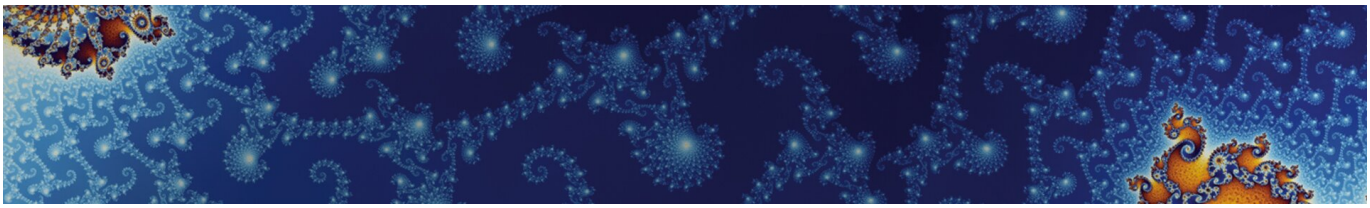


# Odkryj, zrozum, zastosuj...

Zmierz się z potęgą potęgi. Czy w każdym układzie masz równe szanse? Znajdź w sobie pierwiastek Pitagorasa. Pomoże ci w tym e-podręcznik.


- Potęga o wykładniku naturalnym
  - Potęga o wykładniku naturalnym
  - Iloczyn i iloraz potęg o takich samych podstawach
  - Potęgowanie potęgi
  - Iloczyn i iloraz potęg o takich samych wykładnikach
  - Porównywanie potęg
  - Działania na potęgach o wykładniku naturalnym
- Pierwiastki
  - Pierwiastki kwadratowe i sześcienne
  - Własności pierwiastków
  - Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka
  - Włączanie czynnika pod znak pierwiastka
  - Działania na pierwiastkach
  - Szacowanie wyrażeń zawierających pierwiastki
- Wyrażenia algebraiczne
  - Jednomiany i sumy algebraiczne
  - Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian
  - Mnożenie sum algebraicznych
  - Działania na wyrażeniach algebraicznych
  - Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias

- Twierdzenie Pitagorasa
  - Twierdzenia i ich rodzaje
  - Twierdzenie Pitagorasa
  - Obliczanie długości boków w trójkącie prostokątnym
  - Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa
  - Szczególne trójkąty prostokątne
- Pola figur
  - Pole figury. Jednostki pola
  - Pole trójkąta
  - Pole równoległoboku
  - Pole trapezu
  - Pole wielokąta
- Układy równań
  - Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
  - Rozwiązywanie zadań tekstowych z zastosowaniem równań
  - Przekształcanie wzorów
  - Układ równań z dwiema niewiadomymi – opisywanie związków między wielkościami za pomocą równań
  - Liczba rozwiązań układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
  - Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania
  - Metoda przeciwnych współczynników rozwiązywania układów równań
  - Rozwiązywanie układów równań
  - Opisywanie i rozwiązywanie za pomocą układów równań zadań z kontekstem praktycznym
  - Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem układów równań
- Funkcje
  - Przyporządkowanie
  - Pojęcie funkcji. Zależności funkcyjne.
  - Sposoby opisywania funkcji

    - Miejsce zerowe funkcji
    - Funkcja i jej własności. Część I
    - Funkcja jej własności. Część II
- Figury w układzie współrzędnych
    - Położenie punktów na płaszczyźnie
        - Położenie - szachy
        - Położenie - kino
        - Położenie - oś liczbowa i układ współrzędnych
        - Położenie - mapa
        - Położenie - labirynt
    - Prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie
    - Wielokąty w układzie współrzędnych
        - Punkty o współrzędnych wymiernych
        - Wielokąty w układzie współrzędnych
- Graniastosłupy i ostrosłupy
    - Prostopadłościan
    - Graniastosłup - opis
    - Pole powierzchni graniastosłupa
    - Jednostki objętości. Objętość graniastosłupa
    - Ostrosłup – opis bryły
    - Pole powierzchni ostrosłupa
    - Objętość ostrosłupa
- Słowniczek

# Potęga o wykładniku naturalnym

**Ważne!**

- Potęgą $a^n$ o wykładniku naturalnym $(n > 1)$ nazywamy iloczyn $n$ czynników, z których każdy jest równy $a$.

$$a^n = \mathrm{a} \bullet \underbrace{a \bullet a \bullet \ldots\ldots \bullet a}_{\text{n czynników}}.$$

- Przyjmujemy, że $\mathrm{a}^0 = 1$ dla $\mathrm{a} \neq 0$, oraz $a^1 = a$.
- Dla każdej liczby naturalnej $n$ i dla dowolnej liczby $a \neq 0$ przyjmujemy $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

**Zapamiętaj!**

- Jeżeli liczbę dodatnią podnosimy do potęgi o wykładniku naturalnym, to otrzymujemy liczbę dodatnią.
- Jeżeli liczbę ujemną podnosimy do potęgi o wykładniku naturalnym parzystym, to otrzymujemy liczbę dodatnią.
- Jeżeli liczbę ujemną podnosimy do potęgi o wykładniku naturalnym nieparzystym, to otrzymujemy liczbę ujemną.
- Każda liczba różna od zera podniesiona do potęgi zerowej równa się jeden.
- Zero podniesione do dodatniej potęgi równa się zero.
- Liczba jeden podniesiona do potęgi o wykładniku naturalnym jest równa jeden.

## Ćwiczenie 1

Uzupełnij.

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ ☐

$2,3 \cdot 2,3 \cdot 2,3 =$ ☐

$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) =$ ☐

$3k \cdot 3k \cdot 3k \cdot 3k \cdot 3k \cdot 3k =$ ☐

$2^2$ | $2{,}3^2$ | $2^6$ | $2^5$ | $5^2$ | $2\mathrm{k}^6$ | $(3\mathrm{k})^6$ | $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ | $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ | $2^3$ | $2{,}3^5$ | $2^3$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ | $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ | $2^4$ | $3\mathrm{k}^2$ | $2{,}3^3$ | $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$

**Ćwiczenie 2**

Wyszukaj pary: liczba i jej kwadrat.

$0{,}25$

$\frac{4}{3}$

$0{,}3$

$6{,}25$

$2{,}25$

$-2{,}5$

$-0{,}4$

$-\frac{1}{2}$

$0{,}09$

$11$

$3$

$9$

$1\frac{1}{2}$

$0{,}16$

$-2$

$121$

$1\frac{7}{9}$

$4$

Źródło: PŁ.

**Ćwiczenie 3**

Wyszukaj pary: liczba i jej sześcian.

$0{,}001$

$-64$

$0,1$

$-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{125}$

$1\left(\frac{2}{3}\right)$

$-0,2$

$8$

$\frac{1}{729}$

$-4$

$-0,125$

$2$

$\frac{8}{27}$

$\frac{2}{3}$

$0,(1)$

$\frac{125}{27}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej.

## Ćwiczenie 4

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $1\,024$ | $2^7$ |
| $64$ | $2^6$ |
| $128$ | $2^9$ |
| $1$ | $2^{10}$ |
| $2$ | $2^1$ |
| $512$ | $2^4$ |
| $16$ | $2^0$ |
| $8$ | $2^3$ |

## Ćwiczenie 5

Oblicz w pamięci.

a. $3^2$, $4^3$, $0^4$, $10^3$, $123^0$

b. $(-4)^3$, $(-5)^0$, $-2^3$, $(-1)^{12}$, $(-2)^2$

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\frac{2}{3^2}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^1$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\frac{-1}{-4^2}$

d. $0{,}2^2$, $(-0{,}2)^2$, $-(-0{,}2)^2$, $-(-0{,}5)^0$, $0{,}1^3$

## Ćwiczenie 6

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $-0{,}3^2$ | $-\frac{1}{9}$ |
| $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ | $9$ |
| $(-0{,}3)^2$ | $\frac{1}{9}$ |
| $(-3)^2$ | $0{,}09$ |
| $-\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ | $-9$ |
| $-3^2$ | $-0{,}09$ |

## Ćwiczenie 7

tabela

| | |
|---|---|
| Liczby ujemne | Liczby dodatnie |

tabela

| | |
|---|---|
| $-2^{20}$, $-(-11)^0$, $(-1)^{23}$, $-5^0$, $(-100)^{11}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{13}$ | $(-100)^{22}$, $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{33}$, $(-2)^{14}$, |
| Liczby ujemne | Liczby dodatnie |

## Ćwiczenie 8

Przeciągnij elementy z dolnej sekcji do górnej.

liczby ujemne

liczby dodatnie

$-5^0$ | $\left(-\frac{2}{3}\right)^{13}$ | $(-100)^{22}$

$-(-11)^0$ | $(-1)^{23}$ | $(-2)^{14}$

$-\left(-\frac{2}{3}\right)^{33}$ | $-2^{20}$ | $(-100)^{11}$

## Ćwiczenie 9

Bez wykonywania obliczeń, przeciągnij elementy z dolnej sekcji do górnej.

dodatnie

ujemne

$\frac{\left(-(-2)^9\right)(-0.2)^8}{(-4{,}2)^0\left(\frac{4}{-3}\right)^3}$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^4(-0{,}7)^5$

$-(-6.3)^7\left(\frac{(-3)^3}{-4}\right)$

$\frac{(-3^2)\left(-(-5)^3\right)}{\left(-(-0.3)^3\right)(-4)^5}$

## Ćwiczenie 10

Zapisz podane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

a. $(-2)^3 \bullet (-x)^2$

b. $-\left(\frac{3}{4}\right)^2 \bullet (-y)^3$

c. $\frac{-(-3)^2}{-a^3}$

d. $\frac{(-4)^3 \bullet \left(-\left(-z\right)^3\right)}{16 \bullet (-8)^0}$

## Ćwiczenie 11

Uporządkuj liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$(-3)^2$

$2^3$

$(-15)^1$

$-(1{,}2)^2$

$15^0$

$(-1{,}3)^2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$-3^1$

## Ćwiczenie 12

Przeciągnij i upuść.

$3^3 =$ ____

$-4^5 =$ ____

$(0{,}1)^6 =$ ____

$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 =$ ____

$-1024$ | $\frac{16}{81}$ | $27$ | $0{,}000001$

**Ćwiczenie 13**

Liczba $243$ jest równa

- $3^5$
- $3^6$
- $243^0$
- $9^3$

**Ćwiczenie 14**

Wynikiem działania $-3^2 + (-2)^2 \bullet 2$ jest liczba

- $-1$
- $1$
- $17$
- $7$

**Ćwiczenie 15**

Iloczyn $3x \bullet 3x \bullet 3x$ jest równy

- $3x^3$
- $27x$
- $27x^3$
- $9x^3$

## Ćwiczenie 16

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Suma liczb $2^2$ i $(-2)^2$ jest dodatnia.
- [ ] Liczba przeciwną do $3^2$ jest liczba $(-3)^2$.
- [ ] Liczbą odwrotną do $25$ jest liczba $\left(-\frac{1}{5}\right)^2$.
- [ ] Liczba przeciwną do $2^3$ jest liczba $(-2)^3$.
- [ ] Liczbą odwrotną do $125$ jest liczba $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$.
- [ ] Suma liczb $2^3$ i $(-2)^3$ jest dodatnia.

## Ćwiczenie 17

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Liczby $2$ i $-2$ podniesione do tej samej parzystej potęgi są sobie równe.
- [ ] Każda liczba podniesiona do potęgi $0$ równa się $1$.
- [ ] Sześcian parzystej liczby jest zawsze większy od kwadratu tej samej liczby.
- [ ] Każda liczba ujemna podniesiona do potęgi $0$ równa się $1$.
- [ ] Sześcian dowolnej liczby jest zawsze większy od kwadratu tej samej liczby.
- [ ] Liczby $2$ i $-2$ podniesione do tej samej potęgi są sobie równe.

**Ćwiczenie 18**

Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla podanych zmiennych.

a. $2x^3 - x, x = -2$

b. $3z^2 - z + 1, z = \frac{1}{3}$

c. $\frac{-y^3+y}{2y^2}, y = -\frac{1}{2}$

d. $\frac{2p^2+\mathrm{pq}-q^2}{p^0+g^0}, p = -1$ i $\mathrm{q} = 2$

**Ćwiczenie 19**

Oblicz.

a. $3^4 - (-3)^4$

b. $\frac{1}{5} \bullet 5^2 - (-5)^1$

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \bullet \left(-2\right)^2$

d. $4 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \bullet \left(\frac{1}{3}\right)^0$

e. $10^3 \bullet 0{,}1^3$

f. $3 - 3^2 \bullet \frac{1}{18}$

**Ćwiczenie 20**

Oblicz wartość wyrażenia.

a. $-\left(\frac{1}{2}\right)^3 \bullet 2^2 + (-3)^0 - 5^2 \bullet \left(-\frac{1}{25}\right)$

b. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 : \frac{1}{27} - \left(1\frac{1}{2}\right)^2 \bullet \left(-\frac{2}{3}\right)^2$

c. $-\left(-(-2)^3\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 : 4$

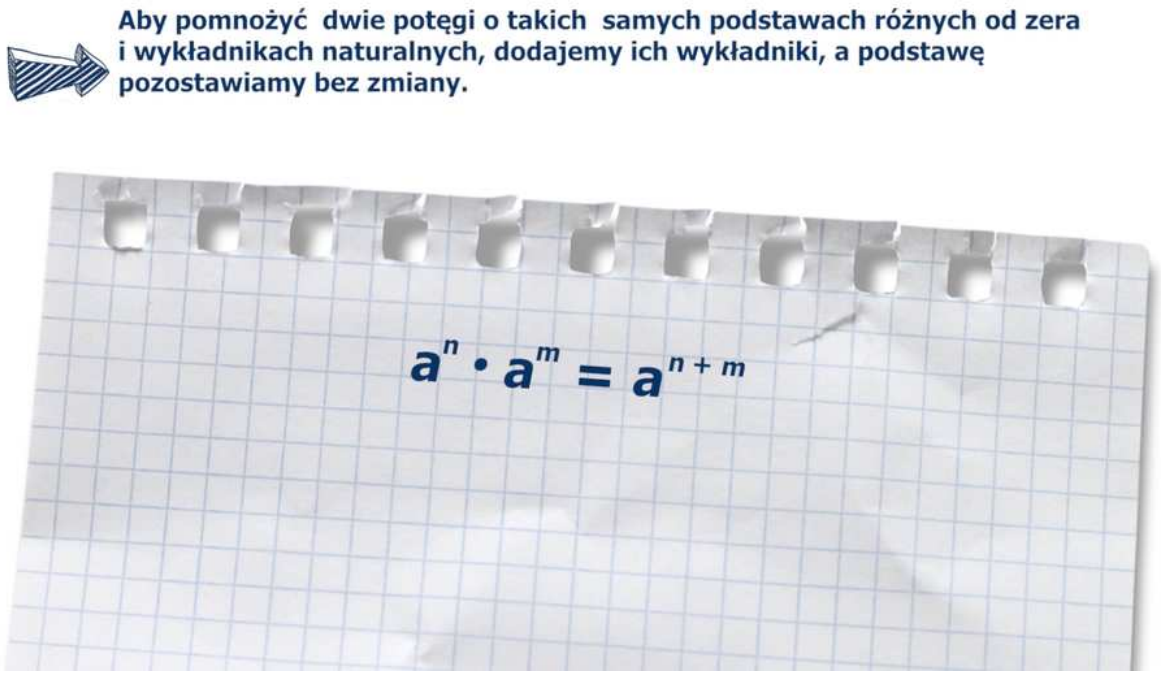
# Iloczyn i iloraz potęg o takich samych podstawach

**Twierdzenie: Działania na potęgach**

- **Iloczyn potęg o takich samych podstawach**

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych $n$ i $m$ prawdziwa jest równość

$$a^n \bullet a^m = a^{n+m}.$$




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

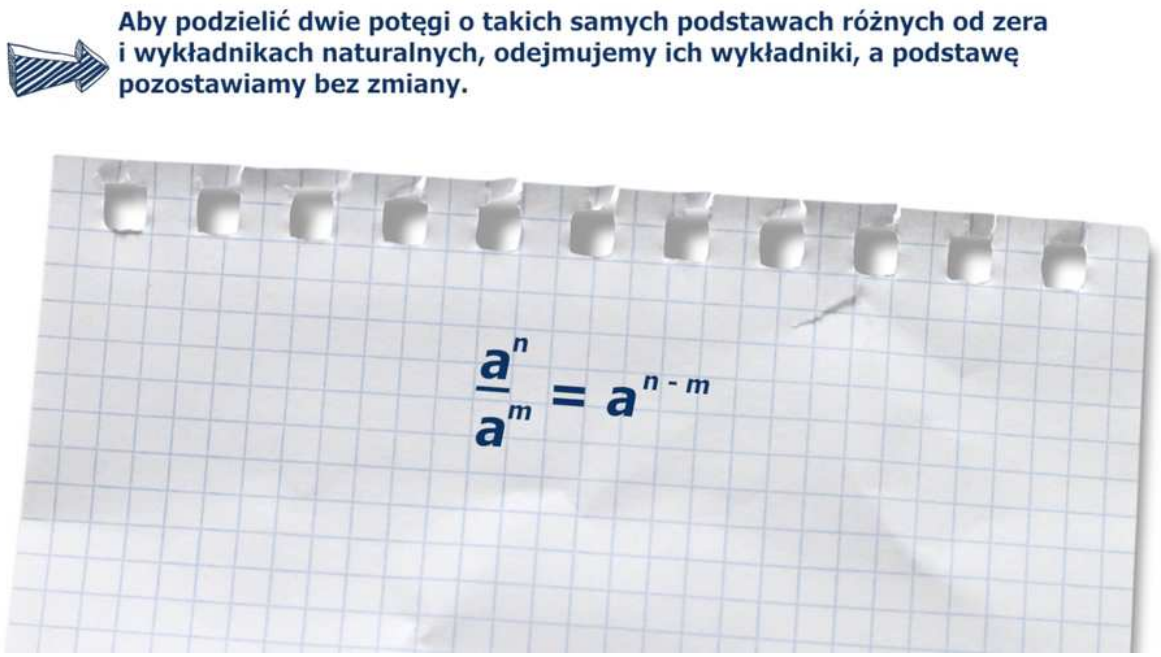
Animacja

---

- **Iloraz potęg o takich samych podstawach**

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych $n$ i $m$ prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

---

**Ćwiczenie 1**

Oblicz w pamięci.

1. $2^2 \bullet 2^2$
2. $3^2 \bullet 3^0$
3. $(-4)^2 \bullet \left(-4\right)$
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^0$
5. $(-0{,}1)^2 \bullet (-0{,}1)^2$

## Ćwiczenie 2

Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

1. $x^3$ • $x^2$
2. $a^5$ • $a^7$
3. $p^3$ • $p^0$
4. $z^3$ • $z^4$ • $z^5$
5. $y^0$ • y • $y^2$

## Ćwiczenie 3

Przeciągnij i upuść.

$1^6 \cdot 1^8 =$ ____

$2^1 \cdot 2^2 =$ ____

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$ ____

$4^2 \cdot 4^1 =$ ____

$(0{,}2)^2 \cdot (0{,}2)^0 =$ ____

$10^3 \cdot 10^2 =$ ____

100000 | 64 | 0,04 | $\frac{1}{32}$ | 1 | 8

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 4**

Wyszukaj pary.

$2^3$

$2^4$

$2^8$

$2^5 \cdot 2^0$

$2^6$

$2^5 \cdot 2^2$

$2^3 \cdot 2^3$

$2^7$

$2^2 \cdot 2$

$2^2 \cdot 2^2$

$2^5$

$2^6 \cdot 2^2$

Źródło: Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 5**

Wyszukaj pary.

$x7 \cdot x$

$x2 \cdot x7$

$x4 \cdot x3$

$x4 \cdot x0$

$x2 \cdot x2$

$x5 \cdot x0$

$x6 \cdot x2$

$x5 \cdot x2$

$x1 \cdot x4$

$x8 \cdot x1$

$x5 \cdot x$

$x3 \cdot x3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6

Przeciagnij i upuść.

$2^3 \cdot 2^5 =$ ____

$(2{,}3)^2 \cdot (2{,}3)^3 \cdot (2{,}3)^4 =$ ____

$(-3)^4 \cdot (-3)^6 \cdot (-3)^8 =$ ____

$\left(-\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) =$ ____

$3^{14} \cdot 3 \cdot 3^2 =$ ____

$10^0 \cdot 10 =$ ____

$2^a \cdot 2^a =$ ____

1a·1b·1c= ____

$10^1$ | $\left(-\frac{1}{3}\right)^{13}$ | $10^2$ | 1abc | $\left(-\frac{1}{3}\right)^{11}$ | $2{,}3^9$ | $(-3)^{19}$ | $2{,}3^{12}$ | $3^{18}$ | $3^{17}$

$2^{4a}$ | $(-3)^{12}$ | $2^{15}$ | $2^9$ | $2^{2a}$ | $2^8$ | 1a+b+c | $2{,}3^8$ | $(-3)^{18}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7

Przeciągnij i upuść.

$x^3 \cdot x^3 =$ ____

$(-y)^2 \cdot (-y)^2 \cdot (-y) =$ ____

$(2z)^6 \cdot (2z)^6 =$ ____

$(3k)^0 \cdot 3k \cdot (3k)^2 =$ ____

$z^a \cdot z^a \cdot z^a =$ ____

$p^a \cdot p^b \cdot p^c \cdot p =$ ____

$x^a \cdot x^{2a} =$ ____

$a^2 \cdot a^x \cdot a =$ ____

$x^9$ | $(2z)^{12}$ | $a^{x+3}$ | $(-y)^6$ | $(3k)^3$ | $(3k)^5$ | $p^{a+b+c+1}$ | $x^{3a}$ | $(-y)^7$ | $x^6$ | $(2z)^{15}$ | $z^{3a}$ | $x^{11}$ | $(-y)^5$ | $(2z)^{14}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8

Oblicz w pamięci.

1. $2^3 \ : \ 2^2$
2. $(-3)^5 \ : \ (-3)^4$
3. $5^3 \ : \ 5^0$
4. $0{,}2^7 \ : \ 0{,}2^5$
5. $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 \ : \ \left(-\frac{1}{4}\right)$

## Ćwiczenie 9

Zapisz wyrażenie za pomocą jednej potęgi.

1. $x^4 \ : x^2$
2. $a^8 \ : a^7$
3. $p^3 : p^0$
4. $z^{12} \ : \ z^4 \ : \ z^5$
5. $y^{15} \ : \mathrm{y} \ : y^2$

## Ćwiczenie 10

Przeciągnij i upuść.

$1^{12} : 1^8 =$ ☐

$2^4 : 2^2 =$ ☐

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$ ☐

$4^8 : 4^8 =$ ☐

$(0{,}2)^2 : (0{,}2)^0 =$ ☐

$10^6 : 10^3 =$ ☐

$\frac{1}{2}$ | 100 | 1 | 0,01 | 1000 | 200 | 0,02 | $\frac{1}{4}$ | 0,04 | $\frac{1}{8}$ | 1 | 4

Iloczyn i iloraz potęg o tych samych podstawach - zadanie interaktywne

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 11**

Wyszukaj pary.

$2^8 : 2$

$2^8 : 2^3$

$2^6$

$2^4 : 2$

$2^3$

$2^4$

$2^8$

$2^5$

$2^8 : 2^0$

$2^8 : 2^2$

$2^6 : 2^2$

$2^7$

Iloczyn i iloraz potęg o tych samych podstawach - zadanie interaktywne

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 12**

Wyszukaj pary.

$x5 \cdot x2$

$x1 \cdot x4$

$x7 \cdot x$

$x4 \cdot x3$

$x5 \cdot x$

$x4 \cdot x0$

$x8 \cdot x1$

$x3 \cdot x3$

$x2 \cdot x7$

$x5 \cdot x0$

$x2 \cdot x2$

$x6 \cdot x2$

Pojęcie funkcji. Zależności funkcyjne. Zadanie interaktywne.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 13

Przeciągnij i upuść.

$2^5 : 2^3 =$ ____

$(2{,}3)^{12} : (2{,}3)^5 : (2{,}3)^2 =$ ____

$(-3)^{23} : (-3)^6 : (-3)^8 =$ ____

$\left(-\frac{1}{3}\right)^7 : \left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(-\frac{1}{3}\right) =$ ____

$3^4 \cdot 3^9 : 3^2 =$ ____

$10^2 : 10 =$ ____

$2^a \cdot 2^a : 2^a =$ ____

$1^a : 1^b \cdot 1^c =$ ____

$2^8$ | $2^{3a}$ | $10^1$ | $3^{10}$ | $10^3$ | $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ | $(2{,}3)^{10}$ | $1^{abc}$ | $3^{11}$ | $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ | $2^2$ | $(2{,}3)^5$ | $2^a$ | $(-3)^9$ | $1^{a-b+c}$ | $(-3)^{12}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 14

Przeciągnij i upuść.

$x^3 : x^2 =$ ____

$(-y)^6 : (-y)^2 : (-y) =$ ____

$(2z)^6 : (2z)^6 =$ ____

$(3k)^{25} : 3k : (3k)^2 =$ ____

$z^a \cdot z^a : z^a =$ ____

$p^a : p^b \cdot p^c : p =$ ____

$x^{2a} : x^a =$ ____

$a^2 : a^x \cdot a =$ ____

$a^{2-x}$ | $x^a$ | $(-y)^7$ | $(2z)^{12}$ | $x^5$ | $p^{a+b+c-2}$ | $(-y)^8$ | $(2z)^1$ | $a^{3-x}$ | $x^1$

$(3k)^{22}$ | $z^{3a}$ | $2a$ | $(-y)^3$ | $z^{2a}$ | $(2z)^0$ | $z^a$ | $p^{a-b+c-2}$ | $x^6$ | $(3k)^{20}$ | $3a$

$a^{2+x}$ | $(3k)^{25}$ | $p^{a-b+c-1}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 15

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $a^8 : a^5 \cdot a^2$ | $a \cdot a^7$ |
| $a^3 : a^3$ | $a^0 \cdot a^{10} : a^3$ |
| $a^3 \cdot a^5$ | $a^5 : a^2$ |
| $a^8 \cdot a : a^2$ | $a^0$ |
| $a^2 \cdot a^1$ | $a^7 \cdot a^4 : a^{10}$ |
| $a^{12} : a^{11}$ | $a^3 \cdot a \cdot a$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 16

Przeciągnij i upuść.

$2^3 \cdot 2^7 \cdot$ ☐ $= 2^{13}$

$3^7 : 3^3 :$ ☐ $= 3^3$

$4^9 :$ ☐ $\cdot 4^5 = 4^8$

☐ $\cdot 5^6 : 5^2 = 5^7$

$6^3 \cdot 6^4 :$ ☐ $: 6 = 6$

$7^8 :$ ☐ $: 7^3 \cdot 7^0 \cdot 7^2 = 7^4$

$4^3$ $5^3$ $6^6$ $4^6$ $2^4$ $3^1$ $3^{10}$ $2^3$ $6^2$ $4^8$ $5^8$ $3^3$ $7^4$ $5^7$ $7^3$ $2^{10}$ $6^5$ $7^8$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 17

Zapisz w postaci jednej potęgi.

1. $4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5$
2. $6^4 + 6^4 + 6^4 + 6^4 + 6^4 + 6^4$
3. $3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2$
4. $2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3$

## Ćwiczenie 18

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| czterokrotność liczby $2^4$ | $2^3$ |
| połowę liczby $2^6$ | $2^8$ |
| czwartą część liczby $2^5$ | $2^7$ |
| jedną ósmą liczby $2^7$ | $2^6$ |
| dwukrotność liczby $2^6$ | $2^4$ |
| szesnastokrotność liczby $2^4$ | $2^5$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 19

Połowa liczby $2^{20}$ to

- $1^{20}$
- $1^{10}$
- $2^{10}$
- $2^{19}$

## Ćwiczenie 20

Iloczyn potęg $x^8$ i $x^6$ jest równy

- $x^2$
- $x^{86}$
- $x^{48}$
- $x^{14}$

## Ćwiczenie 21

Jeżeli $100 \bullet 10^3 : 10^2 \bullet 1000 = 10^n$, to

- $n = 4$
- $n = 6$
- $n = 9$
- $n = 5$

## Ćwiczenie 22

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Czterokrotność liczby $2^8$ to $2^{10}$.
- [ ] $81 \ : 3^3 \ \bullet 3 = 1$
- [ ] $128 \bullet 2 \bullet 64 = \ 2^{14}$
- [ ] Iloczyn $2^3 \bullet 2 \bullet 2^0 \bullet 2^2$ zapisany w postaci potęgi to $2^6$.
- [ ] Wyrażenie $a^{12} \bullet a^4 : \left(a^5 \bullet a^3\right)$ po uproszczeniu jest równe $a^8$.
- [ ] Czterokrotność liczby $2^8$ to $2^{32}$.
- [ ] Wyrażenie $a^3 \bullet a^4 : a^6$ po uproszczeniu jest równe $a^6$.
- [ ] Suma $2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$ zapisana w postaci jednej potęgi to $2^4$.
- [ ] $81 \ : 3^3 \ \bullet 3 = 3^2$
- [ ] Suma $2^2 + 2^2$ zapisana w postaci jednej potęgi jest równa $2^4$.
- [ ] Iloczyn $2^3 \bullet 2 \bullet 2^3 \bullet 2^0$ zapisany w postaci potęgi to $2^7$.
- [ ] $128 \bullet 2 \bullet 64 = \ 2^{13}$

# Potęgowanie potęgi

**Twierdzenie: Potęga potęgi**

- **Potęga potęgi**

Dla dowolnej liczby $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych $n$ i $m$ prawdziwa jest równość

$$(a^n)^m = a^{n \bullet m}.$$

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

---

**Ćwiczenie 1**
Oblicz w pamięci.

1. $\left(1^4\right)^5$
2. $\left(\left(-1\right)^3\right)^6$
3. $\left(\left(-1\right)^3\right)^3$
4. $\left(\left(-3\right)^2\right)^2$
5. $\left(2^2\right)^3$
6. $\left(\left(-3^5\right)^0\right)^2$

**Ćwiczenie 2**

Wyszukaj pary.

$\left(2^{8}\right)^{3}$

$2^{26}$

$\left(2^{4}\right)^{7}$

$2^{28}$

$2^{22}$

$2^{25}$

$\left(2^{5}\right)^{5}$

$2^{21}$

$\left(2^{3}\right)^{7}$

$2^{24}$

$\left(2^{11}\right)^{2}$

$\left(2^{2}\right)^{13}$

**Ćwiczenie 3**

Wyszukaj pary.

x22

x21

x28

x55

x74

x24

x215

x211

x30

x37

x25

x46

**Ćwiczenie 4**

Zapisz w postaci jednej potęgi.

1. $\left(4^3\right)^4$
2. $\left(2^2\right)^5$
3. $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)^6$
4. $\left((-7)^4\right)^8$
5. $\left(\left(5^3\right)^5\right)^0$

## Ćwiczenie 5

Zapisz wyrażenie jako potęgę potęgi.

1. $4^8$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^6$
3. $(-3)^{15}$
4. $(1{,}2)^{11}$
5. $-(-3)^{24}$
6. $-2^9$

## Ćwiczenie 6

Przeciągnij i upuść.

$3^{18} =$ ☐

$\left(\frac{1}{3}\right)^{27} =$ ☐

$(0{,}4)^{40} =$ ☐

$(-3)^{64} =$ ☐

$\left(1\frac{1}{4}\right)^{128} =$ ☐

$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^1\right)^2$ | $\left(\left(1\frac{1}{4}\right)^4\right)^{32}$ | $\left((0{,}4)^{10}\right)^{20}$ | $\left((-3)^3\right)^{15}$ | $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^7$ | $\left((-3)^2\right)^{16}$

$\left(\left(1\frac{1}{4}\right)^2\right)^{31}$ | $\left(\left(1\frac{1}{4}\right)^3\right)^{32}$ | $(3^1)^8$ | $\left((-3)^4\right)^{16}$ | $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^9$ | $(3^6)^3$ | $(3^{12})^6$

$\left((0{,}4)^2\right)^{20}$ | $\left((0{,}4)^{12}\right)^{20}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7

Przeciągnij i upuść.

$3^{18} =$ ____

$4^4 =$ ____

$2^{24} =$ ____

$8^4 =$ ____

$9^6 =$ ____

$(4^2)^3$ | $(9^{31})^3$ | $(2^4)^2$ | $(4^2)^1$ | $(4^3)^4$ | $(2^2)^2$ | $(4^3)^3$ | $(16^1)^3$ | $(16^1)^2$

$(2^{-4})^1$ | $(27^3)^2$ | $(27^2)^2$ | $(9^2)^2$ | $(9^3)^3$ | $(27^5)^2$ | $(4^4)^4$ | $(16^2)^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $(2^5)^6$ | $4^{36}$ |
| $(8^3)^8$ | $64^0$ |
| $(4^3)^4$ | $16^{30}$ |
| $\left((4^3)^0\right)^8$ | $4^{14}$ |
| $(2^4)^7$ | $8^{10}$ |
| $\left((2^4)^5\right)^6$ | $2^{24}$ |

Potęgowanie potęgi - zadanie interaktywne

## Ćwiczenie 9

Przeciągnij i upuść.

$8^4 =$ ____

$9^5 =$ ____

$125^3 =$ ____

$125^2 =$ ____

$81^4 =$ ____

$64^3 =$ ____

$25^6 =$ ____

$256^2 =$ ____

$2^4$ $2^{18}$ $2^{20}$ $3^{10}$ $3^{14}$ $3^{11}$ $2^{16}$ $5^{16}$ $3^{16}$ $5^{12}$ $2^{15}$ $5^4$ $5^{13}$

$2^{19}$ $3^5$ $5^9$ $2^{21}$ $5^6$ $2^{16}$ $2^{12}$ $5^{10}$ $2^9$ $3^{12}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10

Wynikiem potęgowania $\left((-2)^3\right)^2$ jest liczba

- ○ $64$
- ○ $-32$
- ○ $-64$
- ○ $32$

**Ćwiczenie 11**

Wyrażenie $(a+b)^{12}$ nie jest równe

- $\left((a+b)^{10}\right)^{2}$
- $\left((a+b)^{4}\right)^{3}$
- $\left((a+b)^{6}\right)^{2}$
- $\left((a+b)^{3}\right)^{4}$

**Ćwiczenie 12**

Jeżeli $c^9 = 27^3$, to

- $c = 18$
- $c = 6$
- $c = 9$
- $c = 3$

**Ćwiczenie 13**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] $\left(2^3\right)^5 = 2^{10} \cdot 2^5$
- [ ] Jeżeli $2^7 = 8^c$, to $c = 2$.
- [ ] Liczby $2^4$i $(-2)^4$ są równe.
- [ ] Potęgi $3^{4^2}$ i $3^{2^4}$ są równe.
- [ ] Liczby $-2^4$ i $(-2)^4$ są równe.
- [ ] Potęgi $2^{3^2}$ i $2^{2^3}$ są równe.
- [ ] $\left(2^3\right)^5 = 2^3 \cdot 2^5$
- [ ] Liczby $-2^3$ i $(-2)^3$ są równe.
- [ ] Jeżeli $2^8 = 8^c$, to $c = 2$.

