



Suma i różnica wielomianów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Suma i różnica wielomianów

Wielomiany jednej zmiennej są zapisywane za pomocą odpowiednich wyrażeń algebraicznych. W matematyce wyższej tworzą strukturę zwaną *pierścieniem* - mają wiele własności analogicznych do odpowiednich własności liczb całkowitych (które również tworzą strukturę *pierścienia*). Te pojęcia wykraczają poza program nauczania matematyki w szkole. Analizując kolejne lekcje, warto jednak o tym pamiętać i szukać analogii między liczbami całkowitymi i wielomianami.

W zbiorze liczb całkowitych zdefiniowane jest dodawanie, które charakteryzuje się poniższymi własnościami.

- Przemienność: $a + b = b + a$.
- Łączność: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Istnienie elementu neutralnego dla dodawania, czyli zera: $a + 0 = a$.

Dodawanie wielomianów ma analogiczne własności. Dla dowolnych wielomianów mamy więc:

- Przemienność: $W(x) + P(x) = P(x) + W(x)$.
- Łączność: $(W(x) + P(x)) + Q(x) = W(x) + (P(x) + Q(x))$.
- Istnienie elementu neutralnego dla dodawania, którym jest wielomian zerowy (oznaczymy go jako $N(x)$): $W(x) + N(x) = W(x)$.

Twoje cele

- Znajdziesz wielomian, będący sumą/różnicą danych wielomianów.
- Przećwiczysz metody dodawania i odejmowania wielomianów jednej zmiennej.
- Odkryjesz i zredagujesz własność opisującą związek między stopniami dwóch wybranych wielomianów i stopniem wielomianu uzyskanego jako ich suma bądź różnica.

Przeczytaj

Każdy wielomian jest sumą pewnych jednomianów (lub jednomianem).
Zatem suma dwóch wielomianów również będzie wielomianem.

Definicja: Suma wielomianów

Dane są wielomiany $F(x)$ i $G(x)$.

- **Sumą wielomianów** $F(x)$ i $G(x)$ nazywamy taki wielomian $W(x)$, że dla każdej liczby rzeczywistej a spełniony jest warunek

$$W(a) = F(a) + G(a).$$

Definicja: Różnica wielomianów

- **Różnicą wielomianów** $F(x)$ i $G(x)$ nazywamy taki wielomian $W(x)$, że dla każdej liczby rzeczywistej a spełniony jest warunek

$$W(a) = F(a) - G(a).$$

Sumę wielomianów $F(x)$ i $G(x)$ możemy zatem obliczyć, dodając współczynniki obu wielomianów stojące przy niewiadomych x o tych samych potęgach, czyli sumując współczynniki [wyrazów podobnych](#).

Analogicznie, obliczając różnicę wielomianów $F(x)$ i $G(x)$, można odjąć odpowiednie współczynniki przy tych samych potęgach niewiadomej.

Jeśli w którymś z wielomianów występuje zmienna w danej potędze, natomiast nie występuje ona w tej potędze w drugim wielomianie, to przyjmujemy, że zmienna jest w tej potędze w obu wielomianach, jednak tam, gdzie pominięto jej zapis, jej współczynnik wynosi zero, np.:

$$F(x) = 3x^3 - x + 1, \quad G(x) = 2x^3 - x^2$$

możemy równoważnie zapisać:

$$F(x) = 3x^3 + 0x^2 - x + 1, \quad G(x) = 2x^3 - x^2 + 0x + 0.$$

Przykład 1

Dane są wielomiany:

$$V(x) = 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x - 11,$$

$$P(x) = -5x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 5x + 7,$$

$$Q(x) = -3x^3 + 11.$$

Obliczając poniższe **sumy wielomianów**, otrzymamy:

- $V(x) + P(x) = -5x^3 + 10x - 4$
- $P(x) + Q(x) = -5x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x + 18$
- $Q(x) + V(x) = 5x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 5x$

Przykład 2

Dane są wielomiany:

$$V(x) = 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x - 11,$$

$$P(x) = -5x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 5x + 7,$$

$$Q(x) = -3x^3 + 11.$$

Obliczając **różnice wielomianów**, otrzymamy:

- $V(x) - P(x) = 10x^4 + x^3 - 6x^2 - 18$
- $P(x) - Q(x) = -5x^4 + 3x^2 + 5x - 4$
- $Q(x) - V(x) = -5x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 22$

Wprowadzimy teraz oznaczenie $\deg(W(x))$ dla stopnia wielomianu (od angielskiego *degree*, czyli stopień) oraz oznaczenie $\max(a_1, a_2, \dots, a_n)$, gdzie a_1, a_2, \dots, a_n to dowolne liczby rzeczywiste.

