy każdą liczbę pomnożyć przez (-2) oraz do każdej liczby rzeczywistej możemy dodać liczbę 5.
   Z tego faktu możemy wywnioskować, że dziedziną funkcji $f(x) = -2x + 5$ jest zbiór $\mathbb{R}$.
   Zapisujemy to $D_f = \mathbb{R}$.
b. Dowolną liczbę rzeczywistą można podnieść do sześcianu i odjąć od niej liczbę 8.
   Dzielenie jest możliwe tylko wtedy, gdy dzielnik jest liczbą różną od 0.
   Jest to możliwe wtedy, gdy $x^2 - 5 \neq 0$.
   Otrzymujemy: $x^2 \neq 5$ wtedy, gdy $x \neq \sqrt{5}$ i $x \neq -\sqrt{5}$.
   Czyli dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-5}$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\right\}$.
   Możemy to zapisać: $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\right\}$.
c. We wzorze opisującym funkcję, znajduje się pierwiastek kwadratowy.
   Wiemy, że pierwiastek kwadratowy istnieje tylko z liczby nieujemnej.
   Stąd wnioskujemy, że wartość funkcji f możemy obliczyć tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność $x + 7 \geq 0$, czyli $x \geq -7$.
   Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x+7}$ jest przedział $\langle -7,\ \infty)$.
   Możemy to zapisać: $D_f = \langle -7,\ \infty)$.

d. W mianowniku ułamka mamy wyrażenie umieszczone pod znakiem pierwiastka kwadratowego. Wiemy, że pierwiastek kwadratowy istnieje tylko z liczby nieujemnej. Pierwiastek kwadratowy umieszczony jest w mianowniku ułamka. Wiadomo, że dzielenie przez 0 jest niewykonalne w zbiorze liczb rzeczywistych.
W celu wyznaczenia dziedziny funkcji f, należy rozwiązać nierówność $x-8>0$, czyli $x>8$.
Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x-8}}$ jest przedział $(8,\ \infty)$.
Możemy to zapisać: $D_f=(8,\ \infty)$.

Określając dziedzinę funkcji, należy pamiętać, że:

- pierwiastek stopnia parzystego można obliczać tylko z liczb nieujemnych,
- mianownik ułamka musi być zawsze liczbą różną od zera.

Przykład 2

Wyznaczymy dziedzinę funkcji:

a. $f(x)=\sqrt{4-x}+\frac{7}{x+5}$,
b. $f(x)=\frac{\sqrt{7-x}}{x+3}$,
c. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+4}}+\frac{5}{\sqrt{x-4}}$,
d. $(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+4x+4}$.

Rozwiązanie:

a. W celu wyznaczenia dziedziny funkcji $f(x)=\sqrt{4-x}+\frac{7}{x+5}$, należy rozważyć dwa warunki, które musi jednocześnie spełnić liczba x:
$4-x\geq 0$ i $x+5\neq 0$.
Zbiorem rozwiązań nierówności $4-x\geq 0$ jest przedział $(-\infty,\ 4\rangle$.
Jednocześnie $x\neq -5$.
Zapisujemy dziedzinę funkcji $f(x)=\sqrt{4-x}+\frac{7}{x+5}$ w postaci sumy przedziałów $(-\infty,\ -5)\cup(-5,\ 4\rangle$.
Zatem: $D_f=(-\infty,\ -5)\cup(-5,\ 4\rangle$.
b. Podobnie, jak w podpunkcie a., należy rozważyć dwa warunki, które musi jednocześnie spełnić liczba x:
$7-x\geq 0$ i $x+3\neq 0$.
Zatem dziedziną funkcji $f(x)=\frac{\sqrt{7-x}}{x+3}$ jest suma przedziałów $(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ 7\rangle$.
Możemy to zapisać: $D_f=(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ 7\rangle$.
c. Wzór funkcji zapisany jest w postaci sumy dwóch ułamków. W mianownikach tych ułamków zapisane są wyrażenia pod pierwiastkami kwadratowymi. Liczba x musi

spełniać jednocześnie dwa warunki:
$x+4>0$ i $x-4>0$.
Możemy je zapisać: $x>-4$ oraz $x>4$.
Zatem dziedziną funkcji $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+4}}+\frac{5}{\sqrt{x-4}}$ jest przedział $(4,\ \infty)$.
Stąd $D_f=(4,\ \infty)$.

d. Aby wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+4x+4}$, należy rozpatrzyć dwa warunki, które musi spełnić jednocześnie liczba x:
$x+2\geq 0$ i $x^2+4x+4\neq 0$.
Rozwiązaniem nierówności pierwszej jest przedział $\langle -2,\ \infty)$.
Drugi warunek możemy zapisać, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia:
$(x+2)^2\neq 0$, stąd $x\neq -2$.
Zatem dziedziną funkcji $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+4x+4}$ jest przedział $(-2,\ \infty)$.
Dziedzinę funkcji f możemy również zapisać: $D_f=(-2,\ \infty)$.

Czy wpływ na dziedzinę funkcji mają tylko pierwiastki kwadratowe i mianowniki ułamków?

Kolejne przykłady pozwolą odpowiedzieć na powyższe pytanie.

Przykład 3

Wyznacz dziedzinę funkcji:

a. $f(x)=\log_2(6-2x)$,
b. $f(x)=\log_{(x-3)}(3x-6)$.