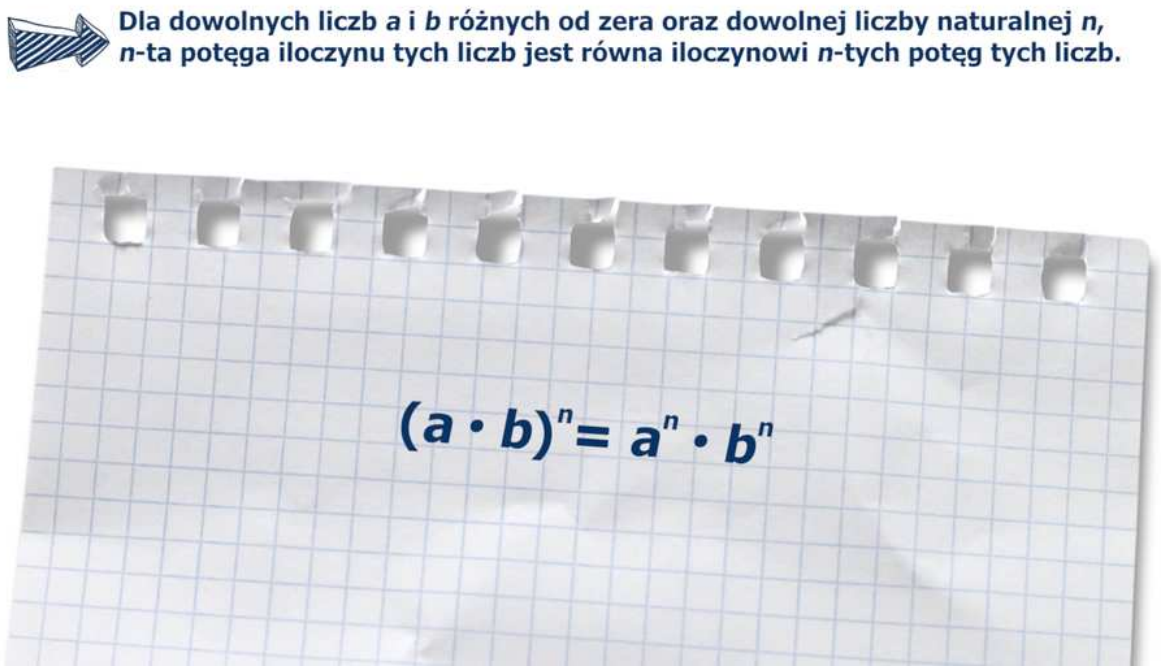
# Iloczyn i iloraz potęg o takich samych wykładnikach

**Twierdzenie: Działania na potęgach**

- **Iloczyn potęg o takich samych wykładnikach**

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej $n$ prawdziwa jest równość

$$a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n.$$




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

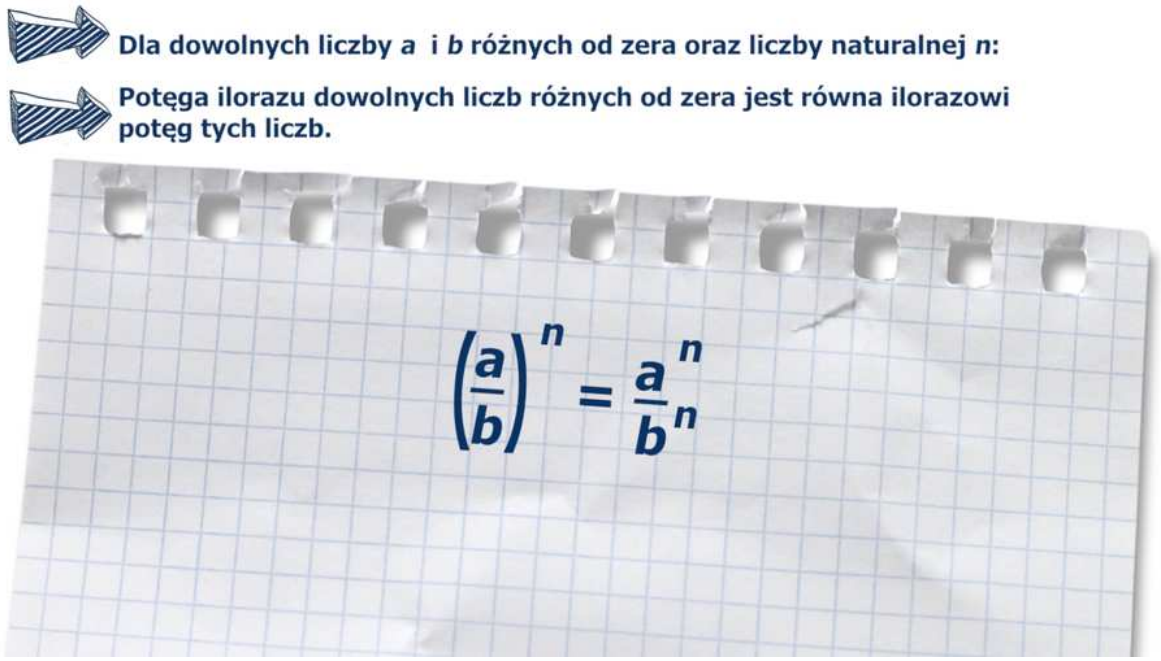
Animacja

---

- **Iloraz potęg o takich samych wykładnikach**

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej $n$ prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Animacja

---

**Ćwiczenie 1**

Oblicz w pamięci.

1. $2^5 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^5$
2. $3^3 \bullet \left(\frac{1}{9}\right)^3$
3. $(-4)^3 \bullet \left(-\frac{1}{8}\right)^3$
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \bullet (-8)^2$
5. $(-0{,}1)^3 \bullet (10)^3$

## Ćwiczenie 2

Zapisz bez użycia nawiasów.

1. $(\mathrm{xy})^2$
2. $(3x)^3$
3. $\left(\frac{1}{2}\mathrm{xy}\right)^4$
4. $\left(0{,}2x^2\right)^2$
5. $\left(2x^3 \bullet \frac{1}{3}y\right)^3$

## Ćwiczenie 3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 4

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 5

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6

Przeciągnij i upuść.

$2^3 \cdot 25^3 =$ ____

$12^2 \cdot (-5)^2 =$ ____

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 8^4 =$ ____

$\left(2\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (-2)^4 =$ ____

$\left(-\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^5 =$ ____

$(-0{,}01)^3 \cdot 10^3 =$ ____

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 8^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$ ____

$(0{,}75)^2 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2^2 =$ ____

$4^5$ | $52^3$ | $-\frac{1}{10}^3$ | $4^5$ | $5^8$ | $5^4$ | $4^3$ | $(-60)^3$ | $-\frac{1}{10}^4$ | $3^5$ | $-\frac{1}{10}^5$ | $2^2$

$-5^4$ | $1^5$ | $50^3$ | $(-60)^2$ | $4^4$ | $2^5$ | $(-60)^5$ | $2^4$ | $2^4$ | $25^3$ | $2^6$ | $4^6$

Iloczyn i iloraz potęg o tych samych wykładnikach - zadanie interaktywne

## Ćwiczenie 7

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $\left(4a^2b\right)^2$ | $16a^4b^4$ |
| $\left(2a^2b^2 \cdot 2a\right)^2$ | $16a^4b^2$ |
| $\left(4ab^3\right)^3$ | $64a^8b^6$ |
| $\left(2a^0b^9 \cdot 2ab^0\right)^3$ | $16a^6b^4$ |
| $\left(8a^3bab^2\right)^2$ | $64a^3b^9$ |
| $(2ab)^4$ | $64\left(ab^9\right)^3$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8

Oblicz w pamięci.

1. $2^3 \ : \ (-2)^3$
2. $(-3)^2 \ : \ (-3)^2$
3. $\left(\frac{1}{5}\right)^1 \ : \ 5^1$
4. $(0{,}2)^5 \ : \ (0{,}4)^5$
5. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(-\frac{1}{4}\right)^2$

## Ćwiczenie 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 11

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 12

Zapisz bez użycia nawiasów.

1. $(x \ : y)^3$
2. $(4 \ : x)^2$
3. $(3x \ : y)^4$
4. $\left(0{,}3 \ : x^2\right)^2$
5. $\left(2x^2 \ : 3y\right)^3$

## Ćwiczenie 13

Przeciągnij i upuść.

$20^3 : 10^3 =$ ____

$25^2 : (-5)^2 =$ ____

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 : \left(\frac{1}{2}\right)^4 =$ ____

$\left(-\frac{3}{2}\right)^5 : \left(-\frac{3}{2}\right)^5 =$ ____

$\left(2\frac{1}{2}\right)^4 : \left(-\frac{1}{2}\right)^4 =$ ____

$(-0{,}01)^3 : (0{,}1)^3 =$ ____

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 8^4 : 2^4 =$ ____

$(0{,}75)^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^2 : 2^2 =$ ____

$5^4$ | $10^4$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ | $3^4$ | $1^5$ | $2^3$ | $2^4$ | $5^{20}$ | $-5^4$ | $1^4$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ | $-\left(\frac{4}{10}\right)^3$

$2^9$ | $3^5$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ | $2^4$ | $-\left(\frac{2}{10}\right)^3$ | $5^{10}$ | $2^7$ | $4^5$ | $10^5$ | $5^2$ | $-\left(\frac{1}{10}\right)^3$ | $-5^6$

## Ćwiczenie 14

Przeciągnij i upuść.

| | |
|---|---|
| $\left(2a^3b^0 : 2a^0b\right)^3$ | $64a^3 : b^9$ |
| $\left(2a^2b^2 : 2ab^3\right)^2$ | $a^9 : b^3$ |
| $\left(4a^2 : 2b\right)^2$ | $a^2 : b^2$ |
| $(2a : b)^4$ | $4a^4 : b^2$ |
| $\left(4a : b^3\right)^3$ | $16a^4 : b^4$ |
| $\left(8a^3b : ab^2\right)^2$ | $64a^4 : b^2$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 15

Przeciągnij i upuść.

$2^3 \cdot 4^3 \cdot$ [ ] $= 16^3$

$3^2 \cdot$ [ ] $: 9^2 = 3^2$

$25^5 :$ [ ] $: 5^5 = 1^5$

$32^4 : 2^4 : 4^4$ [ ] $= 2^4$

$4^2 \cdot 2^2 : 4^2 \cdot$ [ ] $= 16^2$

$27^5 \cdot 2^5 : 9^5 :$ [ ] $= 2^5$

$5^6$ | $3^6$ | $8^4$ | $8^2$ | $8^5$ | $3^7$ | $5^5$ | $9^4$ | $2^5$ | $2^4$ | $3^5$ | $9^2$ | $5^7$ | $2^3$ | $9^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 16

Iloraz $80^{15} : (-20)^{15}$ jest równy

- ○ $(-4)^{15}$
- ○ $(-4)^{0}$
- ○ $4^{15}$
- ○ $40^{15}$

**Ćwiczenie 17**

Wyrażenie $\left(3x^3y\right)^2$ jest równe

- $3x^6y^2$
- $9x^6y^2$
- $3x^5y^2$
- $9x^3y^2$

**Ćwiczenie 18**

Wyrażenie $\left(\frac{9x^2y}{3xy^2}\right)^4$ zapisane bez użycia nawiasów ma postać

- $\frac{3x^4}{y^4}$
- $\frac{3^4x^4}{y^4}$
- $\frac{9x^2y^4}{3xy^8}$
- $\frac{9^4x^8y^4}{3^4xy^8}$

**Ćwiczenie 19**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Wyrażenie $\left(\frac{2a^3 \bullet b^2}{3b}\right)^2$ po uproszczeniu wynosi $\frac{4a^6b^2}{9}$.
- [ ] Wyrażenie $\left(\frac{2a^3 \bullet b^2}{3b}\right)^2$ po uproszczeniu wynosi $\frac{2a^6b^2}{3}$.
- [ ] Iloraz $0{,}0001^5 \ : 0{,}001^5$ zapisany w postaci potęgi to $0{,}1^5$.
- [ ] Wyrażenie $\left(-2x^2y\right)^3$ po uproszczeniu wynosi $-8x^6y^3$.
- [ ] Iloczyn $2^3 \bullet 3^3 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^3 \bullet 2^3$ zapisany w postaci potęgi to $6^{12}$.
- [ ] Iloczyn $2^3 \bullet 3^3 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^3 \bullet 2^3$ zapisany w postaci potęgi to $6^3$.
- [ ] Wyrażenie $\left(-2x^2y\right)^3$ po uproszczeniu wynosi $8x^6y^3$.
- [ ] Iloraz $0{,}0001^5 \ : 0{,}001^5$ zapisany w postaci potęgi to $0{,}1^{10}$.

**Ćwiczenie 20**

Jak zmieni się pole kwadratu o boku $x\mathrm{cm}$, jeżeli jego bok zwiększymy czterokrotnie?

# Porównywanie potęg

**Przykład 1**

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D7kO55W58

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Zapamiętaj!**

Jeżeli liczby naturalne dodatnie $m$ i $n$ spełniają warunek $n > m$, liczba $a$ jest większa od 1, to

$$a^n > a^m$$

Rozważmy teraz potęgi o podstawach dodatnich, mniejszych od 1.

**Przykład 2**

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D7kO55W58

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Zapamiętaj!**

Jeżeli liczby naturalne dodatnie $m$ i $n$ spełniają warunek $n > m$, liczba $a$ jest liczbą dodatnią i mniejszą od 1, to

$$a^n < a^m$$

**Przykład 3**

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D7kO55W58

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Zapamiętaj!**

Jeżeli liczby dodatnie $a$ i $b$ spełniają warunek $a < b$, $n$ jest liczbą naturalną dodatnią, to $a^n < b^n$.

**Przykład 4**

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D7kO55W58

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Ćwiczenie 1**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 2**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 3

Uporządkuj liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$16^0$

$2^{13}$

$8^2$

$64^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 4

Porównaj potęgi.

1. $3^5$ i $9^3$
2. $2^4$ i $4^2$
3. $4^4$ i $8^2$
4. $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ i $\left(\frac{9}{16}\right)^2$
5. $(0{,}09)^3$ i $(0{,}3)^3$
6. $3^4 \bullet 2^4$ i $6^4$
7. $\left(2^3 \bullet 4^2\right)^4$ i $2^{12} \bullet 4^8$
8. $\left(3^2 \bullet 5^2\right)^4$ i $3^8 \bullet 5^6$

## Ćwiczenie 5

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 7**

Która nierówność jest nieprawdziwa?

- $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$
- $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \geq \left(\frac{1}{6}\right)^2$
- $4^3 < 4^4$
- $9^3 > 9^0$

**Ćwiczenie 8**

Potęga $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ jest od potęgi $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

- $4$ razy mniejsza
- $4$ razy większa
- o połowę mniejsza
- o połowę większa

**Ćwiczenie 9**

Wskaż potęgi: $3^9$ , $27^5$ , $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ , $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ , $81^2$ uporządkowane malejąco.

- $\left(\frac{1}{3}\right)^4, \left(\frac{1}{3}\right)^3, 27^5,\ 3^9, 81^2$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^4, 27^5, 81^2, 3^9$
- $27^5, 3^9, 81^2, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^4$
- $27^5, 81^2, 3^9, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^4$

**Ćwiczenie 10**

Odpowiedz na pytania.

1. Ile razy liczba $40^5$ jest większa od liczby $10^4$?
2. Ile razy liczba $160^4$ jest większa od liczby $40^3$?

**Ćwiczenie 11**

Która liczba $\left(3^3\right)^3, 3^{33}, 3^{3^3}$ jest najmniejsza, a która największa?

# Działania na potęgach o wykładniku naturalnym

## Ćwiczenie 1

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $a^{12} : a^{11}$ | $a^5 : a^2$ |
| $a^3 \cdot a^5$ | $a^3 \cdot a \cdot a$ |
| $a^8 \cdot a : a^2$ | $a \cdot a^7$ |
| $a^8 : a^5 \cdot a^2$ | $a^0 \cdot a^{10} : a^3$ |
| $a^2 \cdot a^1$ | $a^0$ |
| $a^3 : a^3$ | $a^7 \cdot a^4 : a^{10}$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 2

Oblicz.

1. $\frac{2^5 \bullet 2^3}{2^7 : 2^3}$
2. $\frac{5 \bullet 3^7}{3^8 : 3^2}$
3. $\frac{4^7 : 4^5}{17 - 4^0}$
4. $\frac{5^3 - 2 \bullet 5^2}{5}$

## Ćwiczenie 3

Przeciągnij i upuść.

$2^3 \cdot 4 : 2^2 =$ ____

$27 :$ ____ $\cdot 3^5 = 3^6$

$4^4 :$ ____ $\cdot 16 \cdot 64 = 4^8$

$625 : 5^2 :$ ____ $: 5^2 = 1$

$5^1$ | $3^4$ | $2^5$ | $3^2$ | $4^1$ | $4^3$ | $2^3$ | $2^4$ | $5^0$ | $5^2$ | $4^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 4

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $-4 \cdot 3^3 \cdot (-2)^5 \cdot 27$ | $2^9 \cdot 3^6$ |
| $32 \cdot 9 \cdot 2^4 : 3^0 \cdot (-3)^4$ | $2^7 \cdot 3^5$ |
| $(-2)^{13} : 64 \cdot 3^3 \cdot (-9)$ | $2^7 \cdot 3^6$ |
| $-243 \cdot 3^2 \cdot 1024 : 2 : (-2)^3$ | $2^6 \cdot 3^7$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 5

Zapisz w postaci jednej potęgi.

1. $2^3 + 2^3$
2. $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4$
3. $2 \bullet \left(2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5\right)$
4. $\left(3^3 + 3^3 + 3^3\right) \ : 3$

**Ćwiczenie 6**

Zapisz na dwa sposoby daną potęgę w postaci iloczynu potęg o takiej samej podstawie.

1. $2^{15}$
2. $(-5)^{23}$
3. $3^{2x+5}$
4. $10^{x+2y}$

**Wskazówka**

Zadanie ma wiele rozwiązań np.:

1. $2^{15} = 2^{10} \bullet 2^5$ lub $2^{15} = 2^8 \bullet 2^7$
2. $(-5)^{23} = (-5)^{10} \bullet (-5)^{13}$ lub $(-5)^{23} = (-5)^3 \bullet (-5)^{20}$
3. $3^{2x+5} = 3^{2x} \bullet 3^5$ lub $3^{2x+5} = 3^x \bullet 3^{x+5}$
4. $10^{x+2y} = 10^x \bullet 10^{2y}$ lub $10^{x+2y} = 10^{x+y} \bullet 10^y$

**Ćwiczenie 7**

Zapisz na dwa sposoby daną potęgę w postaci ilorazu potęg o takiej samej podstawie.

1. $2^{15}$
2. $(-5)^{23}$
3. $3^{2x-5}$
4. $10^{x-2y}$

**Wskazówka**

Wskazówka: zadanie ma wiele rozwiązań np.:

1. $2^{15} = 2^{20} : 2^5$ lub $2^{15} = 2^{35} : 2^{20}$
2. $(-5)^{23} = (-5)^{25} : (-5)^2$ lub $(-5)^{23} = (-5)^{35} : (-5)^{12}$
3. $3^{2x-5} = 3^{2x} : 3^5$ lub $3^{2x-5} = 3^x : 3^{5-x}$
4. $10^{x-2y} = 10^x : 10^{2y}$ lub $10^{x-2y} = 10^{x-y} : 10^y$

**Ćwiczenie 8**

Zakładając, że $a \neq 0$, zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

1. $\left(a^8 \bullet a^4\right) : \left(a^4 \bullet a\right)$
2. $a^8 : \left[a^9 : \left(a^2 \bullet a^4\right)\right]$
3. $\frac{a^3 \bullet a^2 : a^2}{a^7 : a^6}$
4. $\frac{a^3 \bullet \left[\left(a^4 \bullet a^5\right) : \left(a^3 \bullet a^3\right)\right]}{a^8 : \left(a^2 \bullet a\right)}$

**Ćwiczenie 9**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10

Przeciągnij i upuść.

$(2x)^2 \cdot x^2 =$ ☐

$(y^3)^6 \cdot (y)^6 =$ ☐

$(8z^4)^4 \cdot (\frac{1}{2}z)^4 =$ ☐

$(\frac{1}{4}x^3y)^2 \cdot (2x^2y^2)^2 =$ ☐

$(\frac{1}{2}p^3q^4)^5 \cdot (-\frac{4}{p}q^2)^5 =$ ☐

$(9k)^3 \cdot (\frac{1}{3}k)^3 \cdot (\frac{1}{3k^2})^3 =$ ☐

$2^3$ | $(-2p^2q^6)^5$ | $1^3$ | $(y^4)^9$ | $3^3$ | $(4z^5)^8$ | $(-2p^2q^6)^8$ | $(\frac{1}{2}x^5y^3)^4$

$(2x^2)^4$ | $(y^4)^7$ | $(4z^5)^4$ | $(2x^2)^2$ | $(4z^5)^3$ | $(y^4)^6$ | $(-2p^2q^6)^7$ | $(\frac{1}{2}x^5y^3)^6$

$(2x^2)^5$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 11

Przeciągnij i upuść.

$(2x)^3 : x^3 =$ ____

$(y^3)^6 : (y)^6 =$ ____

$(8z^4)^4 : (2z)^4 =$ ____

$(6x^3y^2)^2 : (2x^2y^2)^2 =$ ____

$\left(\frac{1}{2}p^3q^4\right)^5 : \left(-\frac{1}{4p}q^2\right)^5 =$ ____

$(9k)^3 : \left(\frac{1}{3}k\right)^3 \cdot (3k^2)^3 =$ ____

$(3x)^2$ | $2^4$ | $2^3$ | $(-2p^4q^2)^5$ | $(3x)^4$ | $(y^2)^9$ | $(81k^2)^3$ | $(y^2)^8$

$(-2p^4q^2)^8$ | $(4z^3)^4$ | $(3x)^3$ | $(81k^2)^6$ | $(y^2)^6$ | $(81k^2)^4$ | $(4z^3)^8$ | $(4z^3)^6$

$(-2p^4q^2)^6$ | $2^5$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 12

Oblicz „sprytnie”.

1. $(2{,}5)^3 \bullet 2^4$
2. $(0{,}2)^4 \bullet 10^5$
3. $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \bullet 3^6$
4. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \bullet (1{,}5)^3$
5. $12^2 : 3^3$
6. $(2{,}4)^3 : (0{,}3)^2$

**Ćwiczenie 13**

Zapisz na dwa sposoby daną potęgę w postaci iloczynu potęg o takich samych wykładnikach.

1. $2^{15}$
2. $(-5)^{23}$
3. $(4\,\mathrm{xy})^{6}$
4. $\left(2x^3y^4\right)^9$

**Ćwiczenie 14**

Zapisz na dwa sposoby daną potęgę w postaci ilorazu potęg o takich samych wykładnikach.

1. $2^{15}$
2. $(-5)^{23}$
3. $(4\,\mathrm{xy})^{6}$
4. $\left(2x^3y^{4)}\right.^9$

**Ćwiczenie 15**

Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość liczbową.

1. $\left(3a^2\right)^3 : \left(\frac{1}{2}a^2\right)^2$, dla $a = -1$
2. $\left(6x^2y^3\right)^5 : \left(6x^2y\right)^4$, dla $x = -\frac{1}{2}$ i $y = -1$
3. $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3 \bullet \left(\frac{4b^2}{3a}\right)^2$, dla $a = -\frac{1}{2}$i $\mathrm{b} = 4$
4. $\left[\left(2x^3y\right)^6 \bullet \left(2x^2\,y^5\right)^2\right] : \left[\left(x^2y\right)^2 \bullet \left(4x^3y^5\right)^2\right]$, dla $x = -1$ i $y = -\frac{1}{3}$

**Ćwiczenie 16**

Podaj ostatnią cyfrę liczby $k$.

1. $k = 2^{28}$
2. $k = 3^{51}$
3. $k = 5^{67}$

**Ćwiczenie 17**

Rozwiąż równanie.

1. $2^x = 128$
2. $5^{2x} = 1$

**Ćwiczenie 18**

Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ liczba $10^n + 2$ jest podzielna przez $3$.

**Ćwiczenie 19**

Rozwiąż równanie.

1. $3^{x+2} = 81$
2. $2^{x-4} = 2$

**Ćwiczenie 20**

Uzasadnij, że liczba $2^{16} + 2^{15} + 2^{14}$ jest podzielna przez $7$.

# Pierwiastki kwadratowe i sześcienne

## Ćwiczenie 1

Przeciągnij i upuść.

$1^2 =$ ____

$0^2 =$ ____

$(-11)^2 =$ ____

$4^2 =$ ____

$(0,5)^2 =$ ____

$(-7)^2 =$ ____

$0$ $2$ $-1$ $5$ $16$ $32$ $-22$ $0{,}5$ $-14$ $12$ $49$ $1$ $8$ $22$
$0{,}25$ $64$ $0{,}025$ $-2$ $121$ $-121$ $14$ $-49$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 2

Uzupełnij zapisy, przeciągając takie liczby niedodatnie, aby ich kwadraty miały podaną wartość.

$16$ ____

$0{,}25$ ____

$1$ ____

$49$ ____

$121$ ____

$0$ ____

$-2$ $4$ $1$ $2$ $-0{,}5$ $-11$ $11$ $-5$ $-4$ $7$ $-0{,}05$ $-7$ $8$
$0{,}05$ $-1$ $0{,}5$ $0$ $5$ $-8$

**Zapamiętaj!**

Szukanie liczby nieujemnej na podstawie danego jej kwadratu nazywa się **obliczaniem pierwiastka kwadratowego** z danej liczby nieujemnej.

**Definicja: Pierwiastek kwadratowy**

Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej $a$ nazywamy taką liczbę nieujemną $b$, której kwadrat jest równy liczbie $a$. Pierwiastek ten oznaczamy symbolem $\sqrt{a}$.
Pierwiastek kwadratowy nazywany jest również pierwiastkiem stopnia drugiego.
Mówimy, że liczba $a$ w wyrażeniu $\sqrt{a}$ to liczba podpierwiastkowa.

Jeśli $a \geq 0$ i $b \geq 0$, to $\sqrt{a} = b$, wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2 = a$.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 1**

TABELA

| | |
|---|---|
| $\sqrt{16} = 4$ , bo $4^2 = 16$ | $\sqrt{36} = 6$, bo $6^2 = 36$ |
| $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, bo $0{,}5^2 = 0{,}25$ | $\sqrt{81} = 9$, bo $9^2 = 81$ |
| $\sqrt{1} = 1$, bo $1^2 = 1$ | $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, bo $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ |
| $\sqrt{49} = 7$, bo $7^2 = 49$ | $\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$, bo $(1{,}3)^2 = 1{,}69$ |
| $\sqrt{121} = 11$, bo $11^2 = 121$ | $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ , bo $\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1\frac{9}{16}$ |
| $\sqrt{0} = 0$, bo $0^2 = 0$ | |

Pierwiastków kwadratowych z liczb ujemnych nie określamy, ponieważ nie znamy takich liczb, które podniesione do kwadratu mają wartość ujemną.

**Przykład 2**

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Zapamiętaj!**

Dla dowolnej liczby nieujemnej $a$ zachodzą równości:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \sqrt{a^2} = a, \sqrt{a} \bullet \sqrt{a} = a.$$

Na przykład:
$\sqrt{57} \bullet \sqrt{57} = 57$
$\left(\sqrt{129}\right)^2 = 129$
$\sqrt{698^2} = 698$

**Przykład 3**

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Zapamiętaj!**

Dla dowolnej liczby $a$ zachodzą równości:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a, \sqrt[3]{a^3} = a, \sqrt[3]{a} \bullet \sqrt[3]{a} \bullet \sqrt[3]{a} = a$$

Na przykład:
$\sqrt[3]{74} \bullet \sqrt[3]{74} \bullet \sqrt[3]{74} = 74$

$$\left(\sqrt[3]{127}\right)^3 = 127$$
$$\sqrt[3]{6{,}435^3} = 6{,}435$$

**Ćwiczenie 3**

Przeciągnij i upuść.

$2^3 =$ ☐

$(-1)^3 =$ ☐

$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 =$ ☐

$4^3 =$ ☐

$(-5)^3 =$ ☐

$10^3 =$ ☐

$64$ | $3$ | $6$ | $-125$ | $-\frac{3}{27}$ | $32$ | $\frac{1}{27}$ | $-\frac{1}{27}$ | $12$ | $-1$ | $-6$ | $1000$ | $125$ | $-8$ | $30$ | $1$ | $\frac{3}{27}$ | $-15$ | $8$ | $100$ | $16$ | $-3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Zapamiętaj!**

Szukanie liczby na podstawie danego jej sześcianu nazywa się obliczaniem pierwiastka sześciennego z danej liczby.

**Definicja: Pierwiastek sześcienny**

- Pierwiastkiem sześciennym z liczby $a$ nazywamy taką liczbę $b$, której sześcian jest równy liczbie $a$. Pierwiastek ten oznaczamy symbolem $\sqrt[3]{a}$.
- Pierwiastek sześcienny nazywany jest również pierwiastkiem stopnia trzeciego.
- $\sqrt[3]{a} = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b^3 = a$.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.


**Przykład 4**

- $\sqrt[3]{64} = 4$, bo $4^3 = 64$
- $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$, bo$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$
- $\sqrt[3]{-1} = -1$, bo $(-1)^3 = -1$
- $\sqrt[3]{8} = 2$, bo$2^3 = 8$
- $\sqrt[3]{1000} = 10$, bo $10^3 = 1000$
- $\sqrt[3]{-125} = -5$, bo $(-5)^3 = -125$
- $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$, bo $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$
- $\sqrt[3]{27} = 3$, bo $3^3 = 27$
- $\sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{4}{5}$, bo $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$
- $\sqrt[3]{-0{,}008} = -0{,}2$, bo $(-0{,}2)^3 = -0{,}008$
- $\sqrt[3]{-\frac{1000}{343}} = -\frac{10}{7}$, bo, $\left(-\frac{10}{7}\right)^3 = -\frac{1000}{343}$

**Reguła:**

Dla dowolnej liczby $a$ zachodzi równość $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$.
Na przykład

$$\sqrt[3]{-125} = -5, \ -\sqrt[3]{125} = -5,$$

czyli

$$\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -5.$$

**Przykład 5**

Nie zawsze jest możliwe podanie takiej liczby, której druga lub trzecia potęga jest równa liczbie podpierwiastkowej. Zastanówmy się, ile jest równy $\sqrt{5}$. Zgodnie z pojęciem pierwiastka kwadratowego, jest to taka liczba nieujemna, której kwadrat jest równy 5.
Szukaną liczbą nie jest 2, ponieważ $2^2 = 4 < 5$, ani 3, ponieważ $3^2 = 9 > 5$.
Zatem $\sqrt{5}$ jest większy od 2 i mniejszy od 3.
Spróbujmy dokładniej przybliżyć wartość $\sqrt{5}$ poprzez wyznaczanie kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego tej liczby. Obliczmy kwadraty liczb od 2,1 do 2,9.

$$(2{,}1)^2 = 4{,}41$$

$$(2{,}2)^2 = 4{,}84$$

$$(2{,}3)^2 = 5{,}29$$

$$(2{,}4)^2 = 5{,}76$$

$$(2{,}5)^2 = 6{,}25$$

$$(2{,}6)^2 = 6{,}76$$

$$(2{,}7)^2 = 7{,}29$$

$$(2{,}8)^2 = 7{,}84$$

$$(2{,}9)^2 = 8{,}41$$

Ponieważ $(2{,}2)^2 = 4{,}84 < 5 < 5{,}29 = (2{,}4)^2$, to $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$.
Postępując podobnie, czyli obliczając kwadraty liczb od 2,21 do 2,29, otrzymamy:

$$(2{,}23)^2 = 4{,}9729$$

$$(2{,}24)^2 = 5{,}0176$$

Ponieważ $(2{,}23)^2 = 4{,}9729 < 5 < 5{,}0176 = (2{,}23)^2$, to $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$.
Obliczając kwadraty liczb od 2,231 do 2,232, otrzymamy:

$$(2{,}236)^2 = 4{,}999696$$

$$(2{,}237)^2 = 5{,}004169$$

Ponieważ $(2{,}236)^2 = 4{,}999696 < 5 < 5{,}004169 = (2{,}237)^2$, to
$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$
Postępując w podobny sposób, wyznaczymy kolejne cyfry po przecinku, które występują w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\sqrt{5}$.
Otrzymujemy

$$\sqrt{5} \approx 2{,}236067978$$

W rozwinięciu dziesiętnym liczby $\sqrt{5}$ nie powtarza się żadna grupa cyfr i jest ich nieskończenie wiele. Nie można zapisać liczby $\sqrt{5}$ w postaci liczby wymiernej. Zatem liczba $\sqrt{5}$ ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe. Jest ona przykładem liczby niewymiernej. Jej wartość podawana jest najczęściej w przybliżeniu do dwóch miejsc po przecinku i wynosi: $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Zapamiętaj!**

**Liczba niewymierna** to liczba, której nie można przedstawić w postaci ułamka $\frac{a}{b}$, gdzie $a$, $b$ są liczbami całkowitymi i $b \neq 0$.
Każda liczba niewymierna ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe.

**Przykład 6**

- Przykładami liczb, które mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe, są:

$\pi = 3{,}14$
$2{,}30300300030000300000....$
$0{,}12345678910111213141 5.....$

- Przykładami liczb niewymiernych są pierwiastki kwadratowe z liczb dodatnich, które nie są kwadratami liczb wymiernych i pierwiastki

sześcienne z liczb, które nie są sześcianami liczb wymiernych. Na przykład:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{20}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[3]{81}, \sqrt[3]{100}.$$

Do obliczeń stosuje się ich przybliżenia, najczęściej z dokładnością do dwóch cyfr po przecinku, które otrzymujemy na przykład za pomocą kalkulatora.

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41$$

$$\sqrt{3} \approx 1{,}73$$

**Ćwiczenie 4**

Przeciągnij i upuść.

$\sqrt{25} =$ ☐

$\sqrt[3]{125} =$ ☐

$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} =$ ☐

$\sqrt{\frac{9}{64}} =$ ☐

$\sqrt{\frac{9}{16}} =$ ☐

$\sqrt[3]{64} =$ ☐

$\sqrt{16} =$ ☐

$\sqrt[3]{\frac{27}{512}} =$ ☐

$\frac{3}{10}$ | 4 | 6 | $\frac{3}{6}$ | $\frac{3}{5}$ | 9 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{9}$ | 5 | 8 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 4 | 7 | 5 | $\frac{3}{8}$

**Ćwiczenie 5**

Oblicz w pamięci.

1. $\sqrt{9}$ , $\sqrt{36}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{81}$
2. $\sqrt{100}$, $\sqrt{144}$, $\sqrt{225}$, $\sqrt{900}$
3. $\sqrt{1600}$, $\sqrt{16900}$, $\sqrt{250000,}$ $\sqrt{1000000}$
4. $\sqrt{0{,}000009}$, $\sqrt{0{,}04}$ , $\sqrt{0{,}64}$, $\sqrt{1{,}21}$, $\sqrt{6{,}25}$

**Ćwiczenie 6**

Oblicz w pamięci.

1. $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-64}$
2. $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[3]{-8000}$, $\sqrt[3]{125000}$, $\sqrt[3]{-27000}$
3. $\sqrt[3]{-0{,}001}$, $\sqrt[3]{0{,}008}$, $\sqrt[3]{-0{,}125}$, $\sqrt[3]{0{,}064}$

**Ćwiczenie 7**

Oblicz w pamięci.

1. $\sqrt{\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\frac{64}{289}}$, $\sqrt{\frac{121}{225}}$, $\sqrt{\frac{49}{900}}$, $\sqrt{\frac{100}{169}}$, $\sqrt{\frac{324}{2500}}$
2. $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$, $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$, $\sqrt[3]{-\frac{125}{1000}}$, $\sqrt[3]{\frac{216}{8000}}$, $\sqrt[3]{-\frac{27000}{125000}}$

**Ćwiczenie 8**

Oblicz.

1. $\sqrt{5\frac{1}{16}}$, $\sqrt{1\frac{11}{25}}$, $\sqrt{2\frac{14}{25}}$, $\sqrt{3\frac{13}{36}}$, $\sqrt{2\frac{2}{49}}$, $\sqrt{7\frac{1}{9}}$
2. $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$, $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}}$, $\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}$, $\sqrt[3]{-37\frac{1}{27}}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$, $\sqrt[3]{-1\frac{91}{125}}$

**Ćwiczenie 9**

Oblicz.

1. $\sqrt{676}$, $\sqrt{1024}$, $\sqrt{1089}$, $\sqrt{1764}$, $\sqrt{44100}$
2. $\sqrt[3]{729}$, $\sqrt[3]{1728}$, $\sqrt[3]{4096}$, $\sqrt[3]{10648}$, $\sqrt[3]{15625}$

## Ćwiczenie 10

Które z podanych liczb są wymierne, a które niewymierne?

Przeciągnij elementy z dolnej sekcji do górnej.

liczby wymierne

liczby niewymierne

$\sqrt{9}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt[3]{-27}$ $\sqrt{121}$

$\sqrt{1{,}4}$ $\sqrt[3]{\frac{8}{64}}$ $\sqrt{9{,}09}$

$\frac{\sqrt{4}}{3}$ $\frac{23}{\sqrt[3]{8}}$ $\sqrt{25}$

$-\sqrt[3]{-\frac{1}{1000}}$ $\sqrt[3]{-1}$ $\sqrt{\frac{25}{8}}$

$\sqrt[3]{-121}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 11

Wybierz liczby niewymierne.

- [ ] $\sqrt{2\frac{4}{9}}$
- [ ] $\sqrt{400}$
- [ ] $\sqrt{100{,}64}$
- [ ] $\sqrt{0{,}64}$
- [ ] $\sqrt{1000}$
- [ ] $\sqrt{6}$
- [ ] $\sqrt{225}$
- [ ] $\sqrt{2\frac{7}{9}}$
- [ ] $\sqrt[3]{-27}$
- [ ] $\sqrt[3]{15}$
- [ ] $\sqrt[3]{1000}$
- [ ] $\sqrt[3]{-\frac{1}{16}}$
- [ ] $\sqrt{1{,}69}$
- [ ] $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

## Ćwiczenie 12

Przeciągnij i upuść.

$\sqrt{64}$ [ ] $\sqrt[3]{64}$

$\sqrt{49}$ [ ] $\sqrt{9}$

$\sqrt{4}$ [ ] $\sqrt[3]{8}$

$-\sqrt{25}$ [ ] $-\sqrt[3]{-125}$

$\sqrt[3]{-1000}$ [ ] $-\sqrt[3]{729}$

$-\sqrt{0{,}0004}$ [ ] $\sqrt[3]{-0{,}008}$

$>$ $=$ $<$ $<$ $>$ $>$

## Ćwiczenie 13

Oblicz, jaką długość ma bok kwadratu, którego pole jest równe

1. $16\ \mathrm{mm}^2$
2. $64\ \mathrm{m}^2$
3. $0{,}0025\ cm^2$
4. $2{,}25\ \mathrm{mm}^2$
5. $1\ \mathrm{d}m^2$
6. $\frac{8}{50}\ cm^2$
7. $100\ m^2$
8. $40\ 000\ 000\ 000\ \mathrm{cm}^2$

**Ćwiczenie 14**

Oblicz długość krawędzi sześcianu, którego objętość jest równa podanej wartości.