Zapis ten oznacza, że z podanego zbioru wybieramy liczbę, która jest nie mniejsza od każdej z pozostałych liczb w tym zbiorze. Na przykład $\max(3, 5, 11, 4, 5, 11, 1) = 11$, ponieważ liczba 11 jest większa od każdej z pozostałych liczb ze zbioru lub równa którejś z liczb tego zbioru.

Ustalmy, jakiego **stopnia** mogą być wielomiany $W(x) + P(x)$ oraz $W(x) - P(x)$.

Własność: Stopień sumy oraz różnicy wielomianów

- $\deg(W(x) + P(x)) \leq \max(\deg(W(x)), \deg(P(x)))$ lub $W(x) + P(x)$ jest wielomianem zerowym.
- $\deg(W(x) - P(x)) \leq \max(\deg(W(x)), \deg(P(x)))$ lub $W(x) - P(x)$ jest wielomianem zerowym.

Przykład 3

- Suma wielomianu trzeciego stopnia i wielomianu piątego stopnia będzie na pewno wielomianem piątego stopnia.
- np.: $W(x) = x^3, P(x) = x^5$. Wtedy $W(x) + P(x) = x^5 + x^3$.

Przykład 4

- Suma dwóch wielomianów stopnia piątego może być wielomianem stopnia piątego lub mniejszego, może też być **wielomianem zerowym**.
- np.: $W(x) = x^5$, $P(x) = 2x^5$. Wtedy $W(x) + P(x) = 3x^5$ (wielomian piątego stopnia).
- np.: $W(x) = x^5$, $P(x) = -x^5 + x^4$. Wtedy $W(x) + P(x) = x^4$ (wielomian czwartego stopnia).
- np.: $W(x) = x^5$, $P(x) = -x^5 + 1$. Wtedy $W(x) + P(x) = 1$ (wielomian stopnia zerowego).
- np.: $W(x) = x^5$, $P(x) = -x^5$. Wtedy $W(x) + P(x) = 0$ (wielomian zerowy).

Przykład 5

Dane są wielomiany $W(x) = 5x^3 + ax^2 + 7x - b$ oraz $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
 Wiadomo, że ich suma to wielomian $W(x) + P(x) = -4x^3 - 6x^2 - 4x - 6$.
 Film pokazuje, jak wyznaczyć wartości parametrów a, b, c, d .

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DkMRfRTcH>

Film nawiązujący do treści materiału

Słownik

wyrazy podobne

jednomiany tej samej zmiennej występujące w tej samej potęgze, np.: x^4 i $15x^4$

różnica wielomianów $F(x)$ i $G(x)$

wielomian $W(x)$, taki że dla każdej liczby rzeczywistej a spełniony jest warunek
 $W(a) = F(a) - G(a)$

stopień wielomianu jednej zmiennej

dla wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ (gdzie $a_n \neq 0$) to liczba n (najwyższy wykładnik zmiennej); stopień wielomianu, który jest stałą niezerową, wynosi 0; wielomian zerowy nie ma określonego stopnia

suma wielomianów $F(x)$ i $G(x)$

wielomian $W(x)$, taki że dla każdej liczby rzeczywistej a spełniony jest warunek
 $W(a) = F(a) + G(a)$

wielomian zerowy

| wielomian określony wzorem $W(x) = 0$; wielomian ten nie ma określonego stopnia

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj animację dotyczącą dodawania wielomianów. W trakcie oglądania sporządź własne notatki, które będą przydatne przy kolejnym poleceniu.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DXSCHEngu>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej sumy i różnicy wielomianów.

Polecenie 2

Na podstawie obejrzanej animacji przeanalizuj w analogiczny sposób odejmowanie wielomianów $F(x)$ i $G(x)$.

Uzupełnij następujące własności:

- Jeżeli $\deg(F(x)) = \deg(G(x)) = n$, to ...
- Jeżeli $\deg(F(x)) = n > \deg(G(x))$, to ...
- Jeżeli $\deg(F(x)) < \deg(G(x)) = m$, to ...

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Suma i różnica wielomianów

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykonuje dodawanie i odejmowanie wielomianów,
- określa własność opisującą związek między stopniami dwóch wybranych wielomianów i stopniem wielomianu uzyskanego jako ich suma bądź różnica,
- analizuje metody dodawania i odejmowania wielomianów jednej zmiennej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja;

- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące dodawania i odejmowania jednomianów oraz wielomianów. Uczniowie porządkują informacje w postaci mapy myśli.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 z sekcji „Animacja” – „Przeanalizuj krok po kroku sposób obliczania sumy i różnicy wielomianów”. Uczniowie zapoznają się z treścią zawartą w materiale, w razie wątpliwości zadają pytania nauczycielowi na forum klasy.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji

„Wprowadzenie”.

- Uczniowie tworzą infografikę podsumowującą dodawanie i odejmowanie wielomianów.
- Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias
- Upraszczenie wielomianów
- Animacja może zostać wykorzystana przez uczniów podczas przygotowania się do sprawdzianu.