Rozwiązanie:

a. Z definicji logarytmu wiemy, że aby obliczyć wartość logarytmu, liczba logarytmowana musi być liczbą rzeczywistą dodatnią.
Wartość funkcji f możemy obliczyć tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność $6-2x>0$, czyli $x<3$.
Dziedziną funkcji $f(x)=\log_2(6-2x)$ jest przedział $(-\infty,\ 3)$.
Stąd $D_f=(-\infty,\ 3)$.

b. Podstawa logarytmu musi być liczbą dodatnią i różną od 1.
W celu wyznaczenia dziedziny funkcji f, musimy rozpatrzeć warunki dotyczące zarówno podstawy logarytmu, jak i liczby logarytmowanej. Dla przejrzystości rachunków, wyznaczymy oba zbiory osobno, a następnie wyznaczymy dziedzinę funkcji.
Najpierw zajmijmy się określeniem dziedziny ze względu na założenia podstawy logarytmu. Mamy zatem
$x-3>0 \quad \wedge \quad x-3\neq 1$, co daje nam
$x>3 \quad \wedge \quad x\neq 4$.

> Zapiszemy rozwiązanie za pomocą przedziałów $x \in (3, 4) \cup (4, \infty)$.
> Teraz zajmijmy się warunkiem dotyczącym liczby logarytmowanej, która musi być nieujemną liczbą rzeczywistą. Zapiszemy
> $3x - 6 > 0$
> $3x > 6$
> $x > 2$.
> Zatem ze względu na liczbę logarytmowaną $x \in (2, \infty)$.
> Zauważmy, że założenia podstawy logarytmu dają nam węższy zbiór, dla którego funkcja ma sens. Dziedzina całej funkcji jest iloczynem obu wyżej wyznaczonych zbiorów. Jako, że pierwszy zbiór zawiera się w drugim, to z rachunku zbiorów wynika, że $D_f = (3, 4) \cup (4, \infty)$.

Podsumujmy dotychczasowe informacje dotyczące sposobu wyznaczania dziedziny funkcji opisanej za pomocą wzoru:

1. Jeżeli we wzorze funkcji występuje ułamek, to wyrażenie zapisane w mianowniku musi być zawsze różne od zera.
2. Jeżeli we wzorze funkcji występuje pierwiastek kwadratowy w liczniku, to wyrażenie podpierwiastkowe musi być zawsze większe lub równe zeru; jeśli w mianowniku, to musi być większe od zera.
3. Jeżeli we wzorze funkcji występuje logarytm o znanej podstawie, to wyrażenie logarytmowane musi być zawsze większe od zera.
4. Jeżeli we wzorze funkcji występuje logarytm i w podstawie logarytmu jest argument, to wyrażenie zapisane w podstawie logarytmu musi być zawsze liczbą dodatnią i różną od jedności.

Słownik

> **dziedzina funkcji liczbowej**
>
> zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których można obliczyć wartość funkcji

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie przykłady przedstawione w animacji. Spróbuj samodzielnie rozwiązać pokazane przykłady, następnie sprawdź swoje rozwiązania. Wykonaj wskazane polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D17Unusml

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego określania dziedziny funkcji opisanej wzorem.

Korzystając z informacji przedstawionych w animacji, wykonaj polecenia.

Polecenie 2

Wyznacz dziedzinę funkcji f opisanej za pomocą wzoru:

$$f(x) = \frac{x^3+5}{x^2-4} + \frac{\sqrt{2x-8}}{x^2-9}.$$

Polecenie 3

Wyznacz dziedzinę funkcji f opisanej za pomocą wzoru:

$$f(x) = \sqrt{x+3} + \frac{\log_{(x-3)}(3x-5)}{-2x+5}.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Określanie dziedziny funkcji opisanej wzorem

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza dziedzinę funkcji opisanej za pomocą wzoru
- wykorzystuje w obliczeniach definicję pierwiastka stopnia parzystego oraz definicję logarytmu
- oblicza dziedzinę funkcji zapisanej w postaci ułamka zwykłego
- analizuje nietypowy problem funkcyjny, dobiera sposób rozwiązania i ocenia skuteczność tego sposobu

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza morfologiczna
- mapy myśli
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria sukcesu.
2. Uczniowie, podzieleni na grupy, tworzą mapy myśli zawierające poznane dotychczas własności działań.
3. Wykonane schematy umieszczają w widocznym miejscu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, pracując w trzech grupach, analizują materiał przedstawiony w sekcji Przeczytaj.
   Każda grupa analizuje jeden przykład.
2. Po upływie wyznaczonego czasu jeden przedstawiciel grupy przedstawia wnioski wypływające z analizy przykładu na forum klasy.
3. Grupy porównują swoje spostrzeżenia z pozostałymi uczniami.
4. Wspólnie formułują wnioski.
5. Uczniowie oglądają animację i wykonują wskazane w niej polecenia.
   Formułują wnioski wynikające z zaobserwowanych prawidłowości.
6. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności takie, jak opisywanie językiem matematycznym zjawisk z otaczającego świata, stosowanie własności działań do wyznaczania dziedziny funkcji.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wyjaśnia wszelkie wątpliwości oraz ocenia pracę uczniów w czasie zajęć.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.
2. Praca domowa dla chętnych:
   Rozpatrujemy walce, w których stosunek wysokości do długości promienia podstawy jest równy $\frac{3}{2}$. Podaj wzór funkcji opisujący objętość takiego walca w zależności od długości promienia podstawy, Określ dziedzinę tak utworzonej funkcji.

Materiały pomocnicze:

Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać do pracy metodą odwróconej klasy.

Uczniowie mogą obejrzeć animację w domu i na jej podstawie przygotować krótkie wprowadzenie do lekcji.