1. $27\ \mathrm{cm}^3$
2. $0{,}064\ m^3$
3. $0{,}001\ \mathrm{d}m^3$
4. $1{,}728\ \mathrm{m}m^3$
5. $\frac{250}{432}\ m^3$
6. $8\ \mathrm{d}m^3$
7. $18\frac{26}{27}\ \mathrm{k}m^3$

**Ćwiczenie 15**

Pole powierzchni kwadratowego dywanu jest równe $3{,}24\ \mathrm{m}^2$ powierzchni. Ile taśmy wykończeniowej należy kupić na obszycie brzegów tego dywanu?

- ○ $72\ \mathrm{cm}$
- ○ $7{,}2\ \mathrm{cm}$
- ○ $720\ \mathrm{cm}$
- ○ $7200\ m$

## Ćwiczenie 16

Uporządkuj liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$-\sqrt{1{,}44}$

$\sqrt{25}$

$-\sqrt[3]{1}$

$\sqrt[3]{0{,}008}$

$\sqrt{\frac{1}{625}}$

$-\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$

$\sqrt[3]{0}$

$-\sqrt[3]{125}$

$\sqrt{\frac{9}{25}}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 17

Przeciągnij i upuść.

$\square = 6$

$\square = \frac{4}{9}$

$\square = 0{,}12$

$\square =- 0{,}2$

$\square = 4$

$\square =- 0{,}3$

$\sqrt{\frac{15}{82}}$ $\sqrt[3]{-0{,}008}$ $\sqrt[3]{-0{,}004}$ $\sqrt{0{,}14}$ $\sqrt{39}$ $\sqrt{0{,}0144}$ $-\sqrt[3]{-32}$

$\sqrt[3]{-0{,}002}$ $-\sqrt[5]{0{,}025}$ $\sqrt{36}$ $\sqrt{35}$ $\sqrt{\frac{16}{83}}$ $-\sqrt[3]{-48}$ $\sqrt{0{,}16}$ $-\sqrt[3]{-64}$

$-\sqrt[4]{0{,}021}$ $-\sqrt[3]{0{,}027}$ $\sqrt{\frac{16}{81}}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 18

Przeciągnij i upuść.

$\boxed{\phantom{xx}} = 8$

$\boxed{\phantom{xx}} = \frac{2}{7}$

$\boxed{\phantom{xx}} = 1\frac{1}{3}$

$\boxed{\phantom{xx}} =- 2$

$\boxed{\phantom{xx}} = 5$

$\boxed{\phantom{xx}} =- \frac{3}{4}$

$\boxed{\sqrt{2+60}}$ $\boxed{\sqrt[3]{7+118}}$ $\boxed{\sqrt[3]{7+119}}$ $\boxed{\sqrt{1+63}}$ $\boxed{\sqrt[3]{4+118}}$ $\boxed{\sqrt{2+61}}$

$\boxed{-\sqrt[3]{-\frac{37}{34}+1}}$ $\boxed{\sqrt{3-\frac{45}{81}}}$ $\boxed{\sqrt{-\frac{2}{9}+2}}$ $\boxed{-\sqrt[3]{-\frac{37}{64}+2}}$ $\boxed{\sqrt{-\frac{2}{8}+2}}$ $\boxed{\sqrt[3]{-6-2}}$

$\boxed{\sqrt{2-\frac{43}{49}}}$ $\boxed{\sqrt{1-\frac{45}{49}}}$ $\boxed{\sqrt{-\frac{2}{10}+2}}$ $\boxed{-\sqrt[3]{-\frac{37}{64}+1}}$ $\boxed{\sqrt[3]{-5-2}}$ $\boxed{\sqrt[3]{-6-3}}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 19

Oblicz wartość podanego wyrażenia arytmetycznego.

1. $\sqrt{36+64}$
2. $\sqrt{144}-\sqrt{100}$
3. $-\sqrt[3]{8}+\sqrt{64}$
4. $\sqrt[3]{-27}-\sqrt[3]{-1000}$
5. $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}+\sqrt{\frac{1}{25}}-\sqrt[3]{125}+\sqrt{25}$
6. $\sqrt{5\frac{1}{16}} \bullet \frac{\sqrt{4}}{27}$
7. $\sqrt{2\frac{1}{4}}-\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{-8}-\sqrt[3]{-64}$

**Ćwiczenie 20**

Oblicz wartość podanego wyrażenia arytmetycznego.

1. $\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{9}+\sqrt{4}}$
2. $\sqrt{\sqrt{64}-\sqrt[3]{64}}$
3. $\sqrt{\sqrt{144}+\sqrt{225}-\sqrt[3]{8}}$
4. $\sqrt{6^2+8^2}$
5. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}$
6. $\sqrt[3]{-5^2-10^2}$
7. $\sqrt[3]{3^3+4^3+5^3}$
8. $\sqrt[3]{6^3+8^3+10^3}$
9. $\sqrt[3]{1-\sqrt{81}}$
10. $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{8}}}$

# Własności pierwiastków

**Już wiesz**

Dla dowolnej liczby nieujemnej $a$ zachodzą równości:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

Na przykład:

$$\sqrt{57} \bullet \sqrt{57} = 57$$

$$\left(\sqrt{129}\right)^2 = 129$$

$$\sqrt{698^2} = 698$$

**Już wiesz**

Dla dowolnej liczby $a$ zachodzą równości:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$$

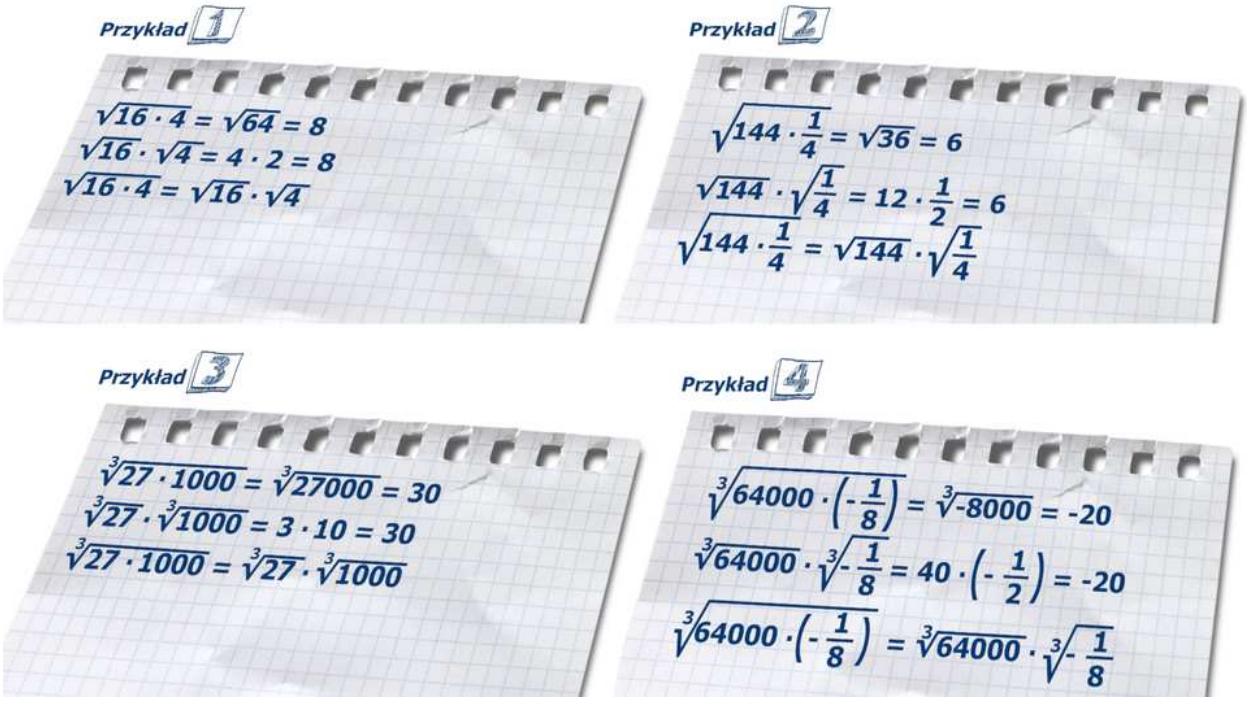
Na przykład:

$$\sqrt[3]{74} \bullet \sqrt[3]{74} \bullet \sqrt[3]{74} = 74$$

$$\left(\sqrt[3]{127}\right)^3 = 127$$

$$\sqrt[3]{6{,}435^3} = 6{,}435$$

**Przykład 1**




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Zapamiętaj!**

- Dla dowolnych liczb nieujemnych $a$ i $b$ zachodzi równość:

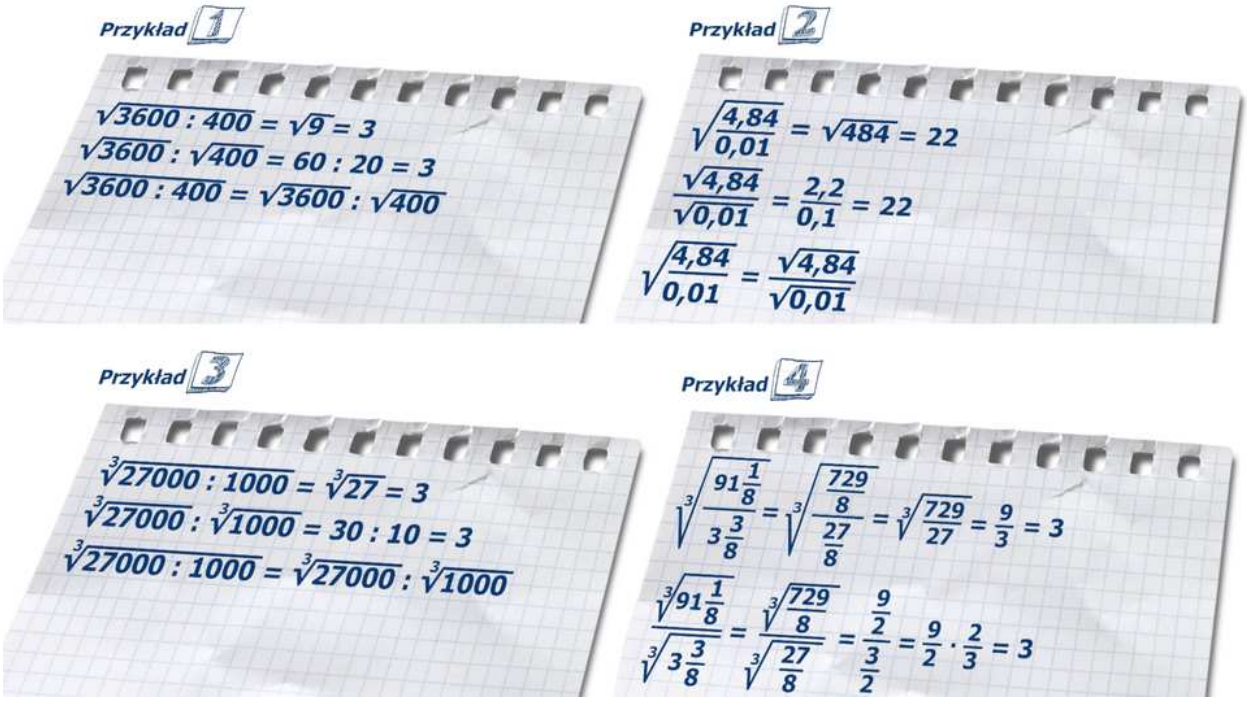
$$\sqrt{a \bullet b} = \sqrt{a} \bullet \sqrt{b}$$

- Dla dowolnych liczb $a$ i $b$ zachodzi równość:

$$\sqrt[3]{a \bullet b} = \sqrt[3]{a} \bullet \sqrt[3]{b}$$

Pierwiastek z iloczynu jest równy iloczynowi pierwiastków.

**Przykład 2**




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Zapamiętaj!**

- Dla dowolnej liczby nieujemnej $a$ i liczby dodatniej $b$ zachodzi równość:

$\sqrt{\mathrm{a}\ :b}=\sqrt{a}\ :\sqrt{b}$ oraz $\sqrt{\frac{a}{b}}=\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

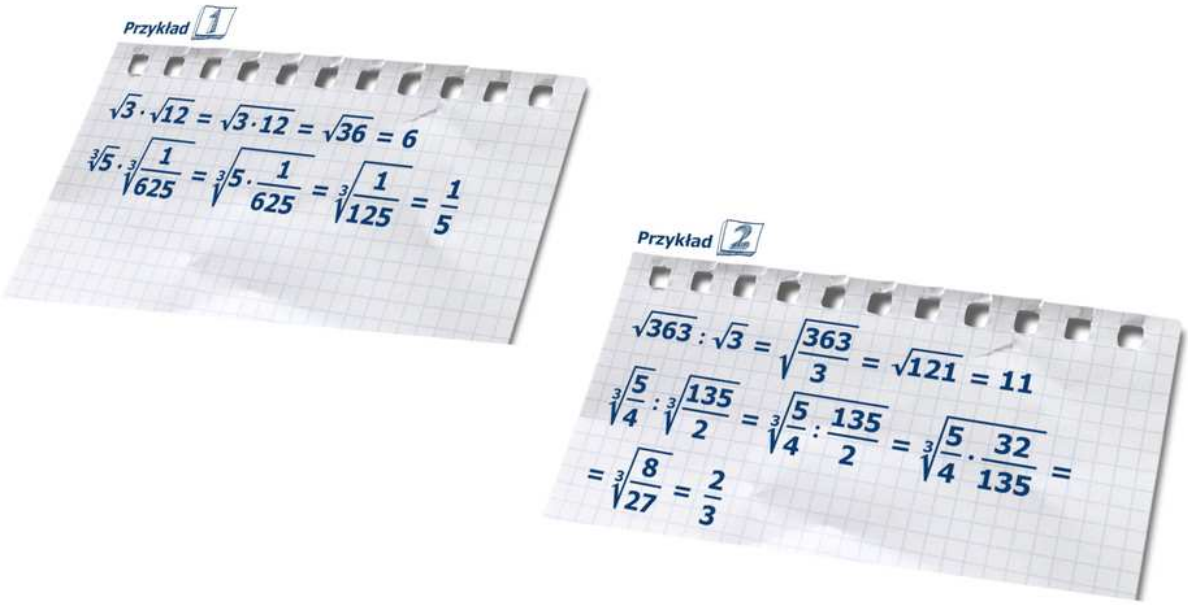
- Dla dowolnej liczby $a$ i liczby $b$ różnej od zera zachodzi równość:

$\sqrt[3]{\mathrm{a}\ :b}=\sqrt[3]{a}\ :\sqrt[3]{b}$ oraz $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\ \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

Pierwiastek z ilorazu jest równy ilorazowi pierwiastków.

Powyższe wzory ułatwiają wyznaczanie pierwiastków kwadratowych i sześciennych z bardzo dużych liczb oraz ułatwiają wykonywanie działań z pierwiastkami.

**Przykład 3**



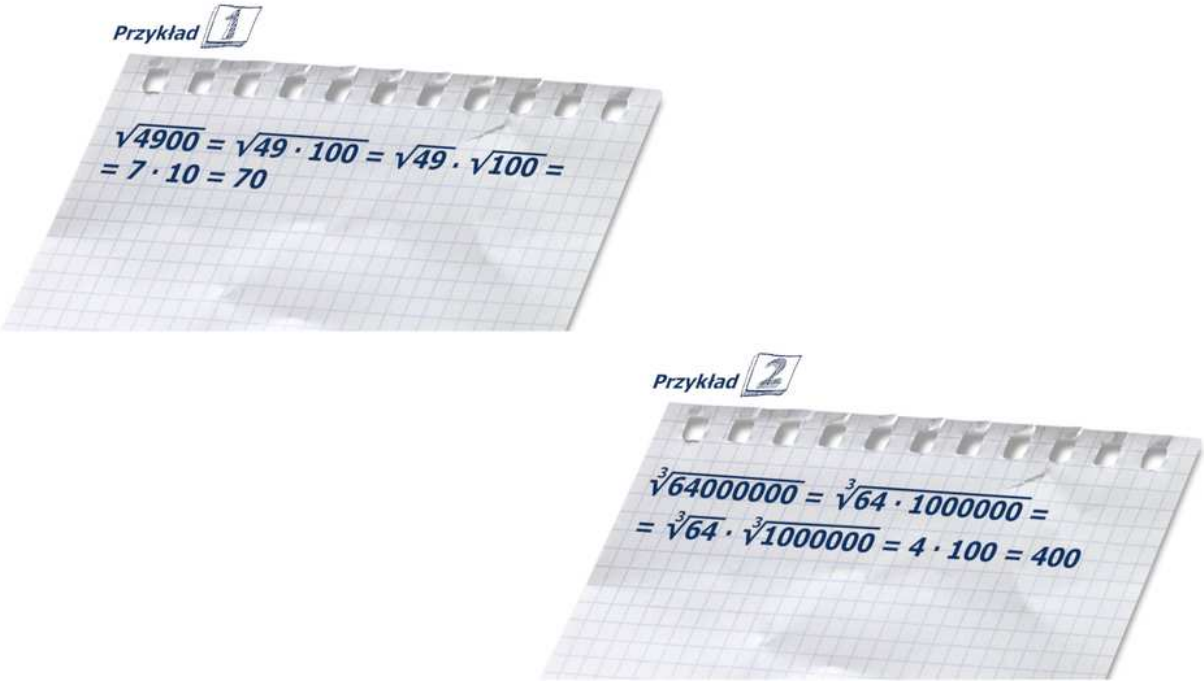

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 4**



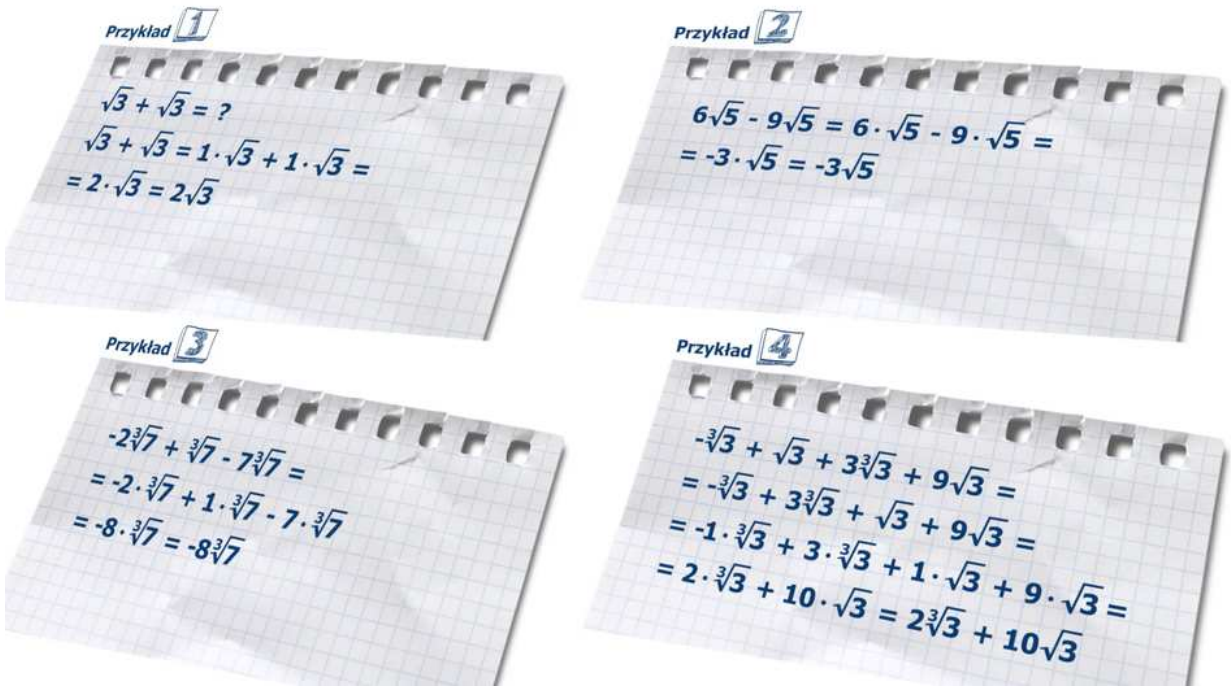

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Jeżeli liczba $a$ jest liczbą niewymierną, to zwykle piszemy: $a \bullet \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ i $a \bullet \sqrt[3]{b} = a\sqrt[3]{b}$.

**Przykład 5**




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Przykład 6**

Obliczmy wartości pierwiastków, wykorzystując prawa działań na potęgach.

- $\sqrt{2^6} = \sqrt{2^{3 \bullet 2}} = \sqrt{\left(2^3\right)^2} = 2^3 = 8$

  $\sqrt{2^6} = \sqrt{2^{3+3}} = \sqrt{2^3 \bullet 2^3} = \sqrt{2^3} \bullet \sqrt{2^3} = 2^3 = 8$

- $\sqrt{25^3} = \sqrt{25^{1+2}} = \sqrt{25^1} \bullet \sqrt{25^2} = 5 \bullet 25 = 125$
  $\left(\sqrt{2}\right)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^{2\bullet 4} = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^4 = 2^4 = 16$
  $\left(\sqrt{2}\right)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^{2+2+2+2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 \bullet \left(\sqrt{2}\right)^2 \bullet \left(\sqrt{2}\right)^2 \bullet \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2$
- $\sqrt[3]{6^9} = \sqrt[3]{6^{3\bullet 3}} = \sqrt[3]{\left(6^3\right)^3} = 6^3 = 216$
  $\sqrt[3]{6^9} = \sqrt[3]{6^{3+3+3}} = \sqrt[3]{6^3 \bullet 6^3 \bullet 6^3} = \sqrt[3]{6^3} \bullet \sqrt[3]{6^3} \bullet \sqrt[3]{6^3} = 6 \bullet 6 \bullet 6 = 216$
- $\left(-\sqrt[3]{4}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{4}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{4}\right)^{3+3} = \left(\sqrt[3]{4}\right)^3 \bullet \left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = 4 \bullet 4 = 16$
  $\left(-\sqrt[3]{4}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{4}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{4}\right)^{3\bullet 2} = \left(\left(\sqrt[3]{4}\right)^3\right)^2 = 4^2 = 16$

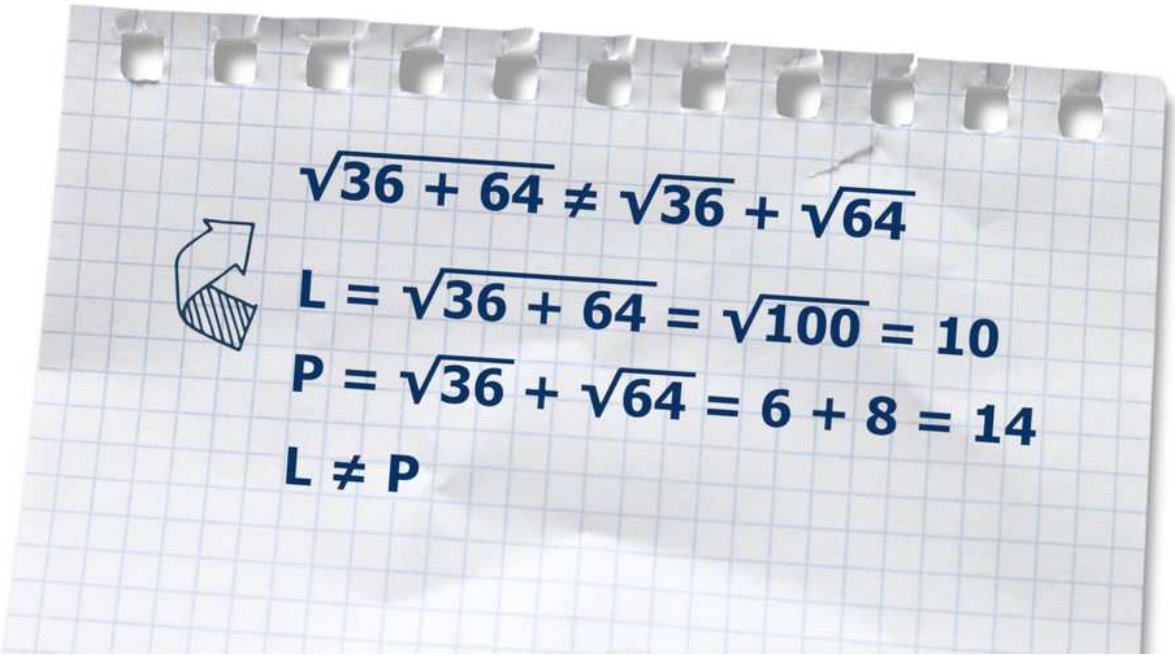
**Zapamiętaj!**

Pierwiastek z sumy nie jest równy sumie pierwiastków.
Na przykład:

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

$$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$$




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Ćwiczenie 1**

Pierwiastek kwadratowy z iloczynu liczb $1\frac{1}{4}$ i $\frac{64}{125}$ jest równy

- $\frac{16}{25}$
- $\frac{8}{5}$
- $\frac{4}{5}$
- $\frac{5}{4}$

**Ćwiczenie 2**

Pierwiastek sześcienny z ilorazu liczb $2048$ i $32$ jest równy

- $16$
- $4$
- $\frac{1}{4}$
- $8$

**Ćwiczenie 3**

Wartość wyrażenia $\sqrt[3]{10} \bullet \sqrt[3]{30} \bullet \sqrt[3]{90}$ jest

- liczbą niewymierną
- równa $30$
- równa $\sqrt[3]{2700}$
- równa $300$

**Ćwiczenie 4**

Oblicz.

1. $\sqrt{6} \bullet \sqrt{6}$
2. $\sqrt{1{,}9} \bullet \sqrt{1{,}9}$
3. $\sqrt{5\frac{6}{13}} \bullet \sqrt{5\frac{6}{13}}$
4. $\left(-\sqrt{0{,}81}\right)^2$
5. $\left(\sqrt{54}\right)^2$
6. $\sqrt{656543^2}$
7. $\sqrt{235^2}$

**Ćwiczenie 5**

Oblicz.

1. $\sqrt[3]{2} \bullet \sqrt[3]{2} \bullet \sqrt[3]{2}$
2. $\sqrt[3]{-0{,}65} \bullet \sqrt[3]{-0{,}65} \bullet \sqrt[3]{-0{,}65}$
3. $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} \bullet \sqrt[3]{\frac{1}{27}} \bullet \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$
4. $\left(\sqrt[3]{-76}\right)^3$
5. $\sqrt[3]{11} \bullet \left(\sqrt[3]{11}\right)^2$
6. $\sqrt[3]{0{,}00019^3}$
7. $\sqrt[3]{\left(-1\frac{8}{43}\right)^3}$

**Ćwiczenie 6**

Oblicz.

1. $\sqrt{3^2} + \left(\sqrt{3^2}\right)^2 + \left(\sqrt{3^2}\right)^3$
2. $\sqrt[3]{5^3} + \left(\sqrt[3]{5^3}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{5^3}\right)^3$
3. $\frac{\sqrt{10^2}+\sqrt{11^2}}{\sqrt{12^2}}$
4. $\frac{\sqrt{2} \bullet \sqrt{2} - \left(\sqrt{5}\right)^2}{\sqrt{3^2}}$
5. $\frac{\sqrt[3]{7^3}+\sqrt[3]{9^3}}{\sqrt[3]{11^3}}$
6. $\frac{\sqrt[3]{2^3}+\left(\sqrt[3]{3^3}\right)^3}{\sqrt[3]{4^3}}$

**Ćwiczenie 7**

Oblicz.

1. $\sqrt{36 \bullet 4}$
2. $\sqrt{49 \bullet 64}$
3. $\sqrt{9 \bullet 25}$
4. $\sqrt{0{,}16 \bullet 81}$
5. $\sqrt{0{,}01 \bullet 49 \bullet 121}$
6. $\sqrt{1{,}44 \bullet 169 \bullet 25}$
7. $\sqrt[3]{8 \bullet 64}$
8. $\sqrt[3]{27 \bullet 0{,}001}$
9. $\sqrt[3]{-125 \bullet \frac{1}{8}}$
10. $\sqrt[3]{216 \bullet 0{,}027}$
11. $\sqrt[3]{-8 \bullet (-27) \bullet \frac{1}{64}}$
12. $\sqrt[3]{0{,}008 \bullet 0{,}001}$

**Ćwiczenie 8**

Oblicz.

1. $\sqrt{49 \ : 16}$
2. $\sqrt{64 \ : 0{,}04}$
3. $\sqrt{1{,}44 \ : 0{,}09}$
4. $\sqrt{6{,}25 \ : 25}$
5. $\sqrt{0{,}36 \ : 81}$
6. $\sqrt[3]{216 \ : 125}$
7. $\sqrt[3]{0{,}008 \ : (-0{,}001)}$
8. $\sqrt[3]{-1000 \ : (-0{,}027)}$
9. $\sqrt[3]{\frac{8}{27} \ : \left(-64\right)}$
10. $\sqrt[3]{343 \ : 27}$

**Ćwiczenie 9**

Oblicz.

1. $\sqrt{20} \bullet \sqrt{5}$
2. $\sqrt{10} \bullet \sqrt{12{,}1}$
3. $\sqrt{7} \bullet \sqrt{28}$
4. $\sqrt{2} \bullet \sqrt{32}$
5. $\sqrt{50} \bullet \sqrt{\frac{1}{2}}$
6. $\sqrt{8} \bullet \sqrt{32}$
7. $\sqrt{20} \bullet \sqrt{10} \bullet \sqrt{2}$
8. $\sqrt{5} \bullet \sqrt{12} \bullet \sqrt{60}$
9. $\sqrt[3]{4} \bullet \sqrt[3]{16}$
10. $\sqrt[3]{9} \bullet \sqrt[3]{81}$
11. $\sqrt[3]{16} \bullet \sqrt[3]{0{,}5}$
12. $\sqrt[3]{3} \bullet \sqrt[3]{6} \bullet \sqrt[3]{12}$
13. $\sqrt[3]{2} \bullet \sqrt[3]{20} \bullet \sqrt[3]{25}$

**Ćwiczenie 10**

Oblicz.

1. $\sqrt{18} : \sqrt{2}$
2. $\sqrt{56} : \sqrt{3{,}5}$
3. $\sqrt{125} : \sqrt{5}$
4. $\sqrt{0{,}03} : \sqrt{3}$
5. $\sqrt{100000} : \sqrt{1000}$
6. $\sqrt[3]{-16} : \sqrt[3]{2}$
7. $\sqrt[3]{0{,}007} : \sqrt[3]{7}$
8. $\sqrt[3]{-25} : \sqrt[3]{-\frac{1}{5}}$
9. $\sqrt[3]{13{,}5} : \sqrt[3]{-0{,}5}$
10. $\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$
11. $\frac{\sqrt[3]{2} \bullet \sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}}$
12. $\frac{\sqrt[3]{108} : \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$

**Ćwiczenie 11**

Oblicz.

1. $\sqrt{\frac{2}{7}} : \sqrt{3\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt{5\frac{1}{3}} : \sqrt{8\frac{1}{3}}$
3. $\sqrt{\frac{49}{50}} : \sqrt{\frac{1}{50}}$
4. $\sqrt{2\frac{1}{2}} \bullet \sqrt{\frac{5}{8}}$
5. $\sqrt[3]{1\frac{3}{5}} : \sqrt[3]{12\frac{4}{5}}$
6. $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \bullet \sqrt[3]{\frac{1}{9}} : \sqrt[3]{27}$

**Ćwiczenie 12**

Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Liczba $\sqrt[3]{10} \bullet \sqrt[3]{12{,}5}$ jest równa $5$.
- [ ] Liczba $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ jest równa $2$.
- [ ] Liczba $\sqrt{2} \bullet \sqrt{18}$ jest równa $6$.
- [ ] Liczba $\sqrt[3]{32} \bullet \sqrt[3]{2}$ jest równa $4$.
- [ ] Liczba $\sqrt{32} \bullet \sqrt{2}$ jest równa $4$.
- [ ] Liczba $\sqrt{3} \bullet \sqrt{3}$ jest równa $3$.
- [ ] Liczba $\sqrt[3]{5} \bullet \sqrt[3]{5}$ jest równa $5$.
- [ ] Liczba $\sqrt{50} : \sqrt{10}$ jest równa $5$.
- [ ] Liczba $\sqrt{3} : \sqrt{27}$ jest równa $\frac{1}{3}$.
- [ ] Liczba $\sqrt{6} \bullet \sqrt{6} \bullet \sqrt{6}$ jest równa $6$.

**Ćwiczenie 13**

Oblicz.

1. $\sqrt{500}:\ \sqrt{5}+\sqrt[3]{3}\bullet\sqrt[3]{3}\bullet\sqrt[3]{3}-\sqrt{10}\bullet\sqrt{90}$
2. $\sqrt{6^2}\bullet\left(-\sqrt{2}\right)\bullet\left(-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2^2}$
3. $-\sqrt{13}\bullet\sqrt{13}+\sqrt[3]{-13^3}$
4. $\left(\sqrt[3]{16}:\ \sqrt[3]{-2}\right)\bullet\sqrt{2}\bullet\sqrt{2}+\sqrt{16}$
5. $\frac{\sqrt{2000}:\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\bullet\sqrt{5}+\sqrt{0{,}2}\bullet\sqrt{500}$
6. $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}\bullet\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}\bullet\sqrt[3]{3}\bullet\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\bullet\sqrt[3]{-1000}$

## Ćwiczenie 14

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $\left(-\sqrt{2}\right)^2$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\left(\sqrt[3]{-2}\right)^3$ | $2$ |
| $-\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ | $-2$ |
| $\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\right)^6$ | $\frac{1}{4}$ |
| $\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\right)^3$ | $-4$ |
| $-\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$ | $4$ |
| $\left(-\sqrt{2}\right)^4$ | $-\frac{1}{4}$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 15**

Oblicz wartość wyrażenia.

1. $3x^2 - 2$, dla $x = \sqrt{6}$
2. $5 - x^2$, dla $x = -\sqrt{10}$
3. $x^3 - 11$, dla $x = \sqrt[3]{-7}$
4. $-7x^3 + 4$, dla $x = \sqrt[3]{2}$
5. $x^4 + x^2 - 9$, dla $x = \sqrt{3}$
6. $-3x^4 + 4x^2 + 1$, dla $x = \sqrt{5}$
7. $x^6 - 2x^3 + 5$, dla $x = \sqrt[3]{-3}$
8. $2x^9 - 6x^6 - 4$, dla $x = \sqrt[3]{-10}$

**Ćwiczenie 16**

Zapisz w prostszej postaci.

1. $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$
2. $3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
3. $6\sqrt{7} + 3\sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{3}$
4. $-10\sqrt{6} + 3\sqrt{10} - 12\sqrt{6} + 7\sqrt{10} + \sqrt{6} - 9\sqrt{10}$
5. $\sqrt[3]{4} - 8\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{4}$
6. $2\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{2} - 13\sqrt[3]{9} - 19\sqrt[3]{2}$
7. $\sqrt[3]{15} - 15\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{15} - 4\sqrt[3]{5} + 6\sqrt[3]{3}$
8. $\sqrt[3]{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt[3]{3} + 2\sqrt{3}$
9. $25\sqrt[3]{-2} - 17\sqrt{2} + 23\sqrt[3]{2} - \sqrt{2} - \sqrt[3]{-2}$

**Ćwiczenie 17**

Ile razy liczba $a$ jest większa od liczby $b$?

1. $a = \sqrt{90}, b = \sqrt{10}$
2. $a = \sqrt{128}, b = \sqrt{2}$
3. $a = \sqrt{288}, b = \sqrt{8}$
4. $a = \sqrt[3]{81}, b = \sqrt[3]{3}$
5. $a = \sqrt[3]{448}, b = \sqrt[3]{7}$
6. $a = \sqrt[3]{625}\ , b = \sqrt[3]{5}$

**Ćwiczenie 18**

O ile liczba $a$ jest większa od liczby $b$?

1. $a = 6\sqrt{11}, b = 5\sqrt{11}$
2. $a = 8\sqrt{5}, b = -\sqrt{5}$
3. $a = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{7}, b = \sqrt{2} + \sqrt{7}$
4. $a = 3\sqrt{3} + 13\sqrt{13}, b = 3\sqrt{3} - 13\sqrt{13}$
5. $a = 15 + 5\sqrt{14}, b = -3\sqrt{14} + 20$

**Ćwiczenie 19**

Oblicz.

$\sqrt[3]{\frac{1\bullet 2\bullet 4+2\bullet 4\bullet 8+4\bullet 8\bullet 16}{1\bullet 3\bullet 9+2\bullet 6\bullet 18+3\bullet 9\bullet 27}}$

# Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka

Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka umożliwia upraszczanie wyrażeń zawierających pierwiastki. Czynność tę można wykonywać na dwa sposoby: z wykorzystaniem rozkładu liczby podpierwiastkowej na czynniki pierwsze lub zapisując liczbę podpierwiastkową w postaci iloczynu takich czynników, aby przynajmniej z jednego z nich można było obliczyć pierwiastek będący liczbą wymierną.

**Przykład 1**

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Przykład 2**

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Przykład 3**

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Ćwiczenie 1**

Liczba $\sqrt{52}$ jest równa

- $4\sqrt{13}$
- $3\sqrt{13}$
- $2\sqrt{13}$
- $2\sqrt{26}$

**Ćwiczenie 2**

Liczba $\sqrt[3]{810}$ jest równa

- $9\sqrt[3]{10}$
- $3\sqrt[3]{10}$
- $9\sqrt[3]{30}$
- $3\sqrt[3]{30}$

**Ćwiczenie 3**

Liczbę $5\sqrt{3}+\sqrt{27}$ można zapisać w postaci

- $24$
- $5\sqrt{30}$
- $8$
- $8\sqrt{3}$

**Ćwiczenie 4**

Liczbę $\sqrt[3]{108} - \sqrt[3]{32}$ można zapisać w postaci

- ◯ $1$
- ◯ $\sqrt[3]{76}$
- ◯ $\sqrt[3]{4}$
- ◯ $2\sqrt[3]{4}$

**Ćwiczenie 5**

Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

1. $\sqrt{20}, \sqrt{500}, \sqrt{32}, \sqrt{128}, \sqrt{27}, \sqrt{150}, \sqrt{160}, \sqrt{147}, \sqrt{242}, \sqrt{162}$
2. $\sqrt[3]{54}, \sqrt[3]{16}, \sqrt[3]{24}, \sqrt[3]{192}, \sqrt[3]{40}, \sqrt[3]{88}, \sqrt[3]{160}, \sqrt[3]{270}, \sqrt[3]{32}, \sqrt[3]{2000}, \sqrt[3]{625}$

**Ćwiczenie 6**

Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

1. $\sqrt{720}$
2. $\sqrt{4410}$
3. $\sqrt{5808}$
4. $\sqrt[3]{1512}$
5. $\sqrt[3]{6750}$
6. $\sqrt[3]{15552}$

## Ćwiczenie 7

Przeciągnij i upuść.

$\sqrt{40} =$ ____

$\sqrt{80} =$ ____

$\sqrt{99} =$ ____

$\sqrt{250} =$ ____

$\sqrt{320} =$ ____

$\sqrt[3]{-48} =$ ____

$\sqrt[3]{-108} =$ ____

$\sqrt[3]{-135} =$ ____

$\sqrt[3]{270} =$ ____

$\sqrt[3]{3000} =$ ____

$-4\sqrt[3]{5}$ | $4\sqrt{10}$ | $2\sqrt{10}$ | $5\sqrt{11}$ | $-2\sqrt[3]{6}$ | $7\sqrt{10}$ | $3\sqrt{10}$ | $3\sqrt{11}$ | $10\sqrt[3]{3}$

$-3\sqrt[3]{4}$ | $5\sqrt[3]{10}$ | $-3\sqrt[3]{5}$ | $10\sqrt{5}$ | $5\sqrt{5}$ | $8\sqrt{5}$ | $12\sqrt[3]{3}$ | $9\sqrt{5}$ | $-5\sqrt[3]{5}$

$4\sqrt{11}$ | $-4\sqrt[3]{6}$ | $6\sqrt{10}$ | $14\sqrt[3]{3}$ | $-5\sqrt[3]{4}$ | $4\sqrt{5}$ | $5\sqrt{10}$ | $-4\sqrt[3]{4}$ | $5\sqrt{5}$

$-3\sqrt[3]{6}$ | $4\sqrt[3]{10}$ | $3\sqrt[3]{10}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8

Przeciągnij i upuść.

$\sqrt{63} =$ ____

$\sqrt{52} =$ ____

$\sqrt{96} =$ ____

$\sqrt{98} =$ ____

$\sqrt{75} =$ ____

$\sqrt[3]{128} =$ ____

$\sqrt[3]{81} =$ ____

$\sqrt[3]{56} =$ ____

$\sqrt[3]{72} =$ ____

$\sqrt[3]{324} =$ ____

$3\sqrt{8}$ | $4\sqrt[3]{3}$ | $7\sqrt{2}$ | $2\sqrt[3]{7}$ | $5\sqrt{5}$ | $4\sqrt{8}$ | $7\sqrt{3}$ | $2\sqrt{14}$ | $5\sqrt{3}$ | $3\sqrt{9}$

$2\sqrt[3]{8}$ | $2\sqrt{13}$ | $3\sqrt[3]{5}$ | $2\sqrt[3]{9}$ | $3\sqrt[3]{12}$ | $4\sqrt{6}$ | $4\sqrt[3]{4}$ | $3\sqrt[3]{14}$ | $3\sqrt{7}$ | $7\sqrt{4}$

$3\sqrt[3]{16}$ | $4\sqrt{7}$ | $4\sqrt[3]{2}$ | $3\sqrt[3]{3}$ | $3\sqrt[3]{4}$ | $5\sqrt{4}$ | $2\sqrt{15}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9

Wykonaj działanie i wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

1. $\sqrt{2} \bullet \sqrt{6}$
2. $\sqrt{8} \bullet \sqrt{3}$
3. $\sqrt{15} \bullet \sqrt{3}$
4. $\sqrt{8} \bullet \sqrt{10}$
5. $\sqrt{27} \bullet \sqrt{8}$
6. $\sqrt[3]{9} \bullet \sqrt[3]{9}$
7. $\sqrt[3]{32} \bullet \sqrt[3]{4}$
8. $\sqrt[3]{25} \bullet \sqrt[3]{10}$
9. $\sqrt[3]{9} \bullet \sqrt[3]{18}$
10. $\sqrt[3]{16} \bullet \sqrt[3]{16}$

## Ćwiczenie 10

Przeciągnij i upuść.

$6\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{72}$

$\sqrt{0{,}07}$ ☐ $0{,}1\sqrt{6}$

$10\sqrt{6}$ ☐ $\sqrt{500}$

$\sqrt{\frac{50}{64}}$ ☐ $\frac{5}{8}$

$\sqrt{1\frac{28}{100}}$ ☐ $\frac{8}{10}\sqrt{2}$

$\sqrt{1800}$ ☐ $30\sqrt{3}$

$>$ $<$ $=$ $<$ $<$ $=$ $>$ $>$ $=$

## Ćwiczenie 11

Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Liczba $\sqrt[3]{192} + \sqrt{48}$ jest równa $8\sqrt[3]{3}$.
- [ ] Liczba $3\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{32}$ jest równa $5\sqrt[3]{4}$.
- [ ] Liczba $\sqrt[3]{40}$ jest równa $2\sqrt[3]{5}$.
- [ ] Liczba $\sqrt{32} + 6\sqrt{128}$ jest równa $12\sqrt{2}$.
- [ ] Liczba $\sqrt{117}$ jest równa $3\sqrt{13}$.
- [ ] Liczba $\sqrt{2100}$ jest równa $10\sqrt{21}$.
- [ ] Liczba $\sqrt[3]{810}$ jest równa $9\sqrt[3]{10}$.
- [ ] Liczba $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}$ jest równa $\sqrt[3]{18}$.
- [ ] Liczba $\sqrt[3]{162}$ jest równa $3\sqrt[3]{6}$.
- [ ] Liczba $\sqrt{44}$ jest równa $4\sqrt{11}$.

**Ćwiczenie 12**

Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

1. $\sqrt[3]{155^4}$
2. $\sqrt[3]{6^5}$
3. $\sqrt{17^5}$
4. $\sqrt{132^3}$
5. $\sqrt{50^7}$
6. $\sqrt{8^7}$

**Ćwiczenie 13**

Zapisz w prostszej postaci.

1. $\sqrt[3]{4^4} + \sqrt[3]{4}$
2. $12\sqrt{5^3} + \sqrt{5^5}$
3. $\sqrt[3]{-9^4} + 2\sqrt[3]{-9}$
4. $\sqrt[3]{3^7} - 2\sqrt[3]{-3^4}$
5. $\sqrt{2^9} + 2\sqrt{2^{11}}$

**Ćwiczenie 14**

Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla podanej zmiennej $x$.

1. $x^3 + 5x$, dla $x = \sqrt{2}$
2. $6x^3 - x^2 + 10x$, dla $x = \sqrt{6}$
3. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$, dla $x = -\sqrt{3}$
4. $-5x^4 + 4x^3 - x$, dla $x = \sqrt{7}$
5. $2x^4 - x^3 + x - 8$, dla $x = \sqrt[3]{4}$
6. $x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 + 4$, dla $x = -\sqrt[3]{2}$
7. $x^7 - x^4 + 12x$, dla $x = \sqrt[3]{12}$

**Ćwiczenie 15**

Zapisz w prostszej postaci.

1. $\sqrt{72} - \sqrt{128} + \sqrt{288}$
2. $\sqrt{12} + \sqrt{147} - \sqrt{300}$
3. $-\sqrt{20} - \sqrt{320} + \sqrt{45} - \sqrt{5}$
4. $\sqrt{28} - \sqrt{54} + \sqrt{63} - \sqrt{24}$
5. $-\sqrt{200} + \sqrt{20} + \sqrt{32} - \sqrt{500}$
6. $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{81}$
7. $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$
8. $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{1024} + \sqrt[3]{128}$
9. $\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{432} + \sqrt[3]{192}$
10. $-\sqrt{75} + \sqrt[3]{375} + \sqrt{192} - \sqrt[3]{24}$
11. $-\sqrt{567} + \sqrt[3]{56} - \sqrt{112} - \sqrt[3]{189}$

**Ćwiczenie 16**

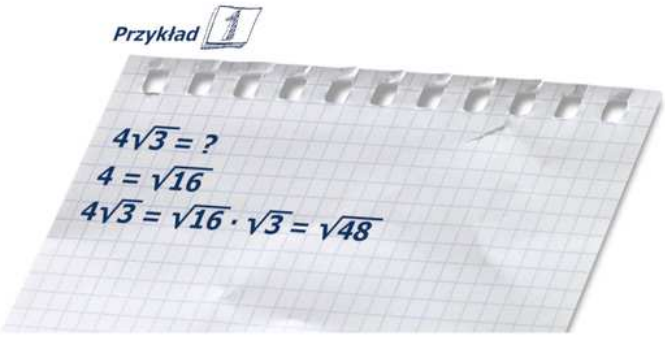
Zapisz w prostszej postaci.

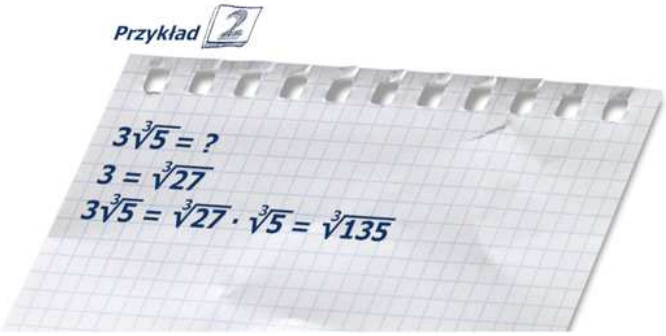
1. $5\sqrt{8}-\sqrt{18}+6\sqrt{50}$
2. $-2\sqrt{12}+3\sqrt{48}-\sqrt{108}$
3. $7\sqrt{125}-\sqrt{45}+2\sqrt{180}$
4. $-4\sqrt{32}-2\sqrt{75}-3\sqrt{128}+3\sqrt{147}$
5. $-5\sqrt{11}+4\sqrt{12}-2\sqrt{176}+8\sqrt{48}$
6. $9\sqrt{150}-7\sqrt{27}-5\sqrt{96}-3\sqrt{75}$
7. $3\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{128}$
8. $-5\sqrt[3]{81}+4\sqrt[3]{24}-6\sqrt[3]{3000}$
9. $2\sqrt[3]{500}-6\sqrt[3]{1372}+5\sqrt[3]{192}-2\sqrt[3]{648}$
10. $\frac{\sqrt{50}+\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$
11. $\frac{\sqrt{125}-\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$
12. $\frac{\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$
13. $\frac{\sqrt[3]{256}+\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$

# Włączanie czynnika pod znak pierwiastka

Włączanie czynnika pod znak pierwiastka jest czynnością odwrotną do wyłączania czynnika przed znak pierwiastka. Jest ona wykorzystywana głównie podczas porównywania wartości wyrażeń zawierających pierwiastki.

**Przykład 1**



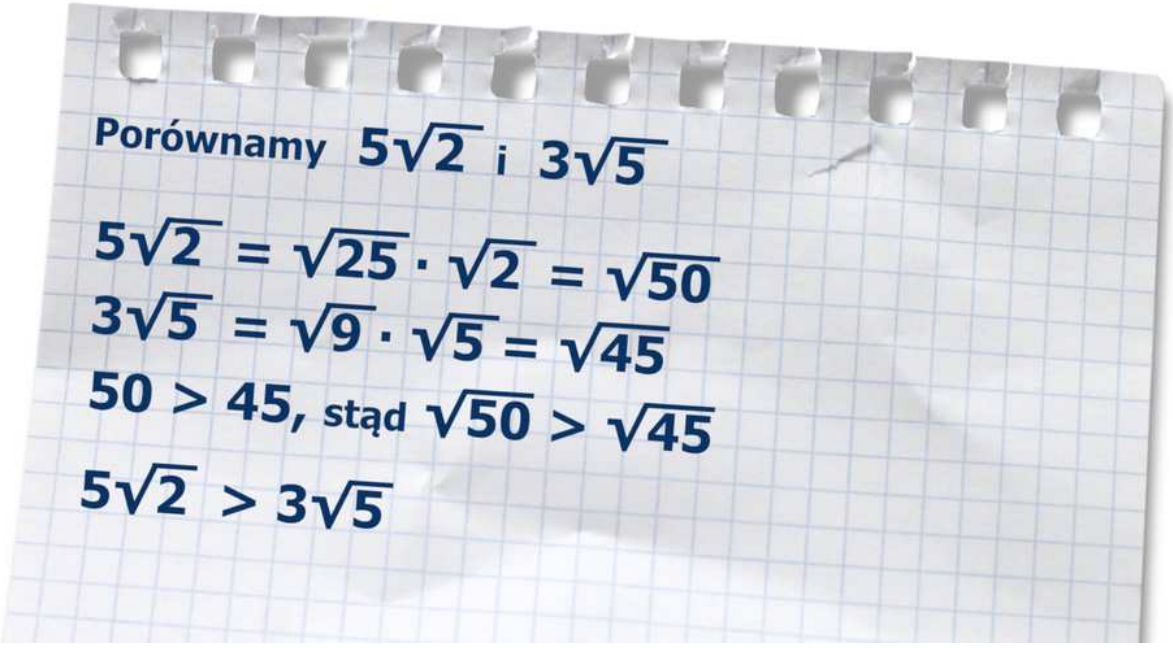




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Przykład 2**




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Ćwiczenie 1**

Liczba $7\sqrt{2}$ jest równa

- $\sqrt{14}$
- $\sqrt{196}$
- $\sqrt{98}$
- $\sqrt{51}$

**Ćwiczenie 2**

Liczba $4\sqrt[3]{2}$ jest równa

- $\sqrt[3]{64}$
- $\sqrt[3]{256}$
- $\sqrt[3]{32}$
- $\sqrt[3]{128}$

**Ćwiczenie 3**

Liczbą mniejszą od $2\sqrt{13}$ jest

- $4\sqrt{8}$
- $6\sqrt{5}$
- $3\sqrt{11}$
- $5\sqrt{2}$

**Ćwiczenie 4**

Liczbą większą od $5\sqrt[3]{5}$ jest

- $4\sqrt[3]{7}$
- $3\sqrt[3]{12}$
- $6\sqrt[3]{4}$
- $2\sqrt[3]{15}$

## Ćwiczenie 5

Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

1. $10\sqrt{2}$ , $6\sqrt{3}$ , $7\sqrt{6}$ , $4\sqrt{7}$ , $2\sqrt{10}$ , $3\sqrt{11}$ , $5\sqrt{13}$
2. $2\sqrt[3]{2}$ , $4\sqrt[3]{3}$ , $3\sqrt[3]{5}$ , $-2\sqrt[3]{4}$ , $-3\sqrt[3]{6}$ , $-10\sqrt[3]{2}$ , $-3\sqrt[3]{3}$
3. $4\sqrt{\frac{1}{2}}$ , $12\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, $\frac{3}{5}\sqrt{10}$, $0{,}2\sqrt[3]{100}$, $1{,}4\sqrt{\frac{2}{7}}$ , $1{,}1\sqrt[3]{1{,}1}$

## Ćwiczenie 6

Przeciągnij i upuść.

$5\sqrt{3} =$ ☐

$9\sqrt{2} =$ ☐

$3\sqrt{6} =$ ☐

☐ $= 9\sqrt{\frac{2}{9}}$

☐ $= \frac{5}{7}\sqrt{14}$

☐ $= 1{,}2\sqrt{20}$

$2\sqrt[3]{7} =$ ☐

$-4\sqrt[3]{4} =$ ☐

$-10\sqrt[3]{0{,}55} =$ ☐

☐ $= \frac{1}{2}\sqrt[3]{-24}$

☐ $= -3\sqrt[3]{-2\frac{1}{3}}$

☐ $= 0{,}1\sqrt[3]{-5000}$

$\sqrt{7\frac{1}{8}}$ $\sqrt[3]{56}$ $\sqrt{28{,}8}$ $\sqrt{25}$ $\sqrt[3]{-554}$ $\sqrt{56}$ $\sqrt{164}$ $\sqrt{55}$ $\sqrt{7\frac{1}{7}}$

$\sqrt{77}$ $\sqrt[3]{-3}$ $\sqrt[3]{63}$ $\sqrt{163}$ $\sqrt{7\frac{1}{9}}$ $\sqrt{75}$ $\sqrt[3]{-257}$ $\sqrt[3]{65}$ $\sqrt{76}$ $\sqrt[3]{58}$

$\sqrt[3]{-258}$ $\sqrt[3]{57}$ $\sqrt[3]{64}$ $\sqrt[3]{-552}$ $\sqrt{54}$ $\sqrt[3]{-550}$ $\sqrt[3]{-4}$ $\sqrt[3]{-6}$ $\sqrt[3]{-7}$

$\sqrt[3]{-5}$ $\sqrt{18}$ $\sqrt{20}$ $\sqrt{26}$ $\sqrt[3]{-256}$ $\sqrt{162}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8

Uporządkuj liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

1. $2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{32}, \frac{2}{5}\sqrt{125}, 5\sqrt{0{,}4}$
2. $2\sqrt{23}, 3\sqrt{19}, 4\sqrt{14}, 5\sqrt{10}\ , 6\sqrt{7}$
3. $4\sqrt[3]{9}, 5\sqrt[3]{4}, 1\frac{1}{2}\sqrt[3]{160}, 0{,}1\sqrt[3]{60000}, 80\sqrt[3]{0{,}0003}$
4. $2\sqrt[3]{17}, 4\sqrt[3]{5}, 3\sqrt[3]{6}, 5\sqrt[3]{2}, 6\sqrt[3]{3}$

## Ćwiczenie 9

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $\sqrt[3]{500}$ | $7\sqrt{5}$ |
| $\sqrt{450}$ | $15\sqrt{2}$ |
| $\sqrt[3]{48}$ | $5\sqrt[3]{4}$ |
| $\sqrt[3]{189}$ | $4\sqrt{7}$ |
| $\sqrt{112}$ | $3\sqrt[3]{7}$ |
| $\sqrt{363}$ | $11\sqrt{3}$ |
| $\sqrt[3]{648}$ | $2\sqrt[3]{6}$ |
| $\sqrt{245}$ | $6\sqrt[3]{3}$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 10**

Dane są liczby

$a = 5\sqrt{20} + 4\sqrt{125} + 10\sqrt{5}$

$b = 8\sqrt{2} + 4\sqrt{8} + 2\sqrt{32}$

$c = 2\sqrt{54} + 6\sqrt{6} + 3\sqrt{24}$

Sprawdź, która z tych liczb jest największa, a która najmniejsza.

**Ćwiczenie 11**

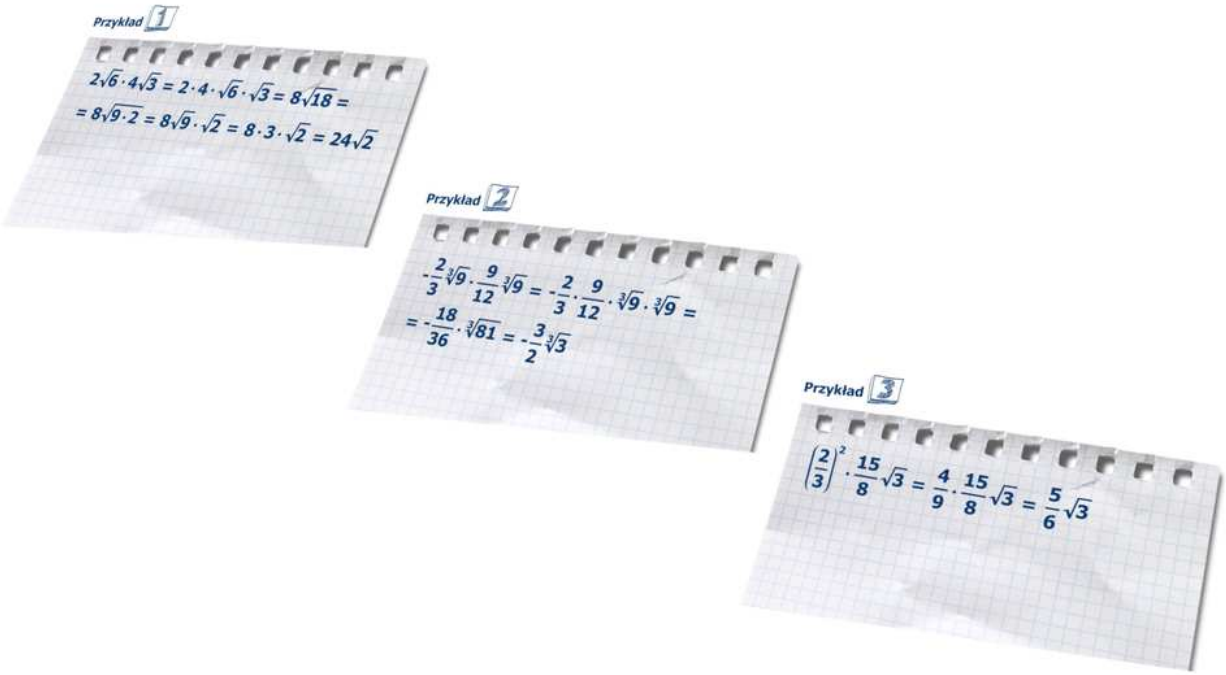
Obwód kwadratu $K_1$ jest równy $3\sqrt{8}\ \mathrm{cm}$, a kwadratu $K_2$ jest równy $7\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$. Który kwadrat ma większe pole?

**Ćwiczenie 12**

Objętość sześcianu $S_1$ jest równa $48\sqrt{6}\ \mathrm{m}^3$, a sześcianu $S_2$ jest równa $42\sqrt{10}\ \mathrm{m}^3$. Który sześcian ma dłuższą krawędź?

# Działania na pierwiastkach

## Przykład 1

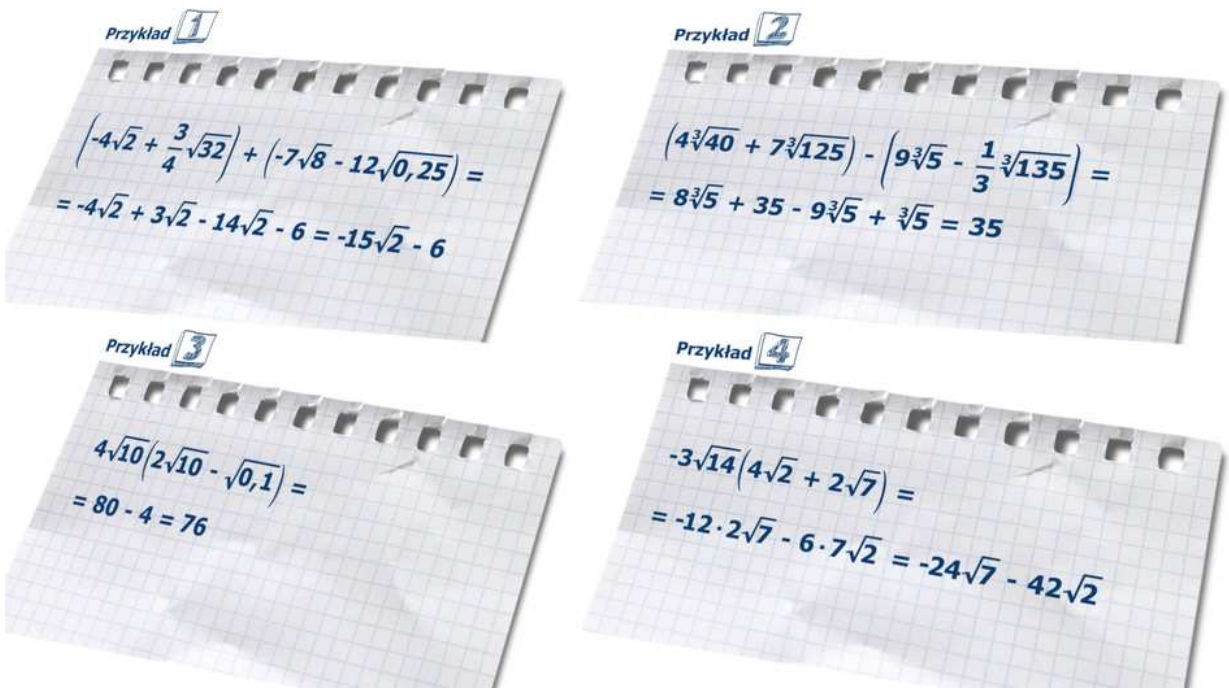



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

## Przykład 2



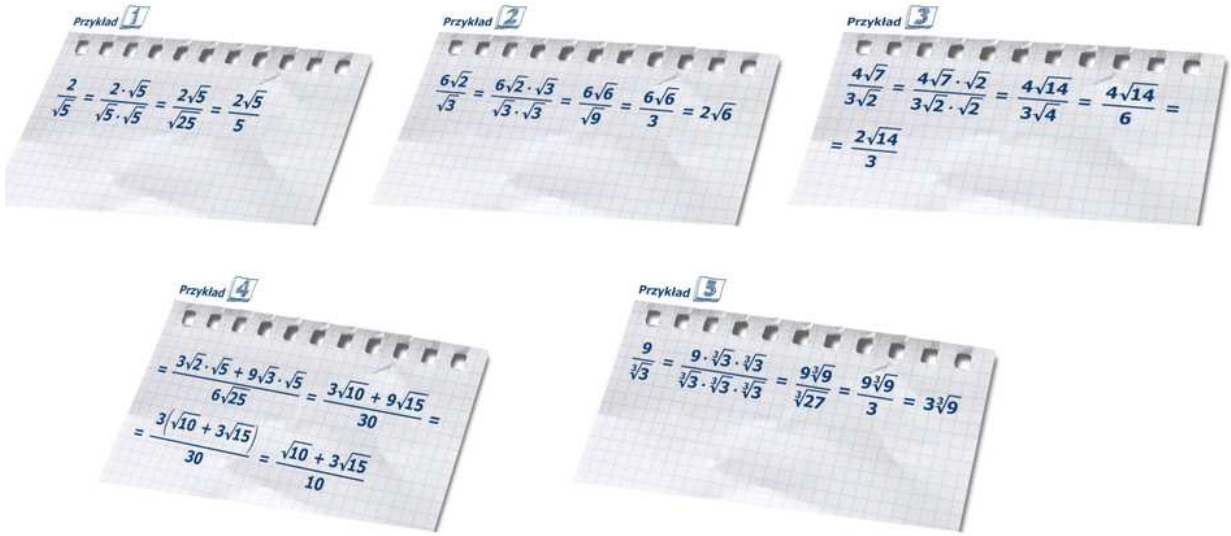

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

## Przykład 3




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Ćwiczenie 1**

Wartość wyrażenia $-\left(\sqrt{200}-\sqrt{8}\right)-\left(5\sqrt{50}-2\sqrt{32}\right)$ jest równa

- $41\sqrt{2}$
- $-41\sqrt{2}$
- $-25\sqrt{2}$
- $25\sqrt{2}$

**Ćwiczenie 2**

Wartość wyrażenia $\sqrt[3]{1029}-\left(\sqrt[3]{192}-\sqrt[3]{189}\right)-\left(\sqrt[3]{108}+3\sqrt[3]{7}\right)$ jest równa

- $3\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{3}$
- $4\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{7}$
- $3\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{4}$
- $4\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{7}$

## Ćwiczenie 3

Po usunięciu niewymierności z mianownika ułamka $\frac{14}{3\sqrt{7}}$ otrzymamy liczbę

- $\frac{2\sqrt{7}}{7}$
- $\frac{14}{21}$
- $\frac{2\sqrt{7}}{3}$
- $\frac{14\sqrt{7}}{3}$

## Ćwiczenie 4

Kwadrat liczby $\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$ jest równy

- $\frac{8\sqrt[3]{2}}{9}$
- $\frac{32\sqrt[3]{2}}{9}$
- $\frac{16\sqrt[3]{2}}{9}$
- $\frac{32\sqrt[3]{2}}{27}$

## Ćwiczenie 5

Sześcian liczby $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ jest równy

- $\frac{45\sqrt{3}}{216}$
- $\frac{375\sqrt{3}}{72}$
- $\frac{125\sqrt{3}}{216}$
- $\frac{125\sqrt{3}}{72}$

## Ćwiczenie 6

Które z podanych liczb są liczbami wymiernymi, a które liczbami niewymiernymi?

Przeciągnij i upuść.

liczby wymierne

liczby niewymierne

$\frac{10}{\sqrt{5}} - \left(-\sqrt{20} - \sqrt{4}\right)$

$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{16}\right) \cdot 2\sqrt[3]{2}$

$\frac{3}{2}\sqrt[3]{16} \cdot 2\sqrt[3]{4}$

$3\sqrt{3} - 5 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 9 + 2\sqrt[3]{125}\right)$

$-\left(3\sqrt{3} + 5\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 9 + 2\sqrt[3]{12}\right.$

$-\left(5\sqrt{6} + 6\sqrt{5}\right) - \left(6\sqrt{5} - 5\sqrt{6}\right.$

$-\left(5\sqrt{6} - 6\sqrt{5}\right) - \left(6\sqrt{5} - 5\sqrt{6}\right.$

$\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{2}$

$\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2}$

$\frac{10}{\sqrt{5}} - \left(\sqrt{20} - \sqrt{4}\right)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 7**

Spośród poniższych liczb wybierz te, które są równe.

- [ ] $32$
- [ ] $\sqrt{8} \bullet 2\sqrt{5}$
- [ ] $4\sqrt[3]{16}$
- [ ] $12\sqrt{18}$
- [ ] $\frac{36\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3}}$
- [ ] $10\sqrt{5}$
- [ ] $36\sqrt[3]{2}$
- [ ] $\sqrt{80}$
- [ ] $5\sqrt{10}$
- [ ] $2\sqrt{40}$
- [ ] $15\sqrt[3]{5}$
- [ ] $10\sqrt{2{,}5}$
- [ ] $15\sqrt{2}$
- [ ] $\frac{15}{\sqrt[3]{5}}$
- [ ] $\sqrt[3]{1024}$
- [ ]

- [ ] $36\sqrt{2}$
- [ ] $3\sqrt{3} \bullet 4\sqrt{6}$
- [ ] $\frac{15\sqrt[3]{25}}{5}$
- [ ] $8\sqrt[3]{2}$
- [ ] $4\sqrt{10}$
- [ ] $12\sqrt[3]{6}$
- [ ] $3\sqrt[3]{25}$
- [ ] $\sqrt{250}$
- [ ] $\frac{12\sqrt[3]{162}}{\sqrt[3]{3}}$

## Ćwiczenie 8

Które z podanych liczb są liczbami naturalnymi?

Przeciągnij i upuść.

liczby naturalne

pozostałe liczby

$\sqrt[3]{64^4}$ $\sqrt[3]{732^{20}}$ $\sqrt{576^5}$ $\sqrt[3]{69^4}$ $4\sqrt[3]{49^4}$ $67\sqrt{75^{67}}$ $103\sqrt{262^{36}}$ $\sqrt[3]{28^9}$ $\sqrt{1023^{101}}$ $\sqrt[3]{(-654)^{999}}$ $129\sqrt{129^{10}}$ $12\sqrt[3]{144^{12}}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $3\left(\sqrt{5}\right)^2$ | $32$ |
| $\left(3\sqrt[3]{2}\right)^3$ | $45$ |
| $5\left(\sqrt{3}\right)^2$ | $15$ |
| $\left(5\sqrt{3}\right)^2$ | $15$ |
| $\left(3\sqrt{5}\right)^2$ | $6$ |
| $2\left(\sqrt[3]{4}\right)^3$ | $75$ |
| $\left(2\sqrt[3]{4}\right)^3$ | $54$ |
| $3\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ | $8$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $\left(\frac{4\sqrt[3]{9}}{3}\right)^3$ | $\frac{9}{40}$ |
| $\left(\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)^2$ | $\frac{75}{16}$ |
| $\left(\frac{2\sqrt[3]{10}}{5}\right)^3$ | $\frac{81}{16}$ |
| $\left(\frac{3\sqrt[3]{12}}{4}\right)^3$ | $\frac{16}{25}$ |
| $\left(\frac{6\sqrt{5}}{15}\right)^2$ | $\frac{4}{5}$ |
| $\left(\frac{3\sqrt{10}}{20}\right)^2$ | $\frac{15}{8}$ |
| $\left(\frac{\sqrt[3]{15}}{2}\right)^3$ | $\frac{64}{3}$ |
| $\left(\frac{10\sqrt{12}}{16}\right)^2$ | $\frac{32}{27}$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 11**

Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Różnica liczb niewymiernych jest zawsze liczbą wymierną.
- [ ] Kwadrat liczby niewymiernej może być liczbą niewymierną.
- [ ] Kwadrat liczby niewymiernej jest zawsze liczbą niewymierną.
- [ ] Różnica liczb niewymiernych jest zawsze liczbą niewymierną.
- [ ] Kwadrat liczby niewymiernej może być liczbą wymierną.
- [ ] Różnica liczb niewymiernych może być liczbą wymierną.
- [ ] Różnica liczb niewymiernych może być liczbą niewymierną.
- [ ] Kwadrat liczby niewymiernej jest zawsze liczbą wymierną.

**Ćwiczenie 12**

Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Suma liczb niewymiernych może być liczbą niewymierną.
- [ ] Suma liczb niewymiernych jest zawsze liczbą wymierną.
- [ ] Iloczyn liczb niewymiernych jest zawsze liczbą wymierną.
- [ ] Suma liczb niewymiernych może być liczbą wymierną.
- [ ] Iloczyn liczb niewymiernych może być liczbą niewymierną
- [ ] Suma liczb niewymiernych jest zawsze liczbą niewymierną.
- [ ] Iloczyn liczb niewymiernych jest zawsze liczbą niewymierną.
- [ ] Iloczyn liczb niewymiernych może być liczbą wymierną.

**Ćwiczenie 13**

Niech $A = 2\sqrt{5}$, $B = \sqrt{3} - 4\sqrt{2}$, $C = -\frac{1}{2}\sqrt{12} + 3\sqrt{8}$.

Zapisz w najprostszej postaci.

1. $A \bullet B$
2. $A \bullet C$
3. $B + C$
4. $C - B$

## Ćwiczenie 14

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $4\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt[3]{21}$ | $3\sqrt[3]{4}$ |
| $\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}\cdot 16\sqrt[3]{10}$ | $10\sqrt[3]{3}$ |
| $-2\sqrt[3]{5}\cdot 2\sqrt[3]{-2000}$ | $12\sqrt[3]{14}$ |
| $3\sqrt[3]{-20}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{-32}$ | $20\sqrt[3]{5}$ |
| $0{,}5\sqrt[3]{54}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{432}$ | $24\sqrt[3]{5}$ |
| $\sqrt[3]{50}\cdot\sqrt[3]{-3}\cdot\sqrt[3]{-20}$ | $40\sqrt[3]{10}$ |
| $0{,}5\sqrt[3]{20}\cdot 5\sqrt[3]{128}$ | $4\sqrt[3]{3}$ |
| $\frac{1}{9}\sqrt[3]{27}\cdot 4\sqrt[3]{81}$ | $3\sqrt[3]{10}$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 15

Oblicz.

1. $3\sqrt{2}\left(6\sqrt{5}-4\sqrt{10}\right)$
2. $2\sqrt{5}\left(3\sqrt{15}+\sqrt{35}\right)$
3. $-\sqrt{6}\left(8\sqrt{3}-7\sqrt{2}\right)$
4. $4\sqrt{3}\left(\sqrt{12}-2\sqrt{18}\right)$
5. $5\sqrt{5}\left(\sqrt{15}-\sqrt{10}\right)$
6. $\sqrt{7}\left(2\sqrt{7}-2\sqrt{8}+\sqrt{14}\right)$
7. $3\sqrt{3}\left(8\sqrt{21}-\sqrt{24}+3\sqrt{30}\right)$

## Ćwiczenie 16

Przeciągnij i upuść.

$2\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{20}-4\sqrt[3]{24}\right)=$ ____

$8\sqrt[3]{4}\left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{80}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{160}\right)=$ ____

$4\sqrt[3]{3}\left(3\sqrt[3]{18}+2\sqrt[3]{81}\right)=$ ____

$\sqrt[3]{10}\left(5\sqrt[3]{28}-3\sqrt[3]{75}\right)=$ ____

$8\sqrt[3]{5}+16\sqrt[3]{10}$ | $16\sqrt[3]{5}+8\sqrt[3]{10}$ | $10\sqrt[3]{7}-15\sqrt[3]{3}$ | $10\sqrt[3]{35}-5\sqrt[3]{6}$

$36\sqrt[3]{2}+24\sqrt[3]{9}$ | $4\sqrt[3]{5}+8\sqrt[3]{10}$ | $24\sqrt[3]{2}+36\sqrt[3]{9}$ | $2\sqrt[3]{5}-16\sqrt[3]{6}$ | $4\sqrt[3]{5}-4\sqrt[3]{6}$

$9\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{9}$ | $10\sqrt[3]{35}-15\sqrt[3]{6}$ | $4\sqrt[3]{5}-16\sqrt[3]{6}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 17

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 18**

Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

1. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$
2. $\frac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$
3. $\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$
4. $\frac{2\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$
5. $\frac{10\sqrt{3}-10\sqrt{5}}{7\sqrt{3}}$
6. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$
7. $\frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{8}}$
8. $\frac{\sqrt{10}+11}{\sqrt{1000}}$
9. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{27}}$
10. $\frac{5\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

## Ćwiczenie 19

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$\frac{12}{\sqrt{3}}$

$6\sqrt{3}$

$\frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

$\frac{48}{5\sqrt{3}}$

$5\sqrt{27}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 20

Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

1. $\frac{6}{\sqrt{50}+\sqrt{2}}$
2. $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{12}-\sqrt{27}}$
3. $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{80}+\sqrt{45}}$
4. $\frac{-2}{\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}}$
5. $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{192}+2\sqrt[3]{81}}$

## Ćwiczenie 21

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 22

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 23

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$\frac{88}{4\sqrt{11}}$

$7\sqrt{11}$

$2\sqrt{176}$

$\frac{\sqrt{33}}{3\sqrt{3}}$

$\frac{9}{\sqrt{11}}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 24

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$\frac{6}{2\sqrt[3]{3}}$

$4\sqrt[3]{9}$

$\frac{\sqrt[3]{81}}{2\sqrt[3]{9}}$

$\frac{1}{8}\sqrt[3]{72}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 25**

Oblicz.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{32}}$
2. $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{3}}$
3. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$
4. $\frac{1}{5\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{10\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{15\sqrt[3]{5}}$

**Ćwiczenie 26**

Rozwiąż równania.

1. $x\sqrt{5} = 20$
2. $7x\sqrt{2} = 21$
3. $\frac{3}{4}x\sqrt{3} = 27$
4. $12x\sqrt{10} = 30\sqrt{2}$
5. $x\sqrt[3]{7} = 14$
6. $5x\sqrt[3]{6} = 40$
7. $6x\sqrt[3]{4} = 120\sqrt[3]{3}$

**Ćwiczenie 27**

Rozwiąż równania.

1. $x\sqrt{3} = \sqrt{80} - \sqrt{20}$
2. $\sqrt{32} + x\sqrt{27} = \sqrt{50}$
3. $\sqrt{5} - 2\sqrt{24}x = \sqrt{600}$
4. $x\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{250}$
5. $\sqrt[3]{81} - x\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{3000}$

## Ćwiczenie 28

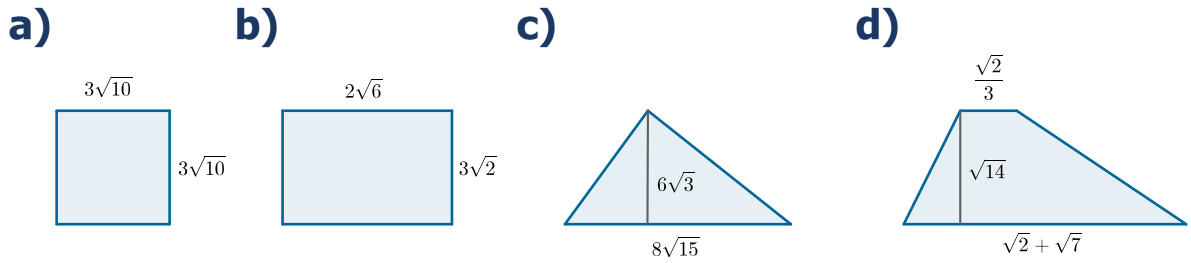
Niech $A = 3\sqrt[3]{6}$, $B = \sqrt[3]{-2^2} + \sqrt[3]{72}$, $C = \sqrt[3]{-4^2}$.

Zapisz w najprostszej postaci.

1. $\frac{B}{A}$
2. $\frac{B}{C}$
3. $\frac{A \bullet B}{C}$
4. $\frac{B \bullet C}{A}$
5. $A \bullet B \bullet C$

## Ćwiczenie 29

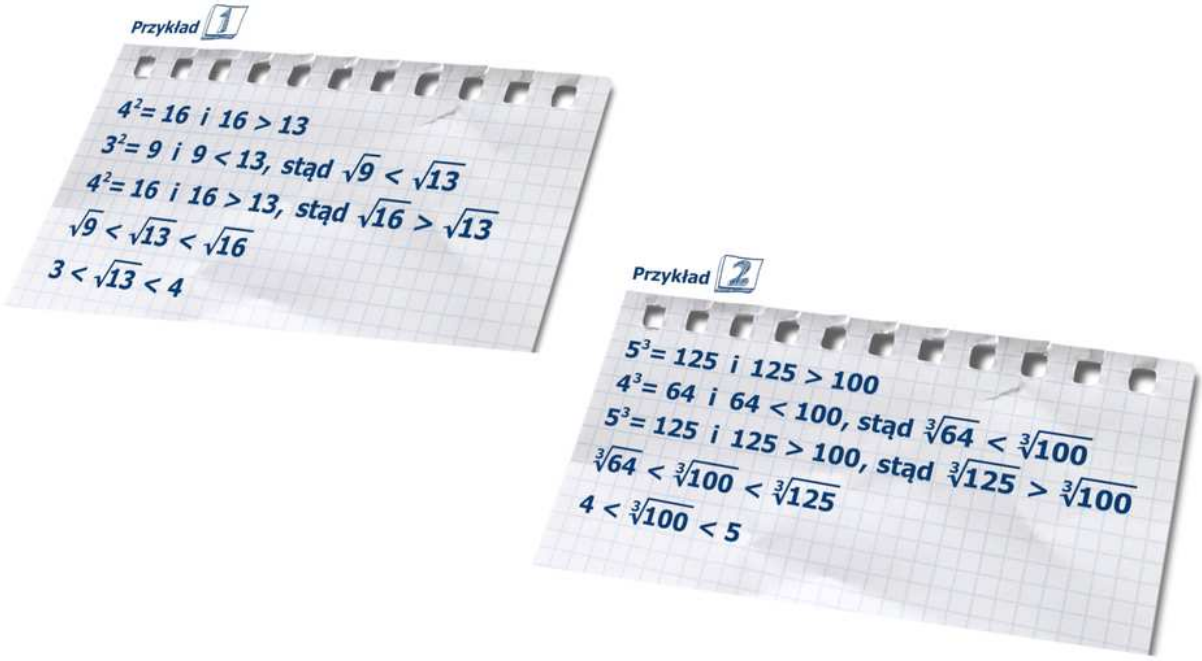
Oblicz pola poniższych figur.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

# Szacowanie wyrażeń zawierających pierwiastki

## Przykład 1

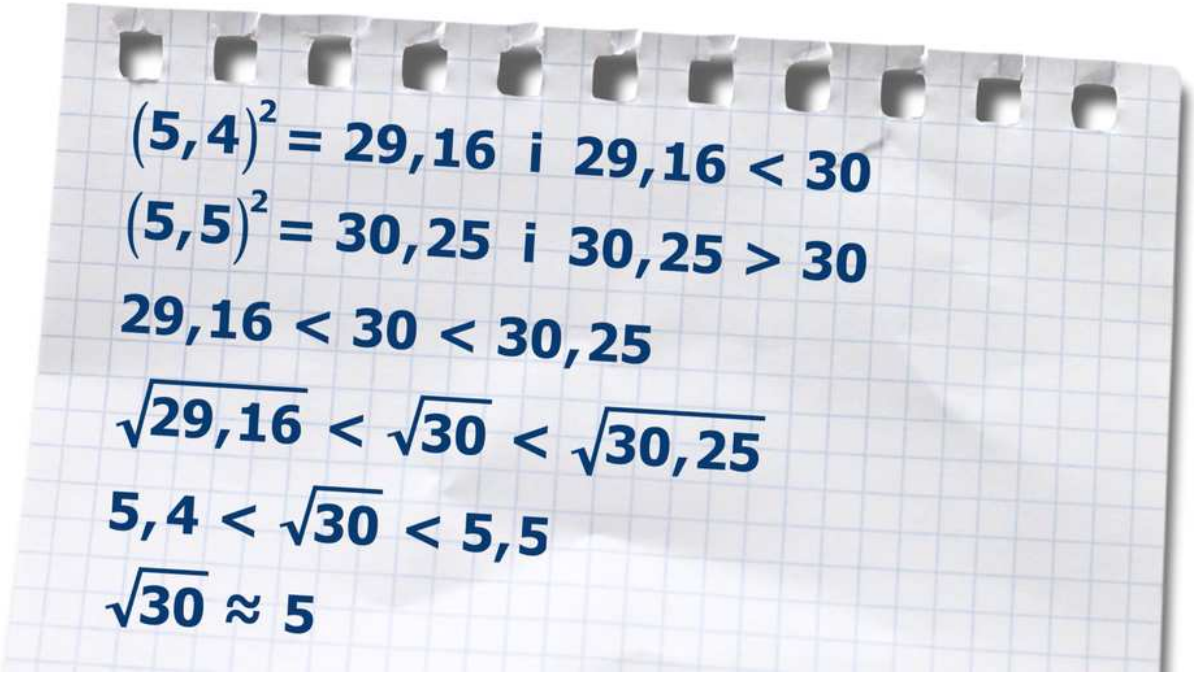



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

## Przykład 2



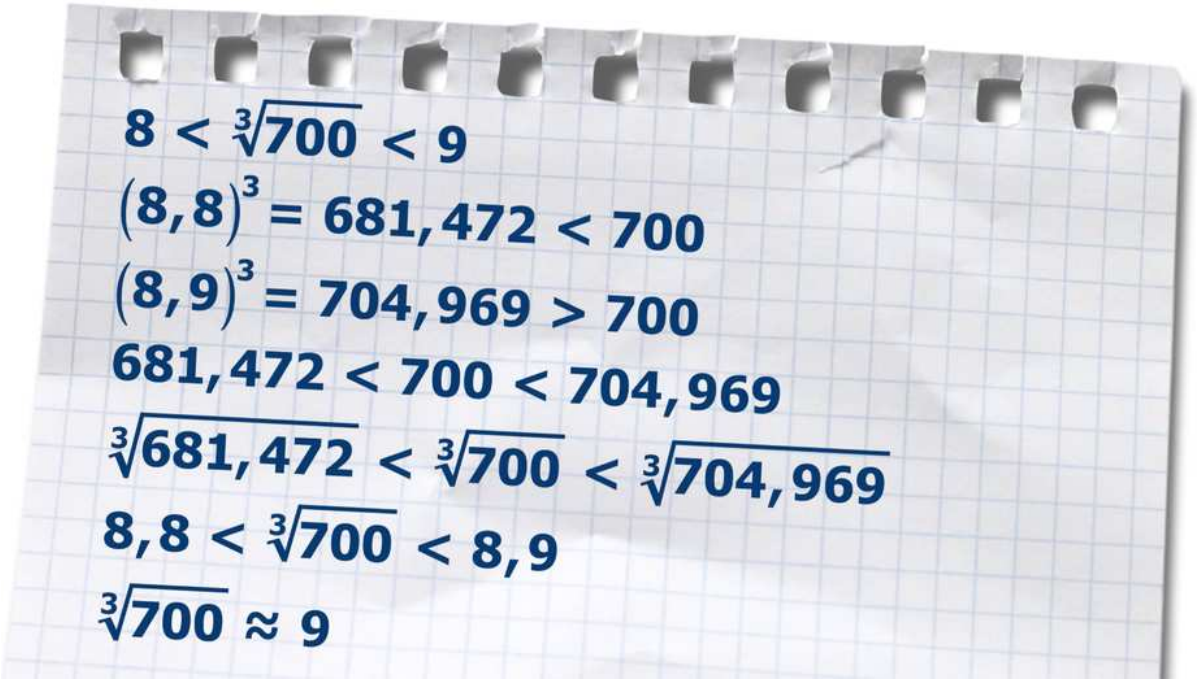

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 3**




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Ćwiczenie 1**

Między liczbami całkowitymi $6$ i $7$ znajduje się liczba niewymierna

- $\sqrt[3]{130}$
- $\sqrt[3]{215}$
- $\sqrt{50}$
- $\sqrt{40}$

**Ćwiczenie 2**

Wartość wyrażenia $\frac{5}{9} + \sqrt{3}$ jest równa w przybliżeniu

- $2{,}27$
- $2{,}29$
- $2{,}30$
- $28$

**Ćwiczenie 3**

Wskaż dwie kolejne liczby całkowite, między którymi znajduje się podana liczba niewymierna.

1. $\sqrt{7}$
2. $\sqrt{15}$
3. $\sqrt{91}$
4. $\sqrt{153}$
5. $\sqrt{680}$
6. $\sqrt[3]{11}$
7. $\sqrt[3]{-29}$
8. $\sqrt[3]{-78}$
9. $\sqrt[3]{200}$
10. $\sqrt[3]{342}$

## Ćwiczenie 4

Połącz w pary liczbę niewymierną i liczbę naturalną, która jest jej najbliższa.

| | |
|---|---|
| $\sqrt[3]{180}$ | $6$ |
| $\sqrt{154}$ | $5$ |
| $\sqrt{75}$ | $9$ |
| $\sqrt[3]{500}$ | $12$ |
| $\sqrt{13}$ | $8$ |
| $\sqrt[3]{20}$ | $3$ |
| $\sqrt{27}$ | $10$ |
| $\sqrt[3]{1101}$ | $4$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 5

Wskaż liczbę całkowitą, która na osi liczbowej leży najbliżej podanej liczby.

1. $2\sqrt{2}$
2. $4\sqrt{3}$
3. $\sqrt{2}-3$
4. $\sqrt{3}+1$
5. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
6. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$
7. $2\sqrt{2}-4\sqrt{3}$
8. $5\sqrt{2}-5$
9. $6-2\sqrt{3}$

**Ćwiczenie 6**

Wskaż liczby niewymierne, które zawarte są między podanymi liczbami naturalnymi $5$ i $6$.

- [ ] $\sqrt{35}$
- [ ] $\sqrt{37}$
- [ ] $\sqrt{33}$
- [ ] $\sqrt{34}$
- [ ] $\sqrt{31}$
- [ ] $\sqrt{24}$

**Ćwiczenie 7**

Wskaż liczby niewymierne, które zawarte są między podanymi liczbami naturalnymi $5$ i $6$.

- [ ] $\sqrt{29}$
- [ ] $\sqrt{36}$
- [ ] $\sqrt{30}$
- [ ] $\sqrt{27}$
- [ ] $\sqrt{26}$
- [ ] $\sqrt{25}$

**Ćwiczenie 8**

Wskaż liczby niewymierne, które zawarte są między podanymi liczbami naturalnymi $16$ i $17$.

- [ ] $\sqrt{289}$
- [ ] $\sqrt{288}$
- [ ] $\sqrt{285}$
- [ ] $\sqrt{262}$
- [ ] $\sqrt{256}$
- [ ] $\sqrt{290}$
- [ ] $\sqrt{280}$
- [ ] $\sqrt{273}$
- [ ] $\sqrt{260}$
- [ ] $\sqrt{255}$
- [ ] $\sqrt{267}$
- [ ] $\sqrt{257}$

**Ćwiczenie 9**

Wskaż liczby niewymierne, które zawarte są między podanymi liczbami naturalnymi $20$ i $21$.

- [ ] $\sqrt{440}$
- [ ] $\sqrt{441}$
- [ ] $\sqrt{400}$
- [ ] $\sqrt{401}$
- [ ] $\sqrt{443}$
- [ ] $\sqrt{411}$
- [ ] $\sqrt{432}$
- [ ] $\sqrt{398}$
- [ ] $\sqrt{426}$
- [ ] $\sqrt{437}$
- [ ] $\sqrt{409}$
- [ ] $\sqrt{430}$

**Ćwiczenie 10**

Wskaż liczby niewymierne, które zawarte są między podanymi liczbami naturalnymi $3$ i $4$.

- [ ] $\sqrt[3]{61}$
- [ ] $\sqrt[3]{64}$
- [ ] $\sqrt[3]{25}$
- [ ] $\sqrt[3]{27}$
- [ ] $\sqrt[3]{66}$
- [ ] $\sqrt[3]{50}$
- [ ] $\sqrt[3]{30}$
- [ ] $\sqrt[3]{41}$
- [ ] $\sqrt[3]{46}$
- [ ] $\sqrt[3]{28}$

**Ćwiczenie 11**

Wskaż liczby niewymierne, które zawarte są między podanymi liczbami naturalnymi $6$ i $7$.

- [ ] $\sqrt[3]{346}$
- [ ] $\sqrt[3]{243}$
- [ ] $\sqrt[3]{334}$
- [ ] $\sqrt[3]{252}$
- [ ] $\sqrt[3]{216}$
- [ ] $\sqrt[3]{218}$
- [ ] $\sqrt[3]{300}$
- [ ] $\sqrt[3]{215}$
- [ ] $\sqrt[3]{316}$
- [ ] $\sqrt[3]{343}$

## Ćwiczenie 12

Wskaż liczby niewymierne, które zawarte są między podanymi liczbami naturalnymi $10$ i $11$.

- [ ] $\sqrt[3]{1330}$
- [ ] $\sqrt[3]{1421}$
- [ ] $\sqrt[3]{1331}$
- [ ] $\sqrt[3]{999}$
- [ ] $\sqrt[3]{1265}$
- [ ] $\sqrt[3]{1121}$
- [ ] $\sqrt[3]{1223}$
- [ ] $\sqrt[3]{1191}$
- [ ] $\sqrt[3]{1000}$
- [ ] $\sqrt[3]{1011}$

## Ćwiczenie 13

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 14

Uporządkuj liczby kolejności rosnącej.

$\sqrt{14}+\sqrt{3}$

$2+\sqrt{19}$

$\sqrt{10}+\sqrt{5}$

$\sqrt{17}+1$

$3+\sqrt{15}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 15

Przeciągnij i upuść.

$\approx 3{,}32$

$\approx 4{,}12$

$\approx 6{,}32$

$\approx 1{,}91$

$\approx 2{,}29$

$\approx 3{,}36$

$\sqrt[3]{39}$ $\sqrt[3]{9}$ $\sqrt[3]{12}$ $\sqrt[3]{14}$ $\sqrt{13}$ $\sqrt[3]{40}$ $\sqrt{42}$ $\sqrt[3]{7}$ $\sqrt[3]{13}$ $\sqrt{18}$ $\sqrt{44}$

$\sqrt{11}$ $\sqrt{17}$ $\sqrt{40}$ $\sqrt[3]{8}$ $\sqrt[3]{38}$ $\sqrt{19}$ $\sqrt{12}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 16**

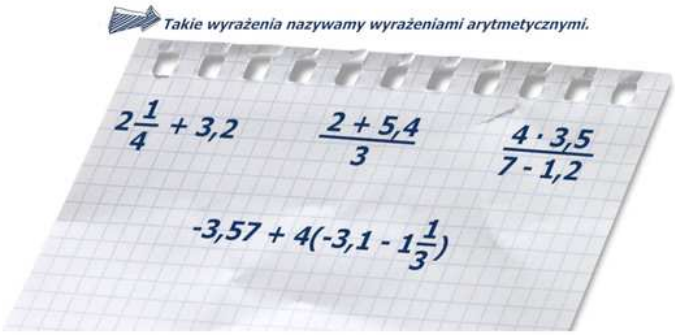
Uzasadnij, że liczba $a$ jest większa od liczby $b$. Nie używaj kalkulatora.

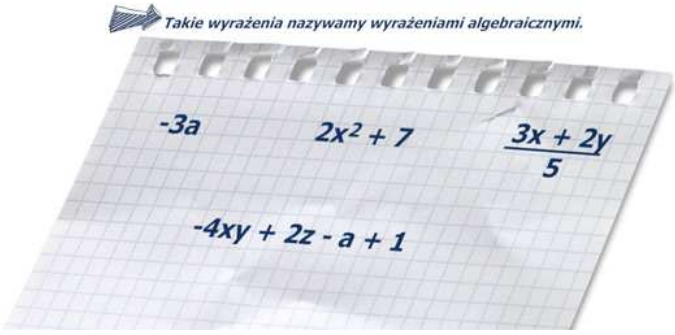
1. $a = \sqrt{105}, b = \sqrt[3]{1050}$
2. $a = 15\sqrt[3]{4}, b = 13\sqrt{3}$

# Jednomiany i sumy algebraiczne

**Już wiesz**

**Wyrażenie algebraiczne** to takie wyrażenie, w którym występują liczby i litery połączone znakami działań matematycznych oraz nawiasami.




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Zapamiętaj!**

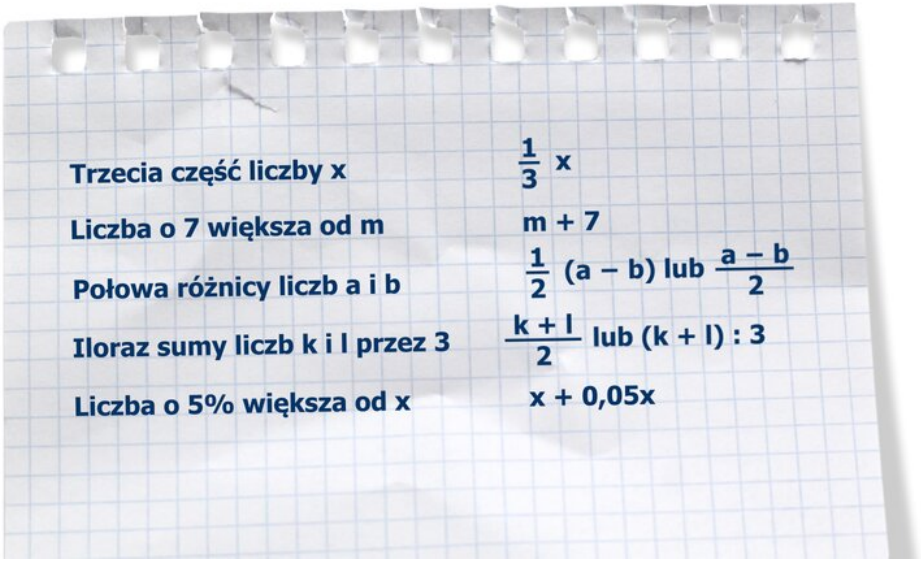
- **Wyrażenia algebraiczne** utworzone są z liczb, liter, znaków działań matematycznych oraz nawiasów.
- W wyrażeniach algebraicznych można pominąć znak mnożenia między dwiema literami oraz liczbą i literą, jeżeli liczba występuje w tym zapisie jako

pierwsza.

Za pomocą wyrażeń algebraicznych możemy zapisywać na przykład wzory matematyczne. Nazwę wyrażenia algebraicznego określa działanie, które zgodnie z kolejnością wykonywania działań byłoby wykonywane jako ostatnie.

**Przykład 1**

Zapiszemy za pomocą wyrażeń algebraicznych zwroty matematyczne:




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

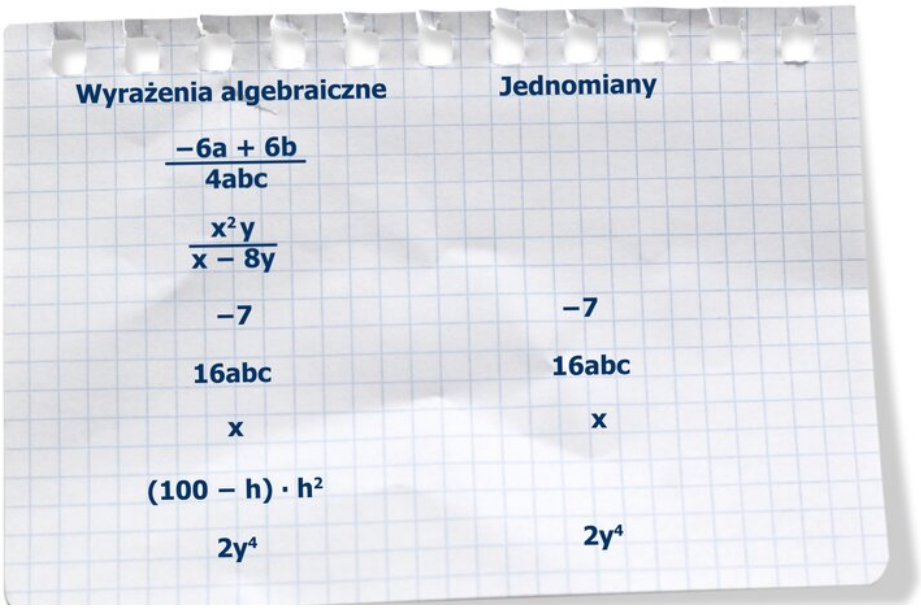
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 2**

Spośród poniższych wyrażeń algebraicznych wybierzmy liczby, litery lub iloczyn liczb i liter.




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Definicja: Jednomian**

**Jednomianem** nazywamy wyrażenie algebraiczne, które jest liczbą, literą lub iloczynem liczb i liter.

**Ważne!**

Wyrażenie algebraiczne zbudowane jest z jednomianów.

Tabela. Dane

| Wyrażenie algebraiczne | Jednomiany tworzące to wyrażenie |
|---|---|
| $\frac{-6a+6b}{4\,\mathrm{abc}}$ | $-6a,\ 6b,\ 4\,\mathrm{abc}$ |
| $\frac{x^2y}{x+(-8y)}$ | $x^2y,\ x,\ -8y$ |
| $(100-h)\bullet h^2$ | $100,\ h,\ h^2$ |

Występujący w jednomianie znak mnożenia często pomijamy, na przykład:

$$4 \bullet x = 4x x \bullet y = \text{xy } - 15 \bullet a = -15a$$

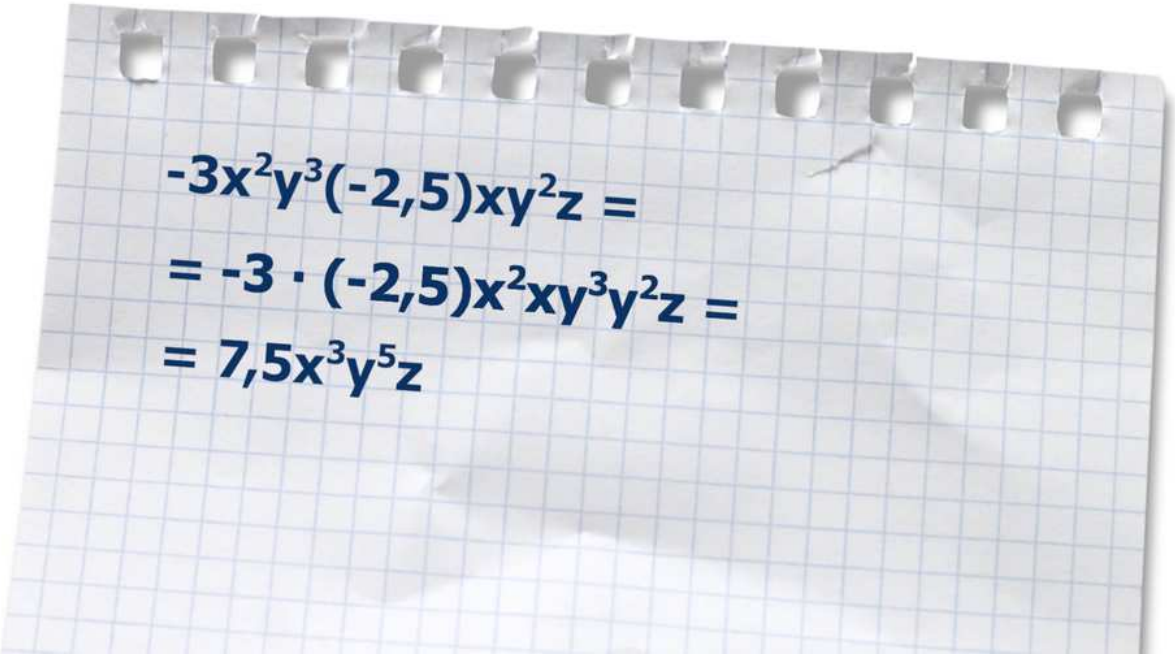
Jeżeli w jednomianie pierwszym czynnikiem jest litera, a drugim liczba, to znaku mnożenia nie pomijamy. Na przykład:

$$x \bullet 3 = 3x, a \bullet (-9) = -9a$$

**Przykład 3**

Uporządkujemy jednomian $-3x^2y^3 \cdot (-2{,}5)xy^2z = 7{,}5x^3y^5z$.

**Przykład 4**



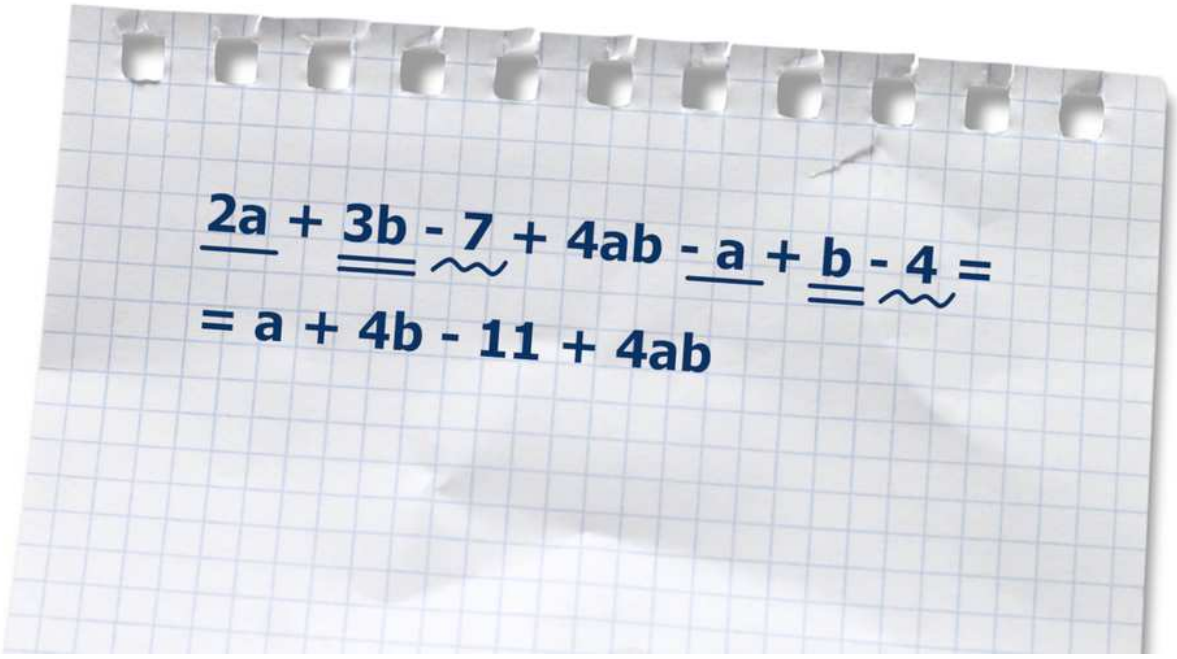

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 5**



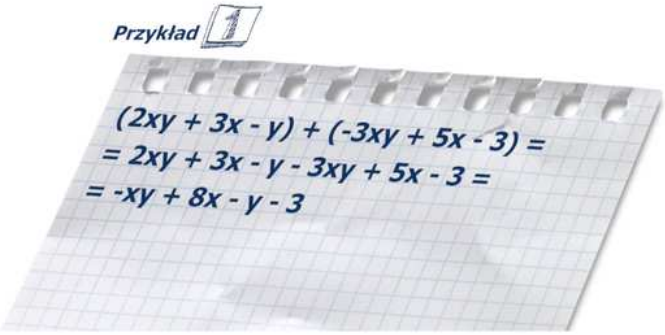

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

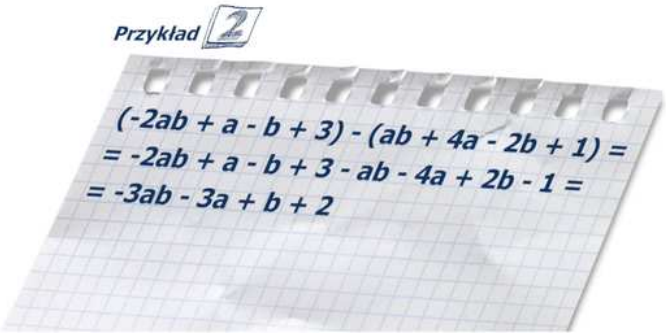
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 6**




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

## Ćwiczenie 1

Jednomianem jest wyrażenie:

- $2\mathrm{a} + 5b$
- $\frac{x+y}{3}$
- $-\frac{2}{3}x^3\,\mathrm{yx}$
- $\frac{3}{x}$

## Ćwiczenie 2

Połącz w pary jednomiany przed uporządkowaniem z odpowiadającymi im jednomianami po uporządkowaniu.

| | |
|---|---|
| $-2\sqrt[3]{27}x^3y^2 \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{4}}\right)z^2$ | $\frac{12}{25}a^3b^4$ |
| $3,5ab^3 \cdot \frac{1}{7}a^2b$ | $-8ab^3$ |
| $-2^2xy^2z^3 \cdot \left(-0,55\right)x$ | $\frac{1}{2}a^3b^4$ |
| $-2\sqrt{2}ab^2 \cdot \sqrt{2}b$ | $3\frac{1}{5}x^3y^2z^3$ |
| $0,8x^3yz^2 \cdot \left(-2\right)^2yz$ | $-4ab^3$ |
| $\sqrt[3]{8}ab \cdot \left(-4\right)b^2$ | $2\frac{1}{5}x^2y^2z^3$ |
| $-0,24a^2b^4 \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right) \cdot 4$ | $3x^3y^2z^2$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 3**

Jednomian $-2x^2y$ powstanie po uporządkowaniu jednomianu

- $\frac{-12\,\mathrm{xyy}}{6}$
- $\frac{4\,\mathrm{xxyy}}{-2}$
- $\frac{6\,\mathrm{yxx}}{-3}$
- $\frac{-8\,\mathrm{xyx}}{2}$

**Ćwiczenie 4**

Uporządkuj jednomiany.

1. $-\,4\sqrt[3]{32}a^2b^3\cdot\sqrt[3]{2}a^3b$
2. $-32xy^5z^2\cdot\left(-2\sqrt{3}\right)x^2y$
3. $-14\mathrm{ab}\cdot(-0{,}2)a^2b^3\cdot 0{,}1$
4. $-z^2\cdot(-x)^3\cdot\left(-3{,}5z\right)\cdot 0{,}2x$
5. $2\sqrt{2}\,a^4\mathrm{c}\cdot\left(-\sqrt{8}\right)c^2$
6. $\frac{0{,}8xy^2}{4}\cdot(-0{,}5)x^2$
7. $\frac{1}{3}\mathrm{ab}\,c^3\cdot(-8)a^2$

## Ćwiczenie 5

Przeciągnij i upuść odpowiednie jednomiany tak, aby prawdziwe były podane równości.

a) $-2,5a^4b^3 = -0,5ab^2 \cdot$ ☐

b) $2xy^2 = \sqrt{2}y \cdot$ ☐

c) $-2kl^2 = -0,5l \cdot$ ☐

d) $5a^2m^3p = \frac{1}{5}amp \cdot$ ☐

e) $2xyz^3 = -z^2 \cdot$ ☐

$\sqrt{2}xy$ | $4k^2$ | $25am^3$ | $5a^4b$ | $25am^2$ | $5a^3b$ | $4kl$ | $-2xyz$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6

Po redukcji wyrazów podobnych sumy algebraicznej

$4\mathrm{xy} - 2\mathrm{x} + \mathrm{xy} - \mathrm{x} + 5\mathrm{y} - 7 + \mathrm{y}$ otrzymamy

- ○ $5\mathrm{xy} - 2\mathrm{x} + 6\mathrm{y} - 7$
- ○ $5\mathrm{xy} - 3\mathrm{x} + 6\mathrm{y} - 7$
- ○ $4\mathrm{xy} - 3\mathrm{x} + 6\mathrm{y} - 7$
- ○ $4\mathrm{xy} - 2\mathrm{x} + 5\mathrm{y} - 7$

## Ćwiczenie 7

Zredukuj wyrazy podobne sumy algebraicznej.

1. $-2\sqrt{2}x^2 + 3x^2y - 2\,\mathrm{xy} + \sqrt{2}x^2 - 5\,\mathrm{yx}$
2. $1{,}7xy^2 + 2{,}6x^2y - 5{,}8x^2y^2 + 0{,}25yx^2 - 4{,}75y^2x$
3. $5\sqrt{3}\,\mathrm{ab} - 3,2a^2 + \sqrt{3}\,\mathrm{ab} - 2\sqrt{3}\,a + 1,8a^2$
4. $-\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}y$

## Ćwiczenie 8

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9

Po opuszczeniu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych wyrażenie $(-3x + 2y - 8) + (4x - 5y + 3)$ będzie miało postać

- $-7x + 7y - 11$
- $-x + 3y + 5$
- $x - 7y + 5$
- $x - 3y - 5$

## Ćwiczenie 10

Po opuszczeniu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych wyrażenie $(-5x + 2y - 7) - (4x - 3y + 1)$ ma postać

- $-x + 5y - 6$
- $-x - y - 6$
- $-9x - y - 8$
- $-9x + 5y - 8$

**Ćwiczenie 11**

Zapisz podane wyrażenia bez użycia nawiasów i zredukuj wyrazy podobne.

1. $5\mathrm{x} - (-3\mathrm{x} + 2\mathrm{y} - \mathrm{z}) + (3\mathrm{x} - \mathrm{y} + 5z)$
2. $-(3{,}5\mathrm{ab} - 4\mathrm{a} + 0{,}7\mathrm{b} - 2) + (-1{,}5\mathrm{ab} - 7{,}2\mathrm{b} + 2\mathrm{a} - 4)$
3. $2x^2 - \left(-5x^2 - 4\mathrm{y} + 3{,}5\,z^2\right) - \left(1{,}5\mathrm{y} - 3x^2 + 2z\right)$
4. $4xy^2 + \left(-2x^2y - 5y^2 + 3x^2\right) - \left(-x^2 - x^2y - xy^2\right)$
5. $-\left(5a^2b^3 - 4a^3b^2 + a^2b^2\right) + \left(-1,5b^2a^3 - 0,5b^3a^2 - a^2b^2\right) + 3,5a^2b^2$

**Ćwiczenie 12**

W trójkącie $\mathrm{KLM}$ długość podstawy $\mathrm{KL}$ wynosi $\frac{1}{2}y$, wysokość opuszczona na podstawę $\mathrm{KL}$ z wierzchołka $M$ stanowi $1{,}5$ długości podstawy. Zapisz w postaci uporządkowanego jednomianu wyrażenie opisujące pole tego trójkąta.

**Ćwiczenie 13**

Pole trójkąta jest opisane za pomocą wyrażenia $2{,}7x^3y^2$, a jego podstawa za pomocą wyrażenia $5{,}4\,\mathrm{xy}$. Zapisz w postaci uporządkowanego jednomianu wyrażenie opisujące wysokość trójkąta opuszczoną na tę podstawę.

**Ćwiczenie 14**

Jeden z boków prostokąta ma długość $x$, a drugi stanowi $40\,\%$ tej długości. Zapisz w postaci uporządkowanych jednomianów wyrażenia opisujące obwód i pole tego prostokąta.

**Ćwiczenie 15**

Tort przygotowany na przyjęcie urodzinowe Ali ważył $x$ kilogramów. Ala odkroiła $20\,\%$ tortu dla brata i siostry, którzy nie mogli być obecni na przyjęciu. Pozostałą część podzieliła równo pomiędzy wszystkich uczestników przyjęcia. Ile ważył kawałek tortu, jaki otrzymał każdy uczestnik, jeżeli Ala zaprosiła $7$ koleżanek i $8$ kolegów?

**Ćwiczenie 16**

Zosia zrobiła łańcuch choinkowy o długości $x$. Łańcuch zrobiony przez Olę stanowił $\frac{4}{5}$ długości łańcucha Zosi. Łańcuch Kasi był $1{,}7$ razy dłuższy od łańcucha Oli, a łańcuch Asi był $1{,}2$ razy dłuższy od łańcucha Kasi. Jaka była długość łańcucha wykonanego przez Asię?

**Ćwiczenie 17**

Rozstrzygnij, czy równość jest prawdziwa, czy fałszywa.

- [ ] $-2\sqrt{2}ab^2 - \sqrt{3}b + 5\sqrt{3}b - \sqrt{2}b^2a - 2\,\mathrm{ab} = 4\sqrt{3}b - 3\sqrt{2}ab^2 - 2\,\mathrm{ab}$
- [ ] $-2{,}5ab^2 \cdot \left(-4ab^2\right)^2 = -40a^3b^5$
- [ ] $-3xy^2 \cdot \left(-1{,}5x\right) \cdot 2x^2y = -9x^4y^3$
- [ ] $-\left(x^2y + 3\,\mathrm{xy} - 5\right) - \left(-2yx^2 + \mathrm{xy} + 2\right) = -3x^2y - 4\,\mathrm{xy} + 3$

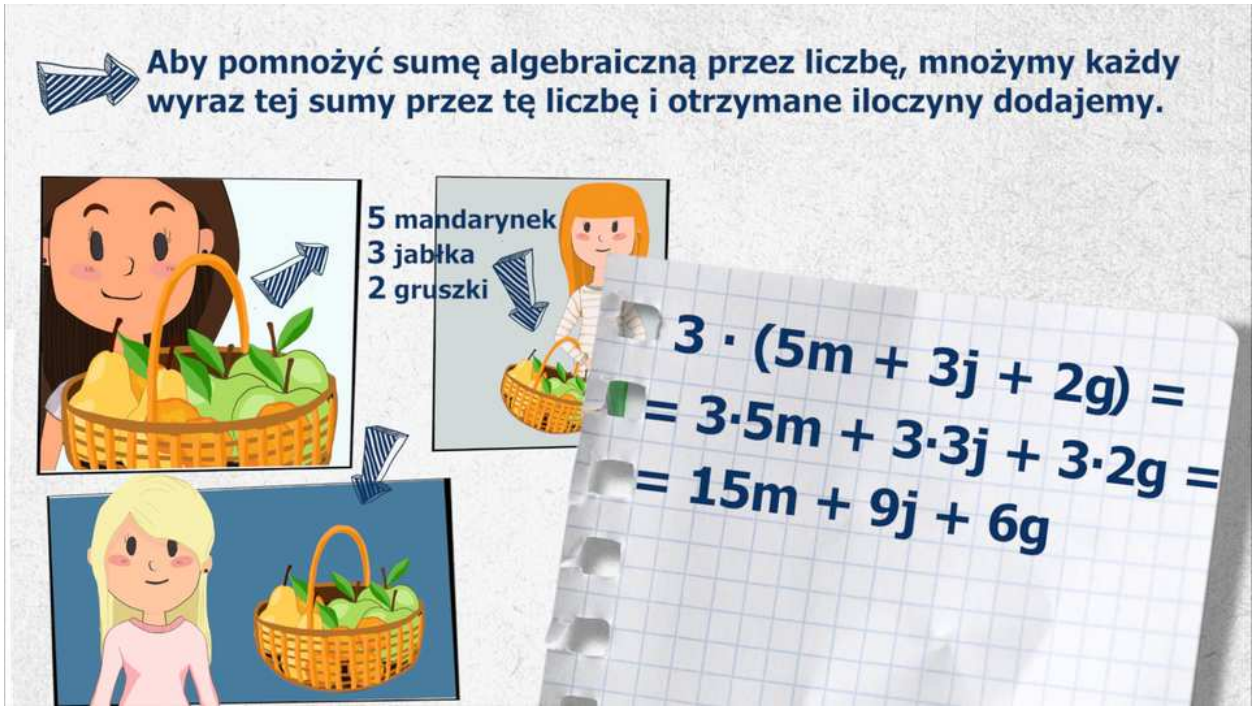
**Ćwiczenie 18**

Utworzono liczbę trzycyfrową o cyfrze setek $a$, cyfrze dziesiątek $b$ i cyfrze jedności $c$. Od tej liczby odjęto liczbę trzycyfrową o cyfrze setek $b$, cyfrze dziesiątek $c$ i cyfrze jedności $a$. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego liczbę będącą wynikiem tego odejmowania.

# Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

**Już wiesz**

- Aby pomnożyć jednomian przez sumę algebraiczną, mnożymy każdy składnik sumy przez ten jednomian.
- Aby podzielić sumę algebraiczną przez jednomian, dzielimy każdy składnik sumy przez ten jednomian.




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 1**

Pomnóżmy sumę algebraiczną $2x^2 - 2xy + 5y$ przez liczbę $-3$.

$-3 \cdot \left(2x^2 - 2\mathrm{xy} + 5y\right) = -3 \cdot 2x^2 - \left(-3\right) \cdot 2\mathrm{xy} + \left(-3\right) \cdot 5\mathrm{y} = -6x^2 + 6\mathrm{xy} -$

Pomnóżmy teraz tę samą sumę przez jednomian $5x^2y$. Wykorzystamy twierdzenie dotyczące mnożenia potęg o tej samej podstawie.

$y \cdot \left(2x^2 - 2\mathrm{xy} + 5y\right) = 5x^2\mathrm{y} \cdot 2x^2 - 5x^2\mathrm{y} \cdot 2\mathrm{xy} + 5x^2\mathrm{y} \cdot 5\mathrm{y} = 10x^4\mathrm{y} - 10x^3y^2 +$

**Przykład 2**

Podzielmy sumę algebraiczną $12a^2b^3 + 6ab^4 - 4a^3b$ przez jednomian $2\,\mathrm{ab}$. Skorzystamy z twierdzenia dotyczącego dzielenia potęg o tej samej podstawie.

$$\frac{12a^2b^3+6ab^4-4a^3b}{2\,\mathrm{ab}} = \frac{12a^2b^3}{2\,\mathrm{ab}} + \frac{6ab^4}{2\,\mathrm{ab}} - \frac{4a^3b}{2\,\mathrm{ab}} = 6ab^2 + 3b^3 - 2a^2$$

Podzielmy teraz tę samą sumę przez jednomian $4a^2b^2$.

$$\frac{12a^2b^3+6ab^4-4a^3b}{4a^2b^2} = \frac{12a^2b^3}{4a^2b^2} + \frac{6ab^4}{4a^2b^2} - \frac{4a^3b}{4a^2b^2} = 3b + 1{,}5a^{-1}b^2 - ab^{-1}$$

**Ćwiczenie 1**

Pomnóż jednomiany przez sumy algebraiczne.

1. $3x^2y\left(-2,5x^3y^2 + 4xy^2 - 5y\right)$
2. - $\frac{1}{3}\mathrm{ab}\left(\frac{3}{4}ab^3 - \frac{6}{11}a + 9a^4b^2\right)$
3. $-1{,}2k^2l^3\left(-2{,}5kl^2 + 4{,}8l^3 - 5{,}2k^4 + 2\,\mathrm{kl}\right)$
4. $2{,}5m^2n^4\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{m}n^2 - 0{,}4m^2\mathrm{n} + 3\frac{1}{4}m^3n^2\right)$
5. $-2xy^6\left(-3,5x^6y + 4xy^2 - 0,3x^3y^2\right)$
6. $\frac{\mathrm{ab}}{2}\left(-4ab^3 + 12a^3b - 0,5\,\mathrm{ab}\right)$
7. $2\sqrt{2}x^2y\left(-\sqrt{2}\,\mathrm{xy} + 3\sqrt{2}xy^2 + \sqrt{2}\right)$

## Ćwiczenie 2

Podziel sumy algebraiczne przez jednomian.

1. $\frac{5x^2y^2+3x^3y-2xy^4}{x^2y^2}$
2. $\left(-18x^3y^5 + 3x^5y^3 - 9xy^4\right) : \left(-3\,\mathrm{xy}\right)$
3. $\left(24a^5b^4 - 18a^3b^4 + 12a^2b\right) : 3a^2b^2$
4. $\frac{-1{,}2x^2y^4-3{,}6x^3y+2{,}4xy^5}{2x^3y^3}$
5. $\left(3\sqrt{3}a^4b^3 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{ab} + \sqrt{3}ab^4\right) : \sqrt{3}\,\mathrm{ab}$

## Ćwiczenie 3

Przeciągnij i upuść jednomiany tak, aby podane równości były prawdziwe.

a) $4ab^2\left(-2a + 3b - \square\right) = -8a^2b^2 + 12ab^3 - 20a^2b^3$

b) $-0,75ab\left(-4a^2 + 12ab^3 - \square\right) = \square - 9a^2b^4 + 7,5ab$

c) $-\frac{2}{3}a\left(\square + 9a^2b + 12ab^2\right) = 4a^2b - 6a^3b - 8a^2b^2$

d) $\sqrt{3}ab^2\left(2\sqrt{3}b - \square + \sqrt{27}a^2b\right) = 6ab^3 - 6a^3b^2 + \square$

e) $1,2b^2\left(-2,5ab + 0,1a - \square\right) = \square + 0,12ab^2 - 6a^2b^3$

$5a^2b$ | $3a^3b$ | $-3ab^3$ | $9a^3b^3$ | $-6ab$ | $10$ | $\sqrt{12}a^2$ | $5ab$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 4

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Po wykonaniu mnożenia jednomianu $0{,}1\,\mathrm{xy}$ przez sumę algebraiczną $-\,0{,}1\mathrm{xy} - 0{,}1$ otrzymamy $0{,}01x^2y^2 - 0{,}01\,\mathrm{xy}$.
- [ ] Wyrażenia $-\,2a\left(1{,}5\mathrm{ab}\ +\ 4\mathrm{b} - 2{,}5\ \mathrm{a}b^2\right)$ i $5a^2b^2 - 3a^2b - 8\mathrm{ab}$ są równe.
- [ ] Wysokość trójkąta o polu $16a^2\ +\ 32a$ opuszczona na bok o długości $8a$ jest równa $4\mathrm{a}\ +\ 8$.
- [ ] Mnożąc jednomian przez sumę algebraiczną, mnożymy współczynnik liczbowy jednomianu przez współczynniki liczbowe wyrazów sumy algebraicznej, pozostawiając czynniki literowe wyrazów sumy algebraicznej bez zmian.
- [ ] Pole prostokąta, którego jeden bok ma długość $2x$, a drugi jest od niego o $y$ krótszy, jest równe $4x^2 - \mathrm{y}$.

## Ćwiczenie 5

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $2\sqrt[3]{2}x^2y\left(\sqrt[3]{4}x - \sqrt[3]{32}y^2\right)$ | $-6x^2y^2 - 3x^2y^3$ |
| $-4xy\left(-1,5x^2y + 2,5xy^2\right)$ | $6x^3y^2 - 10x^2y^3$ |
| $-\frac{3}{4}xy^2\left(8x + 4xy\right)$ | $6x^3y^2 - 12x^2y^3$ |
| $1,2x^2y^2\left(5x - 10y\right)$ | $4x^3y - 8x^2y^3$ |
| $\sqrt{5}x^2\left(2\sqrt{5}xy^2 - \sqrt{20}y^2\right)$ | $10x^3y^2 - 10x^2y^2$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 6**

Dane są wyrażenia algebraiczne:

$\mathrm{A} = -5x^2y^2 + 3{,}5x^2\mathrm{y} - 7xy^2 + 9\,\mathrm{xy}$

$\mathrm{B} = 5\mathrm{xy}$

Wykonaj działania i przedstaw wyniki w najprostszej postaci.

1. $A \bullet B$
2. $\frac{A}{B}$

**Ćwiczenie 7**

W trapezie krótsza podstawa ma długość $\mathrm{x} + 2$, dłuższa podstawa jest od niej o $2y$ dłuższa, a wysokość wynosi $4\,\mathrm{xy}$. Zapisz wyrażenie opisujące pole trapezu.

**Ćwiczenie 8**

Na parkingu stoi $20$ pojazdów, z czego $x$ to samochody, a reszta to rowery. Ile kół mają łącznie wszystkie pojazdy stojące na tym parkingu?

**Ćwiczenie 9**

Antek kolekcjonuje monety. W zbiorach Antka znajduje się $x$ monet polskich i o $2y$ więcej monet pochodzenia zagranicznego. Zapisz wyrażenie opisujące ilość monet zgromadzonych przez Antka.

**Ćwiczenie 10**

Przez pierwsze trzy miesiące roku pan Kowalski zarabiał miesięcznie po $\mathrm{x}$ zł.
W kwietniu, maju i czerwcu jego miesięczna pensja była niższa o $150$ zł od pensji marcowej. W pozostałych sześciu miesiącach pensja miesięczna wynosiła $115\,\%$ pensji miesięcznej z pierwszego kwartału. Jakie było średnie miesięczne wynagrodzenie pana Kowalskiego w ciągu tego roku?

# Mnożenie sum algebraicznych

**Zapamiętaj!**

Aby pomnożyć przez siebie dwie sumy algebraiczne, mnożymy każdy wyraz pierwszej sumy przez każdy wyraz drugiej sumy.

**Przykład 1**

Pomnożymy przez siebie sumy algebraiczne:

$$5y) = -2\mathrm{x}\cdot\mathrm{x} + 2\mathrm{x}\cdot 5\mathrm{y} + 3\mathrm{y}\cdot\mathrm{x} - 3\mathrm{y}\cdot 5\mathrm{y} = -2x^2 + 10\mathrm{xy} + 3\mathrm{xy} - 15y^2 =$$

**Przykład 2**

Pomnożymy przez siebie sumy algebraiczne, wykorzystując prawa działań na potęgach o wykładniku naturalnym.

$$\left(3a^2\mathrm{b} - 5b\right)(-4\mathrm{ab} + 3b) =$$

$$= -3a^2\mathrm{b}\cdot 4\mathrm{ab} + 3a^2\mathrm{b}\cdot 3\mathrm{b} + 5\mathrm{b}\cdot 4\mathrm{ab} - 5\mathrm{b}\cdot 3\mathrm{b} =$$

$$= -12a^3b^2 + 9a^2b^2 + 20ab^2 - 15b^2$$

**Przykład 3**

Pomnożymy przez siebie trzy sumy algebraiczne

$$(2\mathrm{x} + 3y)(\mathrm{x} - 2y)(-3\mathrm{x} + \mathrm{y})$$

W pierwszej kolejności mnożymy przez siebie dwie sumy algebraiczne, a następnie wynik tego działania mnożymy przez trzecią sumę.

$$(2x + 3y)(x - 2y)(-3x + y) =$$

$$= \left(2x^2 - 4xy + 3xy - 6y^2\right)(-3x + y) =$$

$$= \left(2x^2 - xy - 6y^2\right)(-3x + y) =$$

$$= -6x^3 + 2x^2y + 3x^2y - xy^2 + 18xy^2 - 6y^3 =$$

$$= -6x^3 + 5x^2y + 17xy^2 - 6y^3$$

**Ćwiczenie 1**

Pomnóż sumy algebraiczne.

1. $(-2a + 3b)(8a - 5b)$
2. $\left(4x^2 - 2y\right)\left(-3x + 6y^2\right)$
3. $(5xy - 3x + 2y)(-3x + 7xy)$
4. $\left(-2a^3 + 4b - 3\right)\left(2b^2 - 5a + 1\right)$
5. $(-3xy + 2x - 3y)(x - 5y + 3)$
6. $\left(4ab^2 - 3a^2 + 1\right)\left(-3a^2b + 2b - 3\right)$
7. $\left(2{,}5x^2y - 0{,}4x + 1{,}2y\right)\left(-2xy^2 + 3y - 0{,}8x\right)$
8. $\left(1\frac{1}{2}a - 2\frac{2}{3}b\right)\left(-2ab + \frac{3}{8}\right)$
9. $\left(-1\frac{3}{4}xy + 4y\right)\left(2\frac{1}{2}x - 4xy\right)$

**Ćwiczenie 2**

Zapisz iloczyn w postaci sumy.

1. $\left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)\left(-2\sqrt{7} + 3\sqrt{2}\right)$
2. $\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{6}\right)\left(-\sqrt{15} + \sqrt{2}\right)$
3. $\left(\sqrt{5} + 3\right)\left(3\sqrt{5} - 4\right)$
4. $\left(\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - 3\sqrt{6}\right)$
5. $\left(-5\sqrt{3} + 4\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{6} - 5\right)$

## Ćwiczenie 3

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $\left(1,2xy-0,5y^2\right)\left(-5xy+10x^2\right)$ | $-12x^2y^3+6xy^3+16x^2y-8xy$ |
| $\left(\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y\right)\left(-\sqrt{18}x+\sqrt{8}y\right)$ | $-6x^2y+12x^2+15xy^2-30xy$ |
| $\left(2,5x^2y^2-4xy^3\right)\left(-2+8x\right)$ | $-11x^2y^2+12x^3y+2,5xy^3$ |
| $\left(1\frac{1}{2}x-3\frac{3}{4}y\right)\left(-4xy+8x\right)$ | $-5x^2y^2+20x^3y^2+8xy^3-32x^2y^3$ |
| $\left(-3xy^2+4x\right)\left(4xy-2y\right)$ | $-6x^2+22xy-12y^2$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 4

Przeciągnij i upuść jednomiany tak, aby podane równości były prawdziwe.

a) $\left(2ab-3b^2\right)\left(-2,5a+5b^2\right)=$ [ ] $+10ab^3+7,5ab^2-15b^4$

b) $\left(-4xy+5x\right)\left(2x^2y-xy^2\right)=-8x^3y^2+$ [ ] $+10x^3y-5x^2y^2$

c) $\left(1,5a^3b-2,2ab^2\right)\left(-4a+3,5ab\right)=-6a^4b+$ [ ] $+8,8a^2b^2-7,7a^2b^3$

d) $\left(1\frac{1}{2}x-4,5y^2\right)\left(-2y^2+3x\right)=$ [ ] $+4,5x^2+9y^4-13,5xy^2=$ [ ] $+4,5x^2+9y^4$

e) $(5,5xy-1,2y)($ [ ] $+10y)=-11x^2y+55xy^2+2,4xy-12y^2$

f) $\left(4a^2b^2+\right.$ [ ] $\left.\right)\left(-2ab+5a\right)=-8a^3b^3+20a^3b^2-6ab^3+15ab^2$

$-3xy^2$ | $3b^2$ | $3b$ | $-16,5xy^2$ | $-2x$ | $5\frac{1}{4}a^4b^2$ | $-5a^2b$ | $4x^2y^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 5

Pomnóż sumy algebraiczne.

1. $(2a-3)(a+1)(-3a+4)$
2. $(4x+2y)(-5x-y)(3y-x)$
3. $(2a+3b)(3b-2a)(a-b)$
4. $(5x-4)(-x+3)(2x+1)$

## Ćwiczenie 6

Przeciągnij i upuść jednomiany tak, aby podane równości były prawdziwe.

a) $(-5y+1)(2y-3)(y+2) = -10y^3 - \boxed{\phantom{xx}}\, y^2 + 31y - 6$

b) $(3x+2y)(-x-3y)(x-3) = -3x^3 + 9x^2 - 11x^2y + \boxed{\phantom{xx}} - 6xy^2 + 18y^2$

c) $(-2a+4b)(a-b)(4a-2b) = -8a^3 + \boxed{\phantom{xx}} - 28ab^2 + 8b^3$

d) $(7x-3)(3y+2)(x-y) = 21x^2y - 21xy^2 + 14x^2 - \boxed{\phantom{xx}} + 9y^2 - 6x + 6y$

$33xy$ | $23xy$ | $5xy$ | $20a^2b$ | $28a^2b$ | $7$ | $3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7

Objętość sześcianu o krawędzi długości $x-1$ można zapisać w postaci

- ○ $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
- ○ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
- ○ $x^3 + 3x^2 - 3x - 1$
- ○ $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$

## Ćwiczenie 8

Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

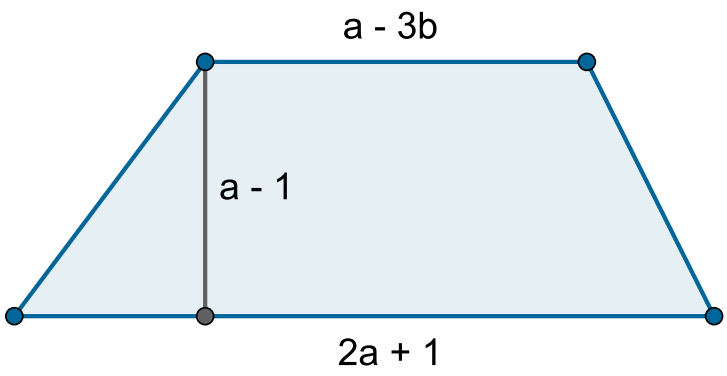
- [ ] Mnożąc sumy algebraiczne $\left(-2\sqrt{3}\mathrm{x} + 4y\right)\left(\sqrt{12}\mathrm{y} - 2x\right)$, otrzymamy $-20\mathrm{xy} + 4\sqrt{3}x^2 + 8\sqrt{3}y^2$.
- [ ] Pole rombu, którego dłuższą przekątną o długości $4x$ wydłużono o $2y$, a krótszą przekątną o długości $y$ skrócono o $2x$, wynosi $2y^2 - 8x^2$.
- [ ] Wyrażenia $(\mathrm{x} - 4y)(4\mathrm{y} + \mathrm{x})$ i $16y^2 - x^2$ są równe.
- [ ] Pole kwadratu o boku $5\mathrm{x} - 1$ można zapisać w postaci $25x^2 - 10\mathrm{x} + 1$.

## Ćwiczenie 9

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości $2\mathrm{x}$ i $\mathrm{y} - 1$. O ile zwiększy się pole tego trójkąta, jeżeli każdą z nich zwiększymy o $4$?

## Ćwiczenie 10

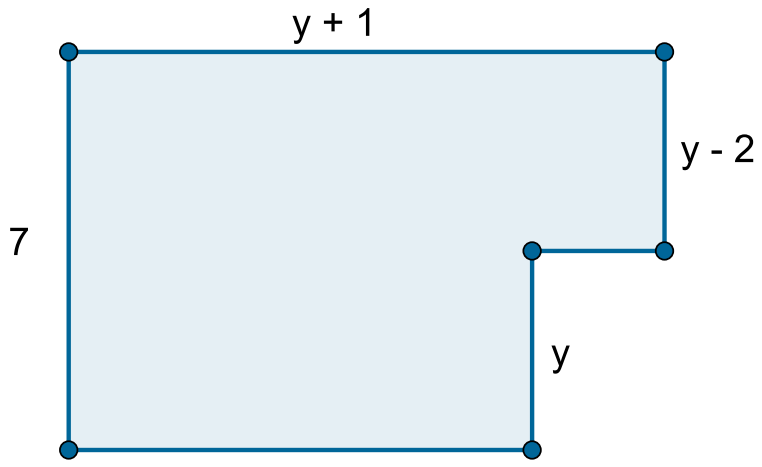
Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego pole trapezu.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 11**

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego pole wielokąta.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 12**

W poniedziałek w księgarni sprzedano $x$ książek, z których każda kosztowała y złotych. Następnego dnia cenę książki obniżono o $5$ zł i wtedy sprzedano o $20$ książek więcej niż pierwszego dnia. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile pieniędzy uzyskała księgarnia ze sprzedaży książek w ciągu dwóch dni.

**Ćwiczenie 13**

Wokół kwadratowego klombu o boku $3a$ metrów biegnie ścieżka o szerokości $2{,}5$ metra. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego pole powierzchni zajmowane przez klomb wraz ze ścieżką.

**Ćwiczenie 14**

Prostokątny obraz umieszczono w ramie. Obraz wraz z ramą ma długość $3\mathrm{x} + 20\ \mathrm{cm}$ i szerokość $2\mathrm{x} + 15\ \mathrm{cm}$. Jakie jest pole powierzchni obrazu, jeżeli szerokość ramy wynosi $18\ \mathrm{cm}$?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 15**

Długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka wynoszą $2x,\ 3y$ i $z$. Jaką objętość będzie miał prostopadłościan, którego każda z krawędzi ma długość o $1$ większą?

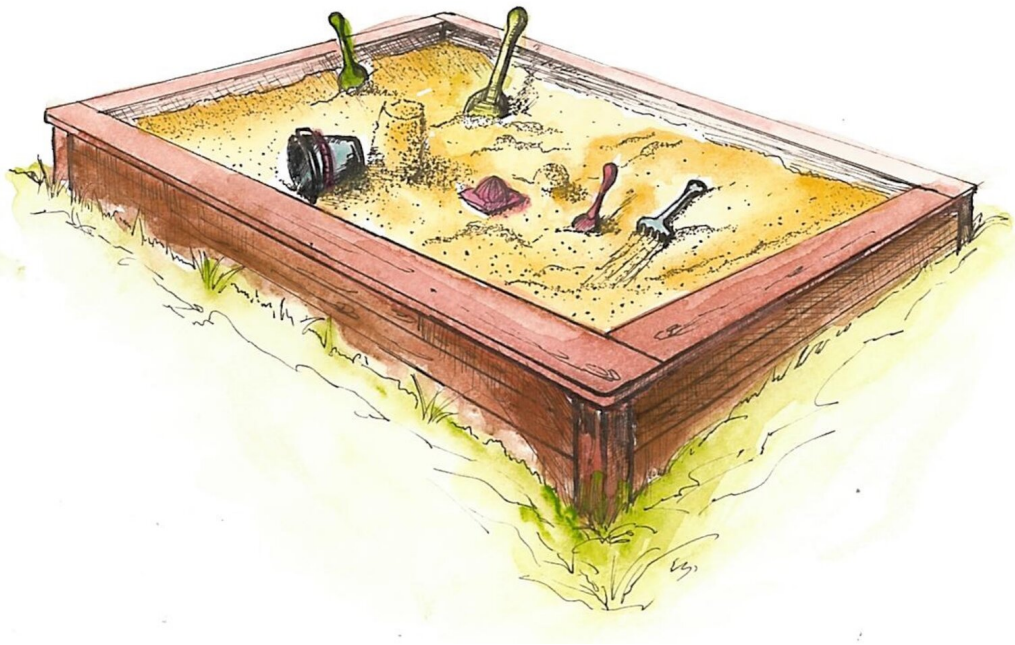
**Ćwiczenie 16**

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego.

1. Iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych, z których największa jest równa $n$.
2. Iloczyn dwóch kolejnych liczb nieparzystych, z których mniejsza jest równa $2\mathrm{n} + 1$.
3. Iloczyn trzech kolejnych liczb parzystych, z których najmniejsza jest równa $2n$.

**Ćwiczenie 17**

Piaskownica jest prostokątem o długości $2a$ metrów $b$ centymetrów i szerokości $3b$ metrów $a$ centymetrów. Ile metrów kwadratowych ma pole powierzchni piaskownicy?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

# Działania na wyrażeniach algebraicznych

Wykorzystując poznane wcześniej wiadomości, możemy wykonywać działania na sumach algebraicznych. Pamiętamy także o tym, że obowiązuje dla nich kolejność wykonywania działań, taka sama jak dla działań na liczbach.

**Przykład 1**

$$-2x(3\mathrm{x}-5y)+(\mathrm{x}-2y)-\left(-3x^2+4\,\mathrm{xy}\right)+(-\mathrm{x}+5y)(3\mathrm{x}+\mathrm{y})=$$

$$=-6x^2+10\,\mathrm{xy}+\mathrm{x}-2\mathrm{y}+3x^2-4\,\mathrm{xy}-3x^2-\mathrm{xy}+15\,\mathrm{xy}+5y^2=$$

$$=-6x^2+20\mathrm{xy}+\mathrm{x}-2\mathrm{y}+5y^2$$

**Przykład 2**

$$-3a(2\mathrm{a}-5)-4(\mathrm{a}-2b)(3\mathrm{a}+\mathrm{b})-(-7\mathrm{a}-8b)=$$

$$=-6a^2+15a-4\left(3a^2+\mathrm{ab}-6\,\mathrm{ab}-2b^2\right)+7a+8b=$$

$$=-6a^2+15a-12a^2-4\mathrm{ab}+24\,\mathrm{ab}+8b^2+7a+8b=$$

$$=-18a^2+20\mathrm{ab}+22\mathrm{a}+8\mathrm{b}+8b^2$$

## Ćwiczenie 1

Wykonaj działania.

1. $(3x^2y-2x)(-2y+3\,\mathrm{xy})-(5\,\mathrm{xy}+8y)(-x+3)$
2. $-7a(\mathrm{ab}+2a^2b^3)+(3a-5b)(4b-8a)$
3. $5x^2y(-2x+4y)-(x^3y-7x^2y^2)+7,5x^2y^2-0,75\,\mathrm{xy}$
4. $\left(2\sqrt{2}x-\sqrt{3}y\right)\left(2\sqrt{2}x+\sqrt{3}y\right)-\left(2\sqrt{2}x-\sqrt{3}y\right)\left(2\sqrt{2}x-\sqrt{3}y\right)$
5. $(1\frac{2}{3}a+2\frac{1}{2}b)(1\frac{2}{3}a+2\frac{1}{2}b)-2\frac{2}{5}(a^2+3\,\mathrm{ab}-5b^2)$
6. $(7,5x-3,4\,\mathrm{xy})(-2x+5y)-2,8(5x^2-10\,\mathrm{xy})$
7. $\left(\sqrt{6}\,\mathrm{ab}-\sqrt{2}a\right)\left(2\sqrt{2}a+\sqrt{6}\,\mathrm{ab}\right)-2\sqrt{3}a\left(3\,\mathrm{ab}-2\sqrt{12}a\right)$

## Ćwiczenie 2

Przeciągnij i upuść jednomiany tak, aby podane równości były prawdziwe.

a) $-5k(k^2+l)(k-l^2)-3(k^4+k^3l^2-8)=-8k^4+$ [ ] $-5k^2l+5kl^3+24$

b) $5kl(k-2l)-(k+3l)(-2k+5l)=5k^2l-10kl^2+2k^2+$ [ ] $-15l^2$

c) $-(k^2l^2+3kl)-2(kl-2l)(kl+2l)=-3k^2l^2-3kl+$ [ ]

d) $\left(\sqrt{2}k-\sqrt{3}l\right)\left(\sqrt{2}k+\sqrt{3}l\right)-2k\left(-3k+5l\right)=$ [ ] $-3l^2-10kl$

$-8l^2$ | $8k^2$ | $2k^3l^2$ | $8l^2$ | $2k^2l^3$ | $kl$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 3**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Kwadrat liczby $\mathrm{x} + 3$ jest o $9$ większy od kwadratu liczby $x$.
- [ ] Wyrażenia $(\mathrm{a} - 1)(\mathrm{a} - 1)$ i $(\mathrm{a} - 1)(\mathrm{a} + 1) - (2\mathrm{a} + 2)$ są równe.
- [ ] Wynikiem działania $(-2x + y)(3x - 2y) - 3\,\mathrm{xy}$ jest $-6x^2 + 4\,\mathrm{xy} - 2y^2$.
- [ ] Objętość sześcianu o krawędzi $\mathrm{k} - 2$ wynosi $k^3 - 6k^2 + 12k - 8$.
- [ ] Pole prostokąta o bokach $3a - 1$ i $3a + 1$ wynosi $9a^2 - 6a + 1$.

**Ćwiczenie 4**

Po odjęciu od iloczynu wyrażeń $2\mathrm{x} + 1$ i $2\mathrm{x} - 1$ liczby $1$ otrzymamy

- ( ) $4x^2$
- ( ) $4x^2 - 4x$
- ( ) $4x^2 + 4x$
- ( ) $4x^2 - 2$

## Ćwiczenie 5

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $\sqrt{3}\left(3\sqrt{2}x-\sqrt{3}x^2\right)-\left(2\sqrt{6}x+4x\right.$ | $\sqrt{6}x-7x^2$ |
| $\left(2\sqrt{2}x-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right)-\left(5x\right.$ | $4x^2-9\sqrt{6}x$ |
| $\sqrt{3}x\left(2\sqrt{3}x-4\sqrt{8}\right)-\left(\sqrt{6}x+2x^2\right.$ | $3x^2-2\sqrt{6}x+2$ |
| $\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)$ | $3x^2-\sqrt{6}x-4$ |
| $-\left(-2\sqrt{6}x+8\right)-\left(2\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)\left(2\right.$ | $-12x^2+2\sqrt{6}x-6$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6

Dane są wyrażenia algebraiczne:

$\mathrm{A} = 3\mathrm{xy} - 2$

$\mathrm{B} = -2\mathrm{x} + 5y$

$\mathrm{C} = \mathrm{x} + 2\,\mathrm{xy}$

$\mathrm{D} = 3x$

Wykonaj działania i przedstaw wyniki w najprostszej postaci.

1. $2\cdot\mathrm{A} - \mathrm{B}\cdot\mathrm{C}$
2. $\mathrm{C}\cdot\mathrm{D} - \mathrm{B}$
3. $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{D}$

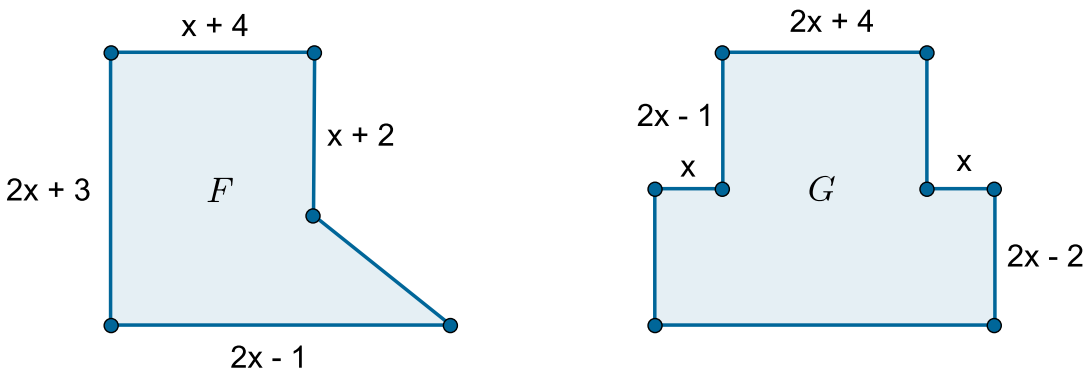
**Ćwiczenie 7**

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego i doprowadź do najprostszej postaci

1. różnicę iloczynu liczby $2\mathrm{a} + 5$ przez liczbę $\mathrm{a} - 2$ i iloczynu liczby $\mathrm{a} + 3$ przez liczbę $\mathrm{a} - 4$
2. sumę podwojonego iloczynu liczby $2x$ przez liczbę $\mathrm{x} + 5$ i iloczynu liczby $\mathrm{x} - 1$ przez liczbę $\mathrm{x} + 1$
3. liczbę o $2x$ większą od iloczynu liczby $3\mathrm{x} - 2$ przez liczbę $3x$

**Ćwiczenie 8**

Dane są dwa wielokąty $F$ i $G$. O ile pole wielokąta $G$ jest większe od pola wielokąta $F$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 9**

Pole której figury jest większe: prostokąta o bokach $2\mathrm{x} + 3$ i $\mathrm{x} - 1$ czy trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $4\mathrm{x} - 1$ i $\mathrm{x} + 4$? O ile jest większe?

**Ćwiczenie 10**

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego iloczyn liczby trzycyfrowej, której cyfrą setek jest $a$, cyfrą dziesiątek jest $b$ i cyfrą jedności jest c przez liczbę trzycyfrową, w której przestawiono cyfry setek i jedności, pozostawiając cyfrę dziesiątek bez zmiany.

**Ćwiczenie 11**

Zeszyt kosztuje $x$ złotych, książka jest od niego o $4{,}40$ zł droższa, długopis jest $4$ razy tańszy od książki, a cena ołówka stanowi $20\%$ ceny zeszytu. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego i doprowadź je do najprostszej postaci.

1. Ile zapłacimy za $2$ zeszyty, książkę i długopis?
2. O ile droższa jest książka od dwóch ołówków?
3. Jaką resztę otrzymała Kasia, która za książkę, $3$ długopisy i ołówek zapłaciła banknotem pięćdziesięciozłotowym?

**Ćwiczenie 12**

Sok kosztuje $k$ złotych $m$ groszy, a bułka $m$ złotych $k$ groszy. Ala kupiła $x$ soków i $y$ bułek, a Jola $x$ bułek i $y$ soków. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego różnicę wydatków Ali i Joli w złotych i sprowadź to wyrażenie do najprostszej postaci.

**Ćwiczenie 13**

Rysunek trapezu o podstawie górnej równej x -2y i podstawie dolnej równej 2x +y.

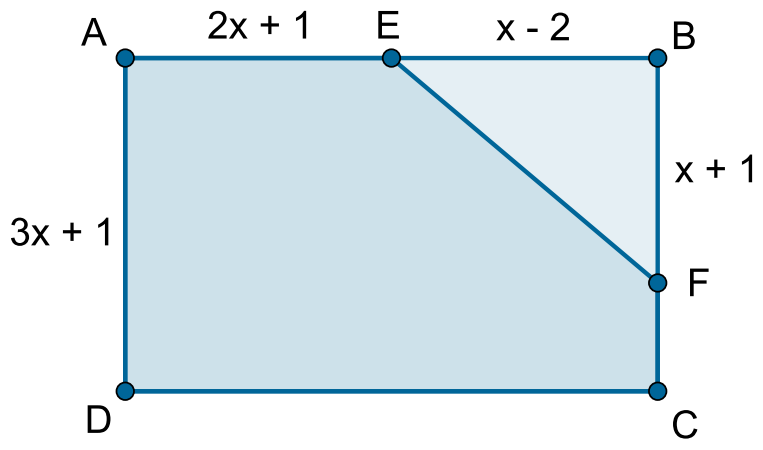
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jaka jest wysokość trapezu przedstawionego na rysunku, jeżeli wiadomo, że jego pole jest równe $3x^2 + 5\mathrm{xy} - 2y^2$?

- ○ $2x + 4y$
- ○ $2x - 4y$
- ○ $4x - 2y$
- ○ $4x + 2y$

**Ćwiczenie 14**

Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie opisujące pole pięciokąta $\mathrm{ADCFE}$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 15**

Rysunek przedstawia trapez.

Rysunek trapezu o podstawie górnej równej x -a, podstawie dolnej 3x +a oraz wysokości równej 2x -a.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Które wyrażenia opisują pole trapezu?

- [ ] $\frac{1}{2}(2x-a)(4x+2a)$
- [ ] $\frac{1}{2}(2x-a)\cdot 4x$
- [ ] $(3x+a)(2x-a)-(x+a)(2x-a)$
- [ ] $(3x+a)(2x-a)-x(2x-a)$

**Ćwiczenie 16**

Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie algebraiczne opisujące

1. różnicę kwadratu liczby nieparzystej $2n + 1$ i iloczynu dwóch kolejnych liczb nieparzystych mniejszych od niej
2. sumę kwadratu liczby parzystej $2n$ i iloczynu dwóch kolejnych liczb parzystych większych od niej

**Ćwiczenie 17**

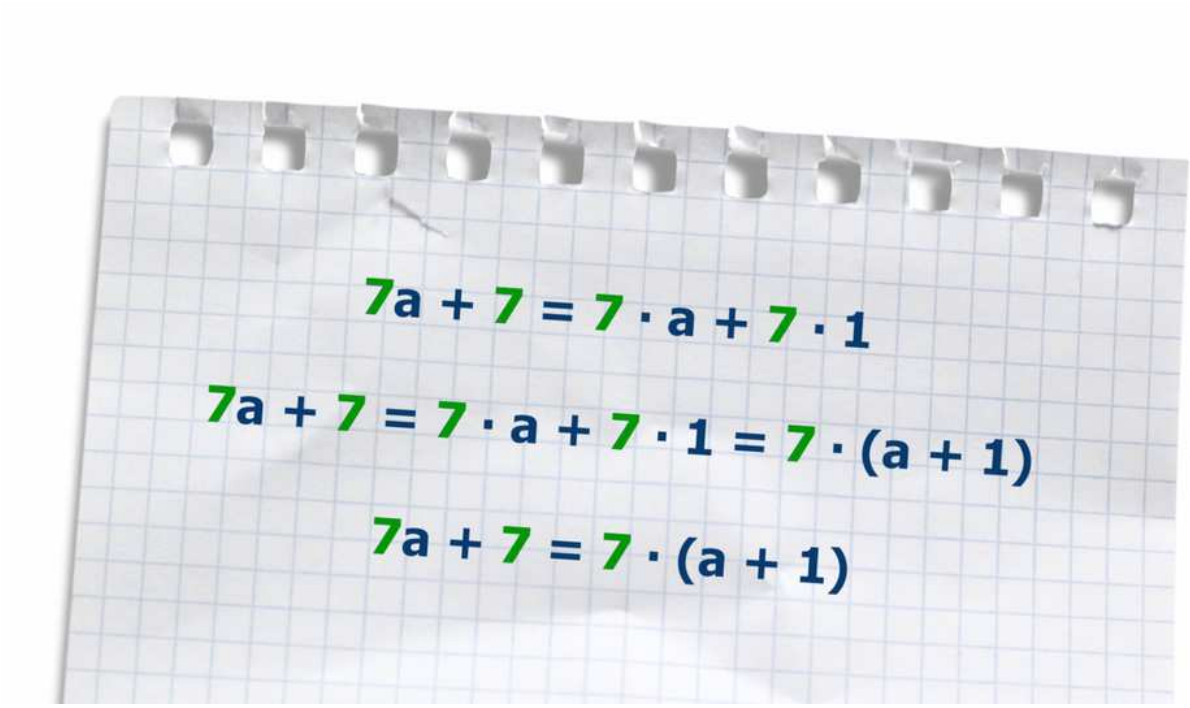
Obraz bez ramy jest prostokątem o długości $2\mathrm{x} - 1$ i szerokości $\mathrm{x} + 4$. Szerokość ramy, w której znajduje się obraz stanowi $10\,\%$ długości obrazu. Jakie pole powierzchni zajmuje obraz z ramą? O ile większe jest pole powierzchni obrazu od pola powierzchni ramy?

# Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias

**Zapamiętaj!**

Jeżeli w każdym ze składników sumy algebraicznej występuje taki sam czynnik, to można ten wspólny czynnik wyłączyć przed nawias.

**Przykład 1**

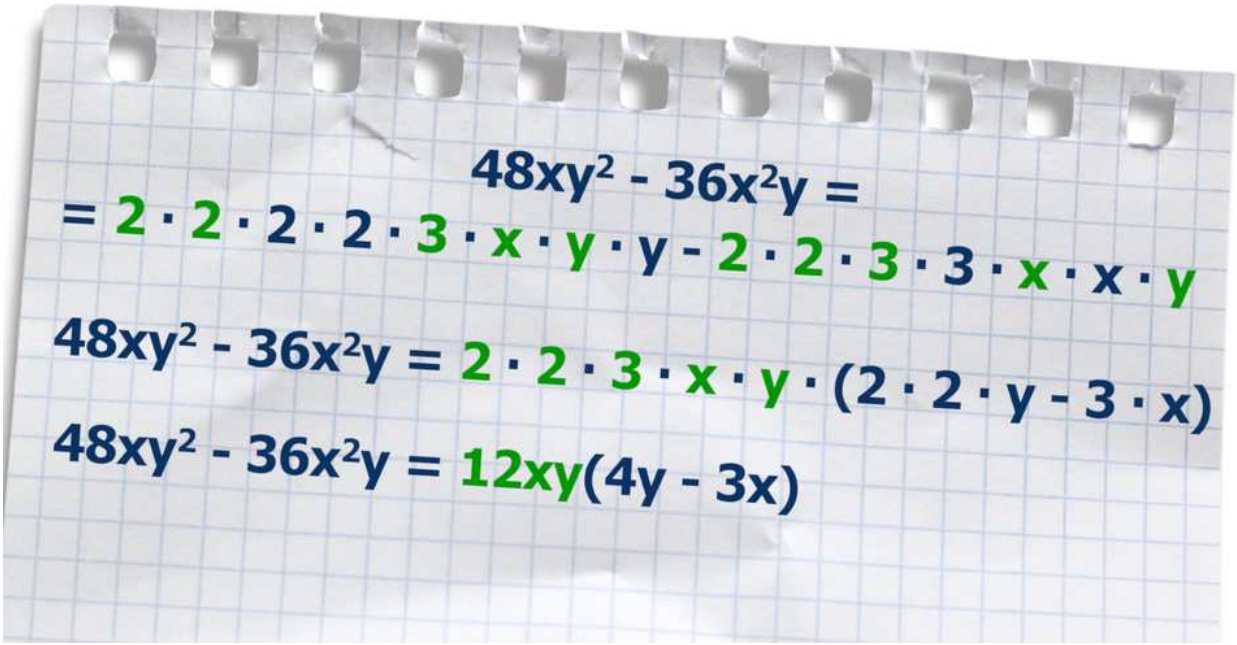



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Przykład 2**




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Zapamiętaj!**

**Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias** to zamiana sumy algebraicznej na iloczyn.

**Ćwiczenie 1**

Wyłącz największy wspólny czynnik przed nawias.

1. $-3x^2 + 5\,\mathrm{xy} - 4xy^3$
2. $4a^2b^3 - 12a^2\mathrm{b} + 8a^2b^2$
3. $-15xy^2 + 3\,\mathrm{kl} - 9ab^3$
4. $0,2\,\mathrm{ab} + 1,2a^2b^2 + 0,6a^3b^2$
5. $\frac{1}{2}\mathrm{xy} - \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{1}{8}xy^3$
6. $-4,8\,\mathrm{ab}\,c^2 + 2,4a^2b^3c + 1,2\,\mathrm{abc}$

## Ćwiczenie 2

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias i doprowadź wyrażenie w nawiasie do najprostszej postaci.

1. $(3x-5y)(-3x+2y)+(3x-5y)(4x+3y)$
2. $(-2a+3b)(x-y)-(-2a+3b)(-2x+5y)$
3. $(3\,\mathrm{ab}-5c)(-2a+4b-c)+(3\,\mathrm{ab}-5c)(a+3b-2c)$
4. $\left(4x^2+5y^2\right)\left(-3x^2-2y^2\right)-\left(4x^2+5y^2\right)\left(x^2+3y^2\right)$
5. $(a-2b)(4a+5b)-(a-2b)(-3a+8b)+(a-2b)(-a+4b)$

## Ćwiczenie 3

Przeciągnij i upuść podane wyrażenia tak, aby otrzymane równości były prawdziwe.

a) $18x^3y^2-3x^2y^2+12xy^2=\square\left(6x^2-x+4\right)$

b) $-20a^2b^2+15a^4b^3+30a^3b^4=-5a^2b^2\left(\square-3\square-6ab^2\right)$

c) $0,5xy^4-2,5x^2y^3+1,5x^3y^2-x^2y^2=0,5xy^2\left(\square-5xy+\square-2x\right)$

d) $\frac{1}{3}ab^2-\frac{2}{9}a^2b+\frac{5}{12}ab-\frac{7}{15}a^3b^2=\square\left(b-\frac{2}{3}a+\frac{5}{4}-\frac{7}{5}a^2b\right)$

e) $2k^4l^3m-8kl^3m^2+10k^3l^2m^3-12k^2lm^2=2klm\left(\square-4l^2m+\square-6km\right)$

k2l3</math> | $4$ | $3xy^2$ | $y^2$ | $5k^2lm^2$ | $a^2b$ | $3x^2$ | $k^3l^2$ | $\frac{1}{3}ab$ | $3ab$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 4**

Po wyłączeniu przed nawias największego wspólnego czynnika wyrażenie $20x^3y^4 - 14x^2y^3 + 8x^2y^2$ ma postać

- $2x^2\left(10xy^4 - 7y^3 + 4y^2\right)$
- $2y^2\left(10x^3y^2 - 7x^2y + 4x^2\right)$
- $2x^2y^2\left(10xy^2 - 7y + 4\right)$
- $2\,\mathrm{xy}\left(10x^2y^3 - 7xy^2 + 4\,\mathrm{xy}\right)$

**Ćwiczenie 5**

Po wyłączeniu przed nawias wspólnego czynnika i doprowadzeniu do najprostszej postaci wyrażenia $(-2\mathrm{xy} + 3z)(3\mathrm{x} - 4y) - (3\mathrm{x} - 4y)(\mathrm{xy} - 5z)$ otrzymamy

- $(3x - 4y)(-3\,\mathrm{xy} - 2z)$
- $(3x - 4y)(-3\,\mathrm{xy} + 8z)$
- $(3x - 4y)(-\mathrm{xy} + 8z)$
- $(3x - 4y)(-\mathrm{xy} - 2z)$

## Ćwiczenie 6

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Szerokość prostokąta o polu $9x^2y^2 + 6\mathrm{xy}^2$ i długości $3\mathrm{xy}^2$ wynosi $3\mathrm{x} + 2$.
- [ ] Długość przekątnej rombu o polu $0{,}25a^2\mathrm{b} + 1{,}5\,\mathrm{ab}$ i drugiej przekątnej długości $\mathrm{ab}$ wynosi $0{,}5\mathrm{a} + 0{,}3$.
- [ ] Długość boku kwadratu o obwodzie $8a^2 + 12\,\mathrm{ab}$ wynosi $2\mathrm{a} + 3b$.
- [ ] Wysokość trapezu o polu $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\mathrm{xy}$ i sumie podstaw $x$ wynosi $\mathrm{x} + \frac{1}{2}y$.

## Ćwiczenie 7

Przeciągnij i upuść podane wyrażenia tak, aby otrzymane równości były prawdziwe.

a) $5x^2 - 2x + 1 = 5x(\quad)$

b) $8ab + 10a = 4ab(\quad)$

c) $-4x^2y + 3xy^2 = 3xy(\quad)$

d) $3xy - 6x^2 = 3x^2(\quad)$

e) $2ab - 3b^2 + a^2 = 2a(\quad)$

$2 + \frac{5}{2b}$ | $\frac{y}{x} - 2$ | $x - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5x}$ | $b - \frac{3b^2}{2a} + \frac{a}{2}$ | $-\frac{4}{3}x + y$ | $x - \frac{2}{5} + \frac{1}{5x}$ | $b - \frac{b^2}{4a} + \frac{2}{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $10x^4y^2 - 8x^3y^3 + 4x^2y$ | $2xy(2y^2 - 6xy + 3x)$ |
| $6x^3y^2 - 3x^2y^2 + 12x^2y^3$ | $2xy(xy^2 - 2y + 4x)$ |
| $2x^2y^3 - 4xy^2 + 8x^2y$ | $2x^2y(5x^2y - 4xy^2 + 2)$ |
| $4xy^3 - 12x^2y^2 + 6x^2y$ | $6x^2y^2(3xy^2 - y + 2x^2)$ |
| $18x^3y^4 - 6x^2y^3 + 12x^4y^2$ | $3x^2y^2(2x - 1 + 4y)$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10

Wyznacz wysokość prostopadłościanu, którego objętość wynosi $24a^3b^2 + 18a^2b^2c$, a podstawą jest prostokąt o wymiarach $2\mathrm{a}$ i $3\,\mathrm{ab}$.

## Ćwiczenie 11

Ania kupiła $4$ zeszyty po $\mathrm{a}$ zł i $2$ długopisy, z których każdy był o $\mathrm{y}\%$ tańszy od zeszytu. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego koszt zakupów Ani, a następnie przedstaw to wyrażenie w postaci iloczynu.

## Ćwiczenie 12

Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach $2\mathrm{a} + 3\mathrm{b}$ i $3\mathrm{a} - \mathrm{b}$, a wysokość prostopadłościanu wynosi $\mathrm{a} + 3b$. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego pole powierzchni bocznej tego prostopadłościanu. Wyrażenie przedstaw w postaci iloczynu.

## Ćwiczenie 13

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb nieparzystych, z których najmniejszą jest $2\mathrm{n} + 1$, jest podzielna przez $3$.

**Ćwiczenie 14**

Wykaż, że różnica liczby trzycyfrowej, której cyfrą setek jest $x$, cyfrą dziesiątek jest $y$, a cyfrą jedności jest $z$, i liczby trzycyfrowej, która powstanie po zamianie miejscami cyfr setek i jedności jest podzielna przez trzy.

**Ćwiczenie 15**

Wyznacz, za pomocą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias, długość boku kwadratu, którego obwód jest równy obwodowi prostokąta o bokach $5a + 2\mathrm{b} - 8$ i $3a - \mathrm{b} + 2$.

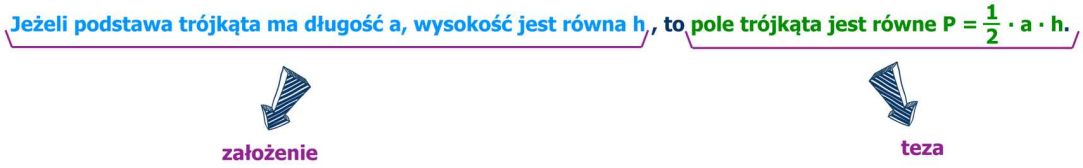
**Ćwiczenie 16**

Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych, z których najmniejszą jest $2n$, jest podzielna przez $4$.

# Twierdzenia i ich rodzaje

**Zapamiętaj!**

- **Twierdzeniem** nazywamy zdanie, które opisuje jakiś fakt, zależność lub równość, które potrafimy udowodnić, korzystając ze znanych, wcześniej uzasadnionych prawd. Pierwsza część takiego zdania to **założenie**, które opisuje warunki, przy których spełnione jest twierdzenie.
- Druga część to **teza** zawierająca własność, która zachodzi, gdy spełnione są warunki opisane w założeniu.
- Twierdzenie uznajemy za prawdziwe, jeżeli potrafimy je udowodnić. Dowodzenie twierdzenia polega na przeprowadzeniu takiego rozumowania, by z warunków podanych w założeniu wynikały własności sformułowane w tezie.
- Najczęściej założenie poprzedza słowo „jeżeli”, a tezę słowo „to”.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 1**

Przykłady twierdzeń zbudowanych według wzoru „jeżeli ..., to ...”.

- Jeżeli cyfrą jedności liczby naturalnej jest 0, to liczba ta jest podzielna przez 10.
- Jeżeli bok trójkąta równobocznego ma długość $a$, to obwód tego trójkąta jest równy $3a$.
- Jeżeli na trójkącie prostokątnym jest opisany okrąg, to środek tego okręgu leży na przeciwprostokątnej trójkąta.

**Twierdzenie odwrotne**

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia $T$ to twierdzenie, w którym założenie twierdzenia $T$ jest tezą, a teza twierdzenia $T$ jest założeniem.

Tabela. Dane

| Twierdzenie | Czy twierdzenie jest prawdziwe, czy fałszywe? | Twierdzenie odwrotne | Czy twierdzenie jest prawdziwe, czy fałszywe? |
|---|---|---|---|
| Jeżeli czworokąt jest kwadratem, to jego przekątne przecinają się pod kątem prostym. | Twierdzenie prawdziwe | Jeżeli w czworokącie przekątne przecinają się pod kątem prostym, to jest on kwadratem. | Twierdzenie fałszywe |
| Jeżeli liczba naturalna większa od 2 jest liczbą pierwszą, to jest liczbą nieparzystą. | Twierdzenie prawdziwe | Jeżeli liczba naturalna większa od 2 jest liczbą nieparzystą, to jest liczbą pierwszą. | Twierdzenie fałszywe |
| Jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez 5, to jest podzielna przez 10. | Twierdzenie fałszywe | Jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez 10, to jest podzielna przez 5. | Twierdzenie prawdziwe |

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia prawdziwego może być prawdziwe lub fałszywe.

Dane twierdzenie i twierdzenie odwrotne można zapisać, używając spójnika „wtedy i tylko wtedy”, w postaci jednego twierdzenia, mającego postać równoważności.

# Twierdzenie Pitagorasa

**Twierdzenie Pitagorasa**

Jednym z ważniejszych twierdzeń w matematyce jest twierdzenie zwane dzisiaj twierdzeniem Pitagorasa. Twierdzenie to prawdopodobnie znali już starożytni Egipcjanie, Chińczycy i Hindusi. Starożytni Grecy jego odkrycie i dowód przypisywali greckiemu matematykowi Pitagorasowi .

### Ciekawostka

Pitagoras to grecki filozof i matematyk, urodzony około 572 r. p.n.e. Założył szkołę filozoficzną, która przekształciła się w związek pitagorejski. Pitagoras i jego uczniowie zajmowali się wieloma dziedzinami wiedzy. Dokonali też wielu odkryć matematycznych, np. udowodnili, że suma kątów w trójkącie jest równa kątowi półpełnemu. Jako pierwsi wyodrębnili liczby parzyste i nieparzyste, odkryli liczby niewymierne, wprowadzili pojęcie podobieństwa figur. Sformułowali zasady budowy wielościanów foremnych.

### Przykład 1




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DFZ2S5pne

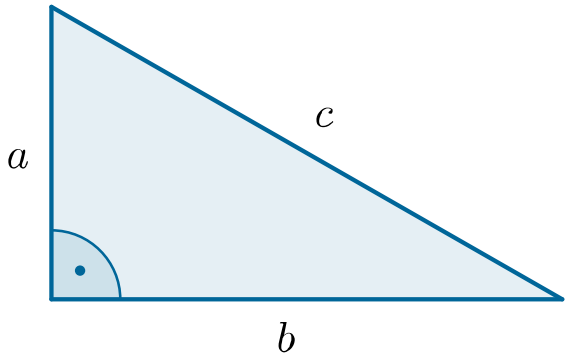
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Na podstawie wykonanego ćwiczenia możemy stwierdzić, że jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.
Odkryta przez nas własność nosi nazwę **twierdzenia Pitagorasa**.
Twierdzenie to można sformułować też inaczej, wykorzystując zależność między długościami boków trójkąta prostokątnego.

**Twierdzenie: Twierdzenie Pitagorasa**

Jeżeli $a$ i $b$ są długościami przyprostokątnych, zaś $c$ długością przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym, to zachodzi związek

$$a^2 + b^2 = c^2$$




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**O dowodach twierdzenia Pitagorasa**

Znanych jest wiele dowodów twierdzenia Pitagorasa, zarówno geometrycznych, jak i algebraicznych. Oryginalne dowody tego twierdzenia podało wiele znanych postaci historycznych, niezwiązanych bezpośrednio z matematyką, np. jeden z prezydentów Stanów Zjednoczonych, Leonardo da Vinci, francuski pisarz Ernest Renan.

**Ćwiczenie 1**

Przekształć kwadraty zbudowane na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego w równoległoboki. Zauważ, że pola tych równoległoboków są takie same jak pola kwadratów, z których powstały. Otrzymane równoległoboki przekształć w prostokąty. Przesuń prostokąty, tak aby pokryły w całości kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej.

Sformułuj wniosek.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DFZ2S5pne

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ćwiczenie 2**

Sprawdź, że dla trójkąta ostrokątnego teza twierdzenia Pitagorasa nie zachodzi. Elementy kwadratów zbudowanych na dwóch bokach trójkąta ostrokątnego nie mieszczą się w kwadracie zbudowanym na najdłuższym boku.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DFZ2S5pne

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Można udowodnić, że suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości najdłuższego boku tylko w przypadku trójkątów prostokątnych. Dla trójkątów ostrokątnych oraz trójkątów rozwartokątnych równość ta nie zachodzi.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DFZ2S5pne

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Przykład 2**

Na bokach trójkąta prostokątnego $ABC$ zbudowano prostokąty.
Zmieniaj wielkość tych prostokątów. Porównuj w każdym przypadku sumę pól prostokątów zbudowanych na przyprostokątnych z polem prostokąta zbudowanego na przeciwprostokątnej. Co zauważasz?
W przypadku odpowiednich prostokątów zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego również spełniony jest związek wynikający z twierdzenia Pitagorasa.
Okazuje się, że jeżeli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy dowolne wielokąty podobne (czyli takie, że jeden z nich jest obrazem drugiego w pewnej skali), to suma tych pól, które są zbudowane na przyprostokątnych, jest równa polu tego wielokąta, który jest zbudowany na przeciwprostokątnej.







Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DFZ2S5pne

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ćwiczenie 3**

Zmieniaj odpowiednio kształt i wielkość wielokątów zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego. Sprawdź, że dla pól tych wielokątów spełniony jest związek między polami wielokątów, wynikający z twierdzenia Pitagorasa.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DFZ2S5pne

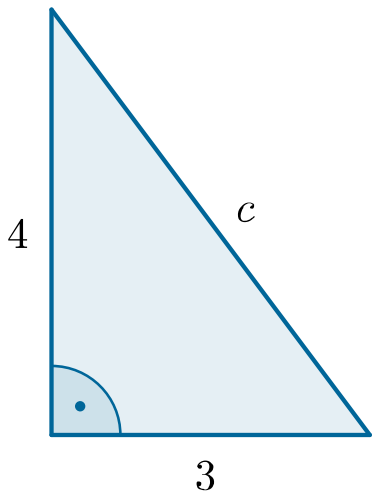
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

# Obliczanie długości boków w trójkącie prostokątnym

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, można obliczyć długość jednego z boków trójkąta prostokątnego, mając dane długości dwóch pozostałych boków.

**Przykład 1**

W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych są równe 3 i 4. Znajdźmy długość przeciwprostokątnej $c$ tego trójkąta.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapisujemy równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa, z której wyznaczamy długość przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c^2 = 4^2 + 3^2$$

$$c^2 = 16 + 9$$

$$c^2 = 25$$

Równanie

$$c^2 = 25$$

ma dwa rozwiązania $c = \sqrt{25}$ lub $c = -\sqrt{25}$. Długość boku trójkąta wyraża się liczbą dodatnią, zatem uwzględniamy tylko rozwiązanie dodatnie.

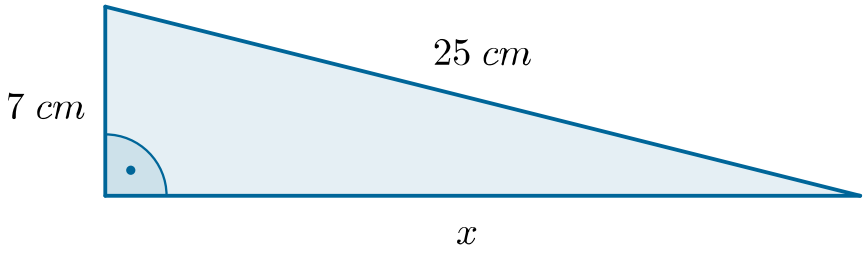
$$c = \sqrt{25}$$

$$c = 5$$

Przeciwprostokątna trójkąta ma długość 5.

**Przykład 2**

Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość 7 cm, a przeciwprostokątna ma długość 25 cm. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczamy $x$ – długość drugiej przyprostokątnej, $x > 0$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$x^2 + 7^2 = 25^2$$

$$x^2 + 49 = 625$$

$$x^2 = 625 - 49$$

$$x^2 = 576$$

$$x = \sqrt{576}$$

$$x = 24$$

Druga z przyprostokątnych ma długość 24 cm.

**Przykład 3**

W trójkącie prostokątnym dwa boki mają długości $40$ dm i $41$ dm. Znajdź długość trzeciego boku tego trójkąta.
Oznaczmy $x$ – szukaną długość boku trójkąta $(x > 0)$.
Długość boku znajdziemy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.
Rozpatrzymy dwa przypadki

Tabela. Dane

| 1 przypadek | 2 przypadek |
|---|---|
| Bok, którego długości szukamy, jest przyprostokątną trójkąta. | Bok, którego długości szukamy jest przeciwprostokątną trójkąta. |
| $x^2 + 40^2 = 41^2$ | $x^2 = 40^2 + 41^2$ |
| $x^2 = 1681 - 1600$ | $x^2 = 1600 + 1681$ |
| $x^2 = 81$ | $x^2 = 3281$ |
| $x = 9$ | $x = \sqrt{3281}$ |

Długość trzeciego boku trójkąta jest równa $9$ dm lub $\sqrt{3281}$ dm.

**Ćwiczenie 1**

W podanym twierdzeniu wskaż założenie i tezę. Czy twierdzenie jest prawdziwe?

1. Jeżeli liczba naturalna dodatnia jest wielokrotnością $6$, to jest podzielna przez $3$.
2. Jeżeli pole kwadratu jest równe $64$, to jego obwód jest równy $32$.
3. Jeżeli punkt leży w układzie współrzędnych na osi $X$, to jego druga współrzędna jest równa $0$.
4. Jeżeli wielokąt jest trapezem, to jego przekątne zawsze przecinają się pod kątem prostym.

## Ćwiczenie 2

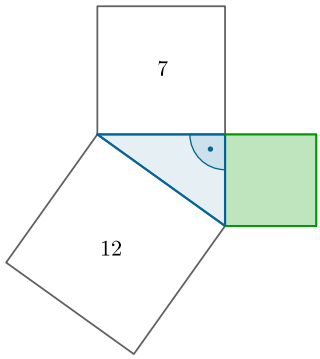
Sformułuj podane twierdzenie, korzystając ze schematu „jeżeli … to”.

1. Pole kwadratu o boku długości a jest równe $a^2$.
2. W trójkącie równobocznym każdy kąt ma miarę $60^\circ$.
3. Liczba naturalna podzielna przez cztery jest liczbą parzystą.

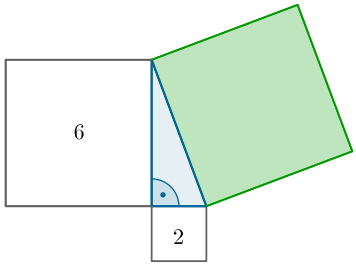
## Ćwiczenie 3

Oblicz pole zamalowanego kwadratu.

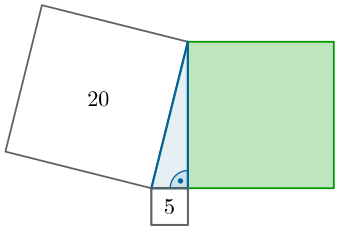
**a)**




**b)**




**c)**

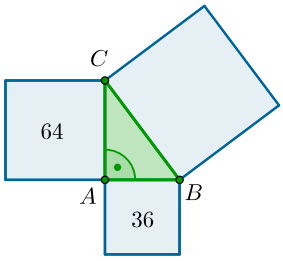



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

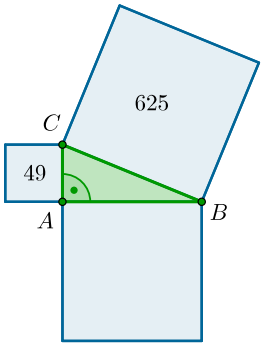
## Ćwiczenie 4

Oblicz obwód i pole zamalowanego trójkąta.

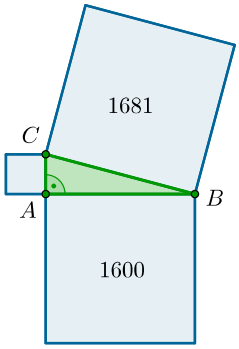
**a)**




**b)**




**c)**




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 5**

Wszystkie znajdujące się na rysunku trójkąty są prostokątne. Trójkąty niebieskie są przystające.

Wykaż prawdziwość twierdzenia Pitagorasa, korzystając z instrukcji:




Zasób interaktywny dostępny pod adresem [https://zpe.gov.pl/a/D2ZrWe7fk](https://zpe.gov.pl/a/D2ZrWe7fk)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

1. z trójkątów na rysunku zbuduj trapez
2. oblicz pole trapezu jako sumę pól trójkątów
3. oblicz pole trapezu, korzystając z odpowiedniego wzoru
4. porównaj otrzymane wyrażenia
5. sprowadź do najprostszej postaci zapisaną równość
6. wyciągnij wniosek

## Ćwiczenie 6

Rysunek przedstawia latawiec, czyli czworokąt, którego przekątne są prostopadłe. Na bokach latawca zbudowano kwadraty.

Zmieniaj położenie punktu $N$, również tak, aby uzyskać trójkąt prostokątny. W każdym przypadku porównuj sumy pól kwadratów leżących naprzeciw siebie. Co zauważasz?



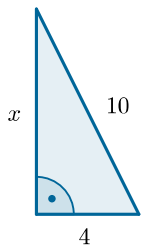

Zasób interaktywny dostępny pod adresem [https://zpe.gov.pl/a/D2ZrWe7fk](https://zpe.gov.pl/a/D2ZrWe7fk)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

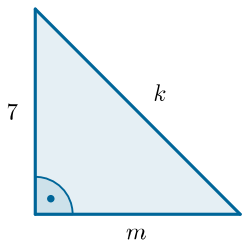
## Ćwiczenie 7

Zapisz równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego przedstawionego na rysunku.

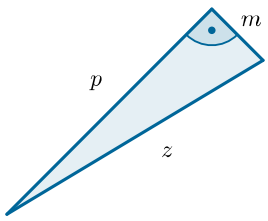
**a)**




**b)**



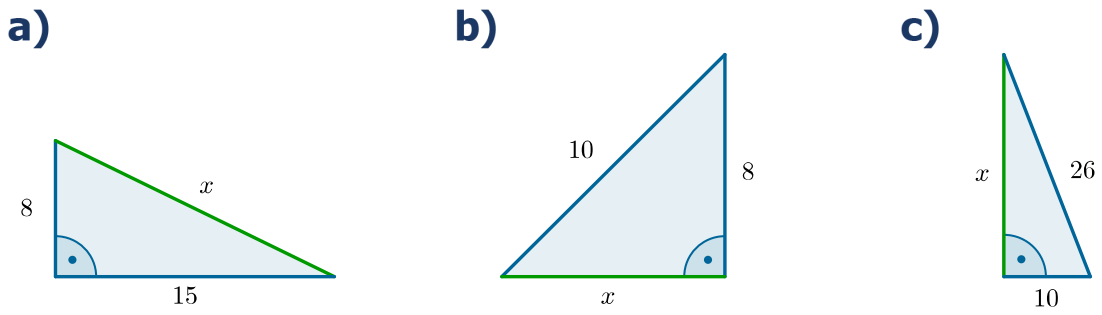

**c)**




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 8**

Trójkąty na rysunku są prostokątne. Niektóre z boków są wyróżnione kolorem zielonym. Znajdź długości tych boków.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 9**

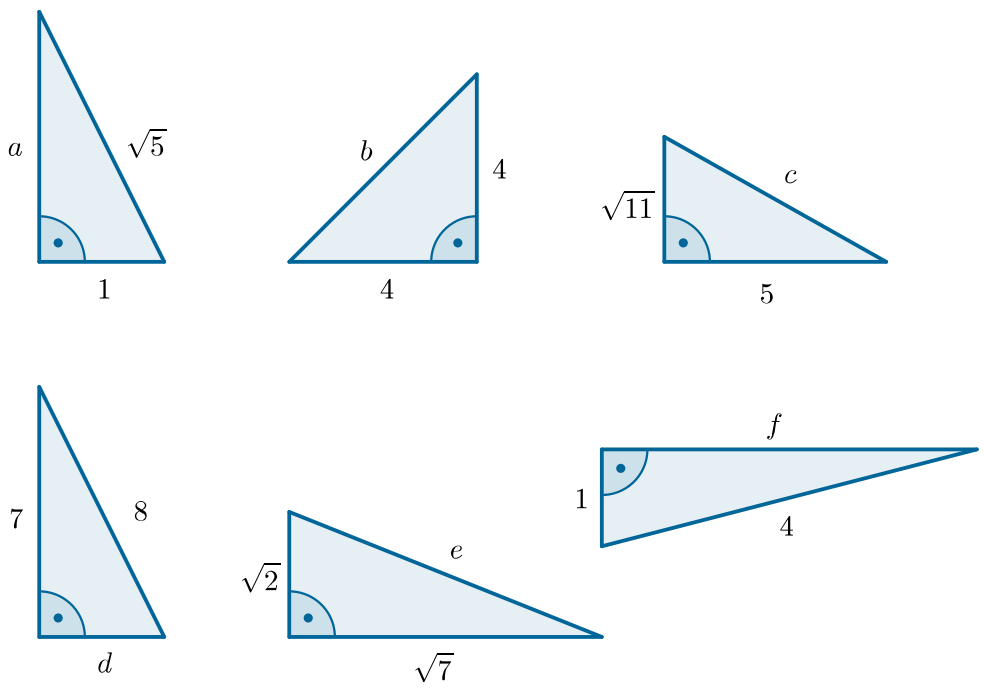
Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego są równe $a$, $b$, natomiast długość przeciwprostokątnej jest równa $c$. Uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a)$ | $6$ | $8$ | |
| $b)$ | $10$ | | $26$ |
| $c)$ | | $60$ | $61$ |

## Ćwiczenie 10

Trójkąty na rysunku są prostokątne. Oblicz długości boków oznaczonych literami.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 11

Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, w którym

1. przyprostokątne mają długości $1\ \mathrm{cm}$ i $3\ \mathrm{cm}$,
2. przyprostokątne są równe $m$ i $3m$, gdzie $m > 0$, a przeciwprostokątna ma długość $2\sqrt{10}$
3. jedna z przyprostokątnych ma długość $16\ \mathrm{m}$, a przeciwprostokątna ma długość $20\ \mathrm{m}$.

**Ćwiczenie 12**

Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym

1. jedna z przyprostokątnych ma długość $6\ \mathrm{cm}$, a przeciwprostokątna ma długość $6{,}5\ \mathrm{cm}$,
2. przeciwprostokątna ma długość $10\ \mathrm{cm}$, a jedna z przyprostokątnych jest dwukrotnie krótsza od drugiej,
3. jedna z przyprostokątnych ma długość $1\frac{2}{5}\ \mathrm{m}$, a przeciwprostokątna ma długość $5\ \mathrm{m}$.

**Ćwiczenie 13**

W trójkącie prostokątnym najdłuższy bok ma długość $41$, a najkrótszy $9$. Wynika z tego, że średnia arytmetyczna długości wszystkich boków trójkąta jest równa

- ○ $25$
- ○ $40$
- ○ $20$
- ○ $30$

**Ćwiczenie 14**

Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości jednej z przyprostokątnych jest równy różnicy kwadratów długości przeciwprostokątnej i drugiej z przyprostokątnych.
- [ ] Jeżeli długości dwóch boków trójkąta wyrażają się liczbami naturalnymi, to długość trzeciego boku też wyraża się liczbą naturalną.
- [ ] Długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego jest równa sumie długości przyprostokątnych.
- [ ] Długość najkrótszego boku trójkąta prostokątnego jest dwukrotnie krótsza od długości przeciwprostokątnej.

**Ćwiczenie 15**

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości $a,\ \mathrm{b}$, natomiast przeciwprostokątna ma długość $c$. Jeden z boków trójkąta wyraża się liczbą, która nie jest wymierna, gdy

- ( ) $\mathrm{a} = 8, b = 15$
- ( ) $a = 9, c = 15$
- ( ) $a = 4, b = 5$
- ( ) $b = 24, c = 25$

**Ćwiczenie 16**

Losujemy dwie liczby naturalne $a, b$ ze zbioru liczb naturalnych od $1$ do $25$. Liczby $a,\ \mathrm{b}$ są długościami przyprostokątnych trójkąta. Znajdź długość przeciwprostokątnej $c$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D2ZrWe7fk

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

# Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

**Przykład 1**

- Twierdzenie

Jeżeli trójkąt prostokątny jest równoramienny, to jego kąty ostre mają równe miary.

- Twierdzenie odwrotne

Jeżeli kąty ostre w trójkącie prostokątnym mają równe miary, to trójkąt ten jest równoramienny.

- Równoważność

Trójkąt prostokątny jest równoramienny wtedy i tylko wtedy, gdy jego kąty ostre mają równe miary.

Jeżeli twierdzenie jest prawdziwe i twierdzenie do niego odwrotne też jest prawdziwe, to utworzona z nich równoważność jest również prawdziwa.

## Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Wiemy już, że zamiana założenia z tezą nie zawsze prowadzi do twierdzenia prawdziwego.
W przypadku twierdzenia Pitagorasa twierdzenie odwrotne jest też prawdziwe.

**Twierdzenie: Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa**

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

W zastosowaniach praktycznych posługujemy się poniższą wersją twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

**Ważne!**

Jeżeli liczby $a,\ \mathrm{b},\ \mathrm{c}$ będące długościami boków trójkąta (gdzie $c$ – długość najdłuższego z boków) spełniają warunek

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

to trójkąt ten jest prostokątny.

Znając długości boków trójkąta i wykorzystując twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa, można stwierdzić, czy trójkąt jest prostokątny.

**Przykład 2**

Sprawdzimy, czy trójkąt o bokach długości $15,\ 17,\ 8$ jest prostokątny.
Ustalamy, że najdłuższy bok trójkąta ma długość $17$.

- Obliczamy kwadrat liczby $17$.

$$17^2 = \ 289$$

- Obliczamy sumę kwadratów długości dwóch krótszych boków.

$$15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$$

- Porównujemy znalezione liczby.

$$289 = 289$$

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa stwierdzamy, że trójkąt o bokach długości $15$, $17$ i $8$ jest trójkątem prostokątnym.

**Przykład 3**

Sprawdzimy, czy trójkąt o bokach długości $2,\ 3,\ 2\sqrt{3}$ jest trójkątem prostokątnym.

- Oznaczmy

$a = 2$
$b = 3$
$c = 2\sqrt{3}$ - długość najdłuższego boku

- Sprawdzimy, czy $a^2 + b^2 = c^2$.
- Obliczamy sumę kwadratów długości krótszych boków i kwadrat długości najdłuższego boku.

$$a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$c^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 \cdot 3 = 12$$

- Porównujemy znalezione liczby.

$$13 \neq 12,$$

czyli

$$a^2 + b^2 \neq c^2$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa stwierdzamy, że trójkąt nie jest trójkątem prostokątnym (gdyby był prostokątny, to musiałaby być prawdziwa równość $a^2 + b^2 = c^2$).

# Trójki pitagorejskie

- Starożytni Egipcjanie wyznaczali kąt prosty, wykorzystując trójkąt prostokątny o bokach długości $3,\ 4,\ 5$, nazywany obecnie trójkątem egipskim.
- Hindusi posługiwali się trójkątem o bokach długości: $5,\ 12,\ 13$.
- W obu przypadkach długości boków trójkątów wyrażały się liczbami naturalnymi.
- **Trójki liczb naturalnych** $a, b, c$ , które wyrażają długości boków trójkąta prostokątnego, nazwano **trójkami pitagorejskimi**. Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa można stwierdzić, że poszukiwanie ich sprowadza się do rozwiązania równania

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- Odkrycie ogólnej metody znajdowania tych liczb przypisuje się matematykowi greckiemu Diofantosowi, żyjącemu w III wieku n.e. w Aleksandrii. Wyznaczał on trójki pitagorejskie według wzoru

$$a = m^2 - n^2$$

$$b = 2\,\mathrm{mn}$$

$$c = m^2 + n^2,$$

gdzie $m,\ \mathrm{n}$ dowolne liczby naturalne względnie pierwsze, które nie są jednocześnie nieparzyste i takie, że $m > n$.
Na przykład.
Niech $m = 3, n = 2$

$$a = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$$

$$b = 2 \bullet 3 \bullet 2 = 12$$

$$c = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$$

Trójkę pitagorejską tworzą liczby: $5, 12, 13$.
Niektóre trójki pitagorejskie

Tabela. Dane

| a | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 4 | 12 | 24 | 40 | 60 | 8 |
| $c$ | 5 | 13 | 25 | 41 | 61 | 17 |

**Ćwiczenie 1**

Zapisz dowolną trójkę pitagorejską.

1. Pomnóż każdą z  zapisanych liczb przez tę samą dowolną liczbę naturalną większą od 1.
   Sprawdź, czy utworzone w ten sposób liczby tworzą trójkę pitagorejską. Co zauważasz?
2. Pomnóż każdą z  zapisanych liczb przez tę samą, dowolną liczbę dodatnią.
   Sprawdź, czy utworzone w ten sposób liczby tworzą trójkę pitagorejską. Co zauważasz?

# Określanie rodzaju trójkąta z wykorzystaniem twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że jeżeli suma pól kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta jest równa polu kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Zastanowimy się teraz, czy można określić rodzaj trójkąta, wiedząc, że suma pół kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta jest mniejsza (albo większa ) od pola kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku.

**Ćwiczenie 2**




Zasób interaktywny dostępny pod adresem [https://zpe.gov.pl/a/D41QdBS0k](https://zpe.gov.pl/a/D41QdBS0k)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Na bokach trójkąta $ABC$ skonstruowane są kwadraty.
Zmień czterokrotnie położenie wierzchołków trójkąta $ABC$, tak aby w każdym przypadku bok $AC$ był najdłuższym bokiem i aby suma pól kwadratów zbudowanych na bokach $AB$ i $BC$ była większa od pola kwadratu zbudowanego na boku $AC$. Określ w każdym przypadku rodzaj otrzymanego trójkąta (prostokątny, ostrokątny czy rozwartokątny). Zapisz twierdzenie, które możesz sformułować na podstawie obserwacji.

1. Sformułuj też twierdzenie odwrotne i sprawdź na $3$ przykładach, czy jest prawdziwe.
2. Powtórz ten sam eksperyment , tak zmieniając położenie wierzchołków trójkąta $ABC$, aby suma pól kwadratów zbudowanych na bokach $AB$ i $BC$ była mniejsza od pola kwadratu zbudowanego na boku $AC$.
3. Sformułuj odpowiednie twierdzenie i twierdzenie do niego odwrotne.

**Ważne!**

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów możemy sformułować dwie pary twierdzeń:

- Jeżeli suma pól kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta jest większa od pola kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku, to trójkąt jest ostrokątny.
- Jeżeli trójkąt jest ostrokątny, to suma pól kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta jest większa od pola kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku.
- Jeżeli suma pól kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta jest mniejsza od pola kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku, to trójkąt jest rozwartokątny.
- Jeżeli trójkąt jest rozwartokątny, to suma pól kwadratów zbudowanych na krótszych bokach trójkąta jest mniejsza od pola kwadratu zbudowanego na najdłuższym boku.

Twierdzenia sformułowaliśmy na podstawie obserwacji, ale można udowodnić, że twierdzenia te są prawdziwe.

**Twierdzenie: Rodzaje trójkątów a długości boków**

Niech liczby $a, b, c$, gdzie $c > a$ i $c > b$ będą długościami boków trójkąta.

- Trójkąt ten jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.
- Trójkąt ten jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 > c^2$.
- Trójkąt ten jest rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 < c^2$.

**Przykład 4**

Trójkąt o bokach długości $6,\ 7, 8$ jest **ostrokątny**, bo

$$6^2 + 7^2 = 85 > 64 = 8^2.$$

Trójkąt o bokach długości $4,\ 4,\ 7$ jest **rozwartokątny**, bo

$$4^2 + 4^2 = 32 < 49 = 7^2.$$

**Ćwiczenie 3**

Sformułuj twierdzenie odwrotne do podanego twierdzenia. Czy twierdzenie to jest prawdziwe, czy fałszywe?

1. Jeżeli dwa trójkąty są przystające, to odpowiadające sobie boki obu trójkątów mają równe długości.
2. Jeżeli kąty $x$ i $y$ są kątami przyległymi, to ich suma jest równa kątowi półpełnemu.
3. Jeżeli trójkąt jest równoboczny, to środek okręgu opisanego na tym trójkącie jest punktem wspólnym trzech wysokości tego trójkąta.

**Ćwiczenie 4**

Czy trójkąt o bokach długości $k,\ \mathrm{d},\ \mathrm{c}$ jest prostokątny?

- [ ] $k = 3\ \mathrm{dm},\ \mathrm{d} = \sqrt{10}\ \mathrm{dm},\ \mathrm{c} =\ 1\ \mathrm{dm}$
- [ ] $k = \sqrt{29}\ \mathrm{mm},\ \mathrm{d} =\ 5\ \mathrm{mm},\ \mathrm{c} =\ 2\ \mathrm{mm}$
- [ ] $k =\ \sqrt{3}\ \mathrm{m},\ \mathrm{d} =\ \sqrt{13}\ \mathrm{m},\ \mathrm{d} =\ 4\ \mathrm{m}$
- [ ] $k =\ 2\ \mathrm{cm}, d =\ 3\ \mathrm{cm},\ \mathrm{c} = 4\ \mathrm{cm}$

**Ćwiczenie 5**

Trójkątem prostokątnym jest trójkąt o bokach długości

- ○ $2\ \mathrm{cm},\ 4\ \mathrm{cm},\ 3\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$
- ○ $7\ \mathrm{cm},\ 11\ \mathrm{cm},\ 13\ \mathrm{cm}$
- ○ $7\ \mathrm{cm},\ 1\ \mathrm{cm},\ 5\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$
- ○ $3\ \mathrm{cm},\ 5\ \mathrm{cm},\ 6\ \mathrm{cm}$

**Ćwiczenie 6**

Liczba $n$ jest liczbą naturalną dodatnią. Trójkątem prostokątnym jest trójkąt o bokach długości

- $n, 2n, n\sqrt{3}$
- $2n, 2n, 3n$
- $n, 2n, n\sqrt{7}$
- $5n, 2n, 4n$

**Ćwiczenie 7**

Liczba $a$ jest dodatnia i większa od $1$. Czy trójkąt o bokach podanej długości jest prostokątny?

- $a^2,\ a-1,\ 3a$
- $3a,\ a, a\sqrt{10}$
- $8a,\ 6a,\ 3a$

**Ćwiczenie 8**

Boki trójkąta prostokątnego mają długości $a$, $11,\ 61$, gdy

- $a = 59$
- $a = 63$
- $a = 60$
- $a = 55$

**Ćwiczenie 9**

Czy trójkąt o podanym stosunku długości boków jest prostokątny?

- [ ] $5:4:3$
- [ ] $17:15:8$
- [ ] $2:3:2$
- [ ] $24:7:25$

**Ćwiczenie 10**

Trawnik ma kształt trójkąta, którego boki pozostają w stosunku $25:24:7$. Na ogrodzenie trawnika zużyto $224\ \mathrm{m}$ płotka. Sprawdź, czy trawnik ma kształt trójkąta prostokątnego.

**Ćwiczenie 11**

Znajdź sumę długości przekątnych $p$ i $d$ prostokąta o bokach długości $a$ i $b$.

1. $a = 9\ \mathrm{cm},\ b = 12\ \mathrm{cm}$
   $p + d = \ldots \mathrm{cm}$
2. $a = 2\ \mathrm{cm},\ b = \sqrt{5}\ \mathrm{cm}$
   $p + d = \cdots \mathrm{cm}$
3. $a = 3\ \mathrm{cm},\ b = 3\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$
   $p + d = \cdots \mathrm{cm}$
4. $a = 9\ \mathrm{dm},\ b = 40\ \mathrm{dm}$
   $p + d = \ldots \mathrm{cm}$

**Ćwiczenie 12**

Podaj przykłady pary liczb naturalnych, które mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątna ma długość $100$.

**Ćwiczenie 13**

W trójkącie prostokątnym jeden z boków ma długość $2\ \mathrm{cm}$, a drugi jest o $1\ \mathrm{cm}$ dłuższy. Oblicz pole trójkąta. Rozpatrz wszystkie możliwości.

**Ćwiczenie 14**

Boki trójkąta pitagorejskiego mają długości: $n$, $\frac{n^2-1}{2}$, $\frac{n^2+1}{2}$ , gdzie $n$ jest liczbą naturalną nieparzystą, większą od $1$.
Znajdź obwód i pole tego trójkąta, gdy

1. $n = 3$
2. $n = 9$
3. $n = 11$

**Ćwiczenie 15**

1. Wykaż, że liczby $a,\ \mathrm{b},\ \mathrm{c}$ postaci
   $a = m^2 - n^2, b = 2\,\mathrm{mn}, c = m^2 + n^2$,gdzie $m,\ \mathrm{n}$ to dowolne liczby naturalne względnie pierwsze, które nie są jednocześnie
   liczbami nieparzystymi i takie, że $m > n$, są długościami boków trójkąta prostokątnego.
2. Wykaż, że mnożąc przez tę samą liczbę dodatnią, każdą z liczb

$$a = m^2 - n^2, b = 2\,\mathrm{mn}, c = m^2 + n^2,$$

tworzących trójkę pitagorejską, otrzymujemy również trójkę pitagorejską.

**Ćwiczenie 16**

Sprawdź dla trzech dowolnych liczb naturalnych $n > 1$, czy liczby postaci

$$2n + 1,\ 2n^2 + 2n,\ 2n^2 + 2n + 1$$

mogą być długościami boków trójkąta prostokątnego.

**Ćwiczenie 17**

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są równe $m+1$ i $4$, gdzie $m$ jest liczbą dodatnią. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość $m+3$. Znajdź liczbę $m$.

**Ćwiczenie 18**

Znajdź liczbę $m<16$, dla której liczby $m-5,\ \mathrm{m}-4,\ \mathrm{m}-3$ są długościami boków trójkąta prostokątnego.

Rozwiąż zadanie algebraicznie i graficznie.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem [https://zpe.gov.pl/a/D41QdBS0k](https://zpe.gov.pl/a/D41QdBS0k)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ćwiczenie 19**

Czy równoległobok o bokach długości

- [ ] $2,\ 6$ oraz przekątnej długości $5$ jest prostokątem?
- [ ] $3,\ 4$ oraz przekątnej długości $5$ jest prostokątem?
- [ ] $5,\ 5$ oraz przekątnej długości $5\sqrt{2}$ jest prostokątem?

**Ćwiczenie 20**

Sprawdź czy istnieje romb o boku długości $13$ oraz przekątnych długości $10$ i $24$.

**Ćwiczenie 21**

Na podstawie $\mathrm{AB}$ trójkąta $\mathrm{ABC}$ obrano punkt $D$. Odcinek $\mathrm{AC}$ ma długość $5$, odcinek $\mathrm{CD}$ ma długość $3$, natomiast $\mathrm{AD}$ ma długość $4$. Wykaż, że $\mathrm{CD}$ jest wysokością trójkąta $\mathrm{ABC}$.

**Ćwiczenie 22**

W trójkącie równobocznym $\mathrm{ABC}$ punkt $D$ jest środkiem podstawy $\mathrm{AB}$. Wykaż, że odcinek $\mathrm{CD}$ jest wysokością tego trójkąta.

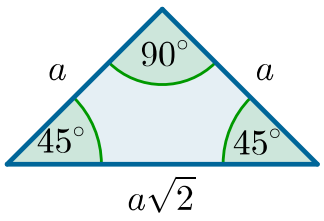
# Szczególne trójkąty prostokątne

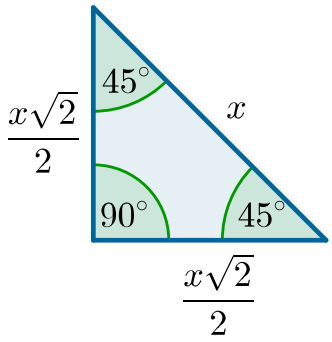
## Trójkąt prostokątny równoramienny

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja




$a$ - długość przyprostokątnej

$a\sqrt{2}$ - długość przeciwprostokątnej

$45^\circ,\ 45^\circ,\ 90^\circ$ - miary kątów

$\frac{x\sqrt{2}}{2}$ - długość przyprostokątnej

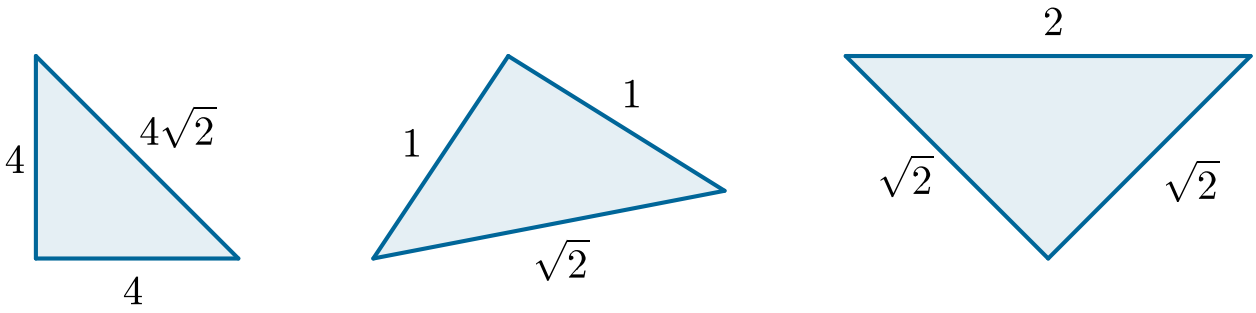
$x$ - długość przeciwprostokątnej

$45^\circ,\ 45^\circ,\ 90^\circ$ - miary kątów

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Aby podać długości boków w trójkącie prostokątnym równoramiennym, wystarczy znać długość tylko jednego z boków.

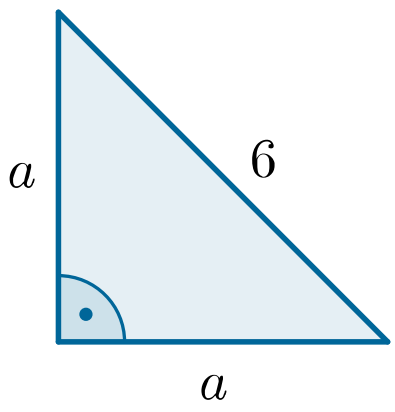
Trójkąty prostokątne równoramienne




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 1**

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego jest równa 6. Oblicz obwód $L$ tego trójkąta. Wymierne przybliżenie obwodu podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W trójkącie równoramiennym przyprostokątne są równe. Oznaczmy przez $a$ długość przyprostokątnej i zapiszmy równość wynikającą z twierdzenia Pitagorasa.

$$a^2 + a^2 = 6^2$$

$$2a^2 = 36 / : 2$$

$$a^2 = 18$$

$$a = \sqrt{18}$$

Długość przyprostokątnej wyraża się liczbą niewymierną. Możemy w dalszych rozważaniach uwzględniać wartość dokładną: $\sqrt{18}$ lub $3\sqrt{2}$ (wyłączając czynnik przed znak pierwiastka) lub przybliżoną

$$\sqrt{18} = 4{,}2426\ldots \approx 4{,}24$$

$$3\sqrt{2} = 3 \cdot 1{,}412\ldots \approx 3 \cdot 1{,}41 = 4{,}23$$

Obliczamy obwód trójkąta.

Tabela. Dane

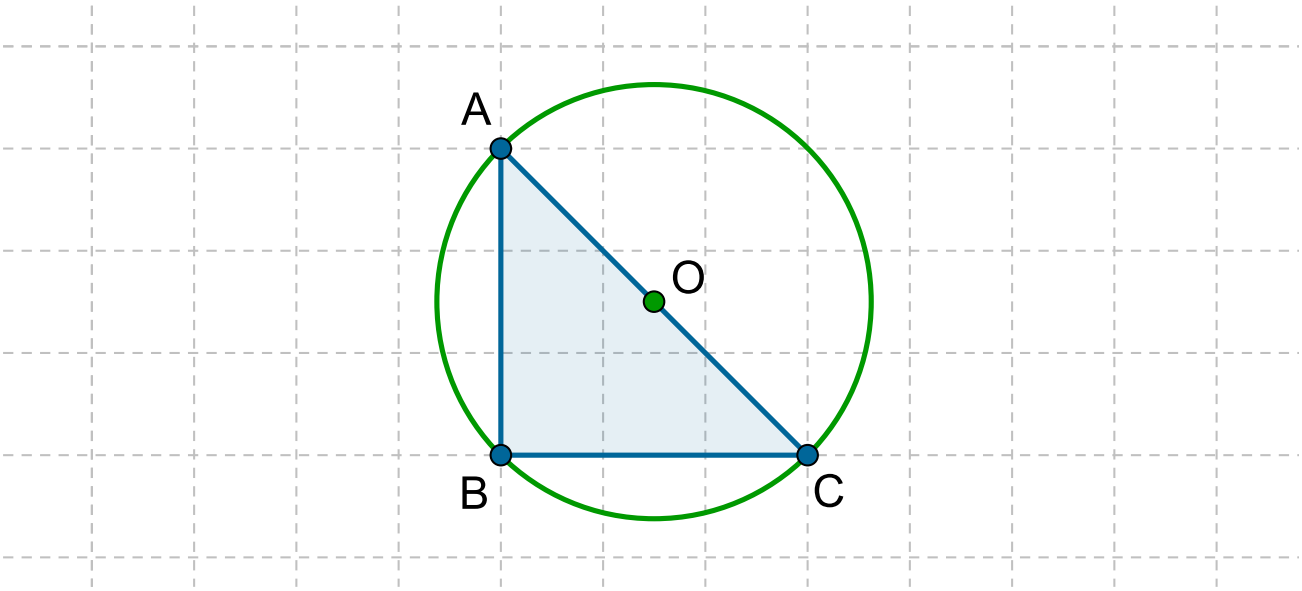
| sposób $I$ | sposób II |
|---|---|
| $L = \sqrt{18} + \sqrt{18} + 6$ | $L = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6$ |
| $L = 2\sqrt{18} + 6$ | $L = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6$ |

| | |
|---|---|
| $L \approx 2 \cdot 4{,}24 + 6$ | $L14 = 46$ |
| $L \approx 14{,}48$ | $L \approx 14{,}49$ |

Obwód prostokąta jest równy w przybliżeniu 14,5.

**Przykład 2**

Obliczymy promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC, którego pole jest równe 4,5 $cm^2$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczymy długość przyprostokątnej, korzystając ze wzoru na pole trójkąta.
$P = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{AB}| \cdot |\mathrm{BC}|$, gdzie $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{BC}|$

$$\frac{1}{2}|\mathrm{AB}|^2 = 4{,}5$$

$$|\mathrm{AB}|^2 = 9$$

$$|\mathrm{AB}| = 3,$$

bo

$$|AB| > 0$$

Promień okręgu opisanego na trójkącie jest równy połowie długości przeciwprostokątnej.

$$r = \frac{|AC|}{2}$$

$$|AC| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$r = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$r = 1{,}5\sqrt{2}\text{ cm}$$

Promień okręgu opisanego na trójkącie $ABC$ jest równy $1{,}5\sqrt{2}$ cm.

**Przykład 3**

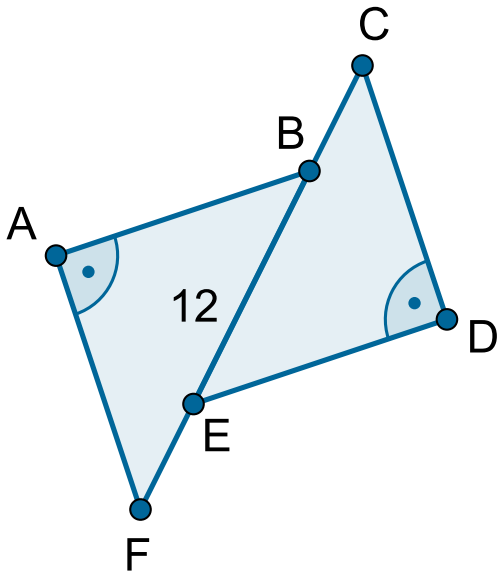
Sześciokąt $ABCDEF$ zbudowany jest z dwóch przystających równoramiennych trójkątów prostokątnych. Przeciwprostokątna w każdym z tych trójkątów ma długość 12. Stosunek długości odcinków $EB$ do $FE$ jest równy $2:1$. Obliczymy obwód wielokąta $ABCDEF$.

Stosunek długości odcinków $EB$ do $FE$ jest równy $2:1$, zatem

- długość odcinka $EB$ stanowi $\frac{2}{3}$ długości odcinka $FB$,
- długość odcinka $FE$ stanowi $\frac{1}{3}$ długości odcinka $FB$.

$$|EB| = \frac{2}{3} \cdot |FB|, |EB| = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$$

$$|EF| = \frac{1}{3} \cdot |FB|, |EF| = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy przez $a$ - długość przyprostokątnej trójkąta $\mathrm{ABC}$. Obliczamy $a$, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$a^2 + a^2 = 12^2$$

$$2a^2 = 144$$

$$a^2 = 72$$

$$a = \sqrt{72}$$

$$a = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$$

Obliczamy obwód sześciokąta $\mathrm{ABCDEF}$.

$$L = |\mathrm{AF}| + |\mathrm{FE}| + |\mathrm{ED}| + |\mathrm{DC}| + |\mathrm{BC}| + |\mathrm{BA}|$$

$$L = a + |\mathrm{EF}| + a + a + (|\mathrm{EC}| - |\mathrm{EB}|) + a$$

$$L = 4a + 4 + (12 - 8)$$

$$L = 4 \cdot 6\sqrt{2} + 4 + 4$$

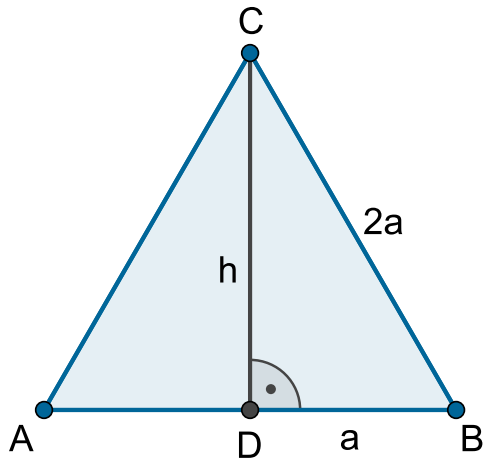
$$L = 4\left(6\sqrt{2} + 2\right)$$

Obwód sześciokąta jest równy $4\left(6\sqrt{2} + 2\right)$.

# Trójkąt o kątach 30°, 60°, 90°

**Przykład 4**

Bok trójkąta równobocznego $\mathrm{ABC}$ ma długość $2a$. Obliczmy miary kątów i długości boków trójkąta $\mathrm{CDB}$, gdzie punkt $D$ jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka $C$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W trójkącie równobocznym każdy kąt ma miarę równą $60^\circ$. Kąt $\mathrm{ABC}$ jest kątem w trójkącie równobocznym, zatem jego miara jest równa $60^\circ$.

$$|\measuredangle \mathrm{DBC}| = 60^\circ$$

Wysokość $\mathrm{CD}$ jest prostopadła do podstawy $\mathrm{AB}$, zatem kąt $\mathrm{CDB}$ jest kątem prostym.

$$|\measuredangle \mathrm{CDB}| = 90^\circ$$

Wysokość w trójkącie równobocznym jest zarazem dwusieczną kąta, zatem kąt $\mathrm{DCB}$ ma miarę $60^\circ : 2 = 30^\circ$.

$$|\measuredangle \mathrm{DCB}| = 30^\circ$$

Miary kątów w trójkącie CDB są równe $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.
Trójkąt DBC jest trójkątem prostokątnym, w którym przeciwprostokątna ma długość $2a$.
Wysokość CD dzieli podstawę AB na dwa przystające odcinki.

$$x = |\mathrm{DB}| = \frac{1}{2}|\mathrm{AB}| = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość boku CD, czyli wysokość $h$ trójkąta CDB.

$$h^2 + a^2 = (2a)^2$$

$$h^2 = 4a^2 - a^2$$

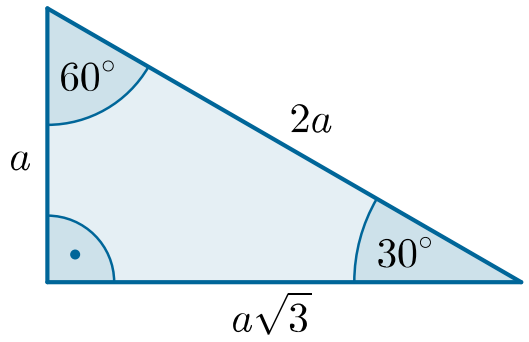
$$h^2 = 3a^2$$

$$h = a\sqrt{3}$$

bo $a > 0$ i $h > 0$
Boki trójkąta CDB mają długości: $2a, a, a\sqrt{3}$.
Wysokość dzieli trójkąt równoboczny na dwa przystające trójkąty prostokątne.
Miary kątów w każdym z tych trójkątów są równe: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.
Jeśli oznaczymy przez $2a$ długość przeciwprostokątnej w tak otrzymanym trójkącie prostokątnym, to długości pozostałych boków są równe $a$ i $a\sqrt{3}$ . Przy czym naprzeciw kąta o mierze $30^\circ$ leży przyprostokątna, której długość jest dwukrotnie mniejsza od długości przeciwprostokątnej.

**Ważne!**

Trójkąt prostokątny o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

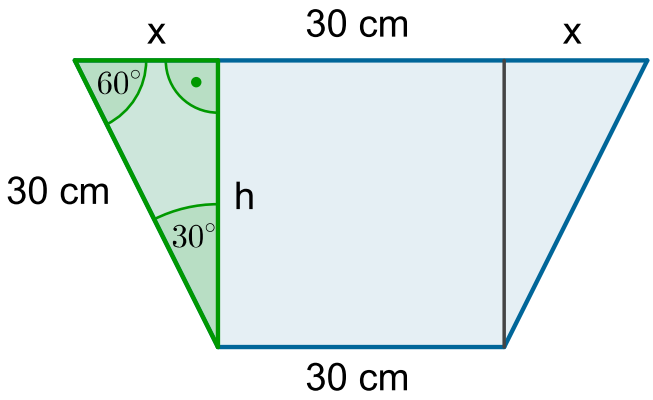



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- $2a$ – długość przeciwprostokątnej
- $a$ – długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta $30^\circ$
- $a\sqrt{3}$ - długość przyprostokątnej leżącej przy kącie $30^\circ$

**Przykład 5**

Torba wykonana jest z dwóch jednakowych kawałków skóry. Każdy z nich ma kształt trapezu równoramiennego, w którym ramię i krótsza podstawa mają długość 30 cm, a kąt rozwarty ma miarę $120^\circ$.
Ile $cm^2$ skóry zużyto na wykonanie tej torebki?
Obliczymy pole powierzchni jednego z kawałków skóry, z którego wykonana jest torebka, czyli pole odpowiedniego trapezu.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wysokość poprowadzona z wierzchołka krótszej podstawy podzieliła trapez na czworokąt i trójkąt prostokątny o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Przeciwprostokątna w tym trójkącie ma długość 30 cm, zatem $x = 15$ cm (przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta o mierze $30^\circ$) i $h = 15\sqrt{3}$ cm (przyprostokątna leżąca przy kącie o mierze $30^\circ$).
Zatem wysokość trapezu jest równa $15\sqrt{3}$cm, a dłuższa podstawa ma długość

$$15 \text{ cm } + 30 \text{ cm } + 15 \text{ cm } = 60 \text{ cm}.$$

Obliczamy pole trapezu.

$$P = \frac{60+30}{2} \cdot 15\sqrt{3}$$

$$P = 675\sqrt{3}$$

$$P \approx 1170 \text{ cm}^2$$

Obliczamy, ile $cm^2$ skóry zużyto, aby wykonać torebkę.

$$2 \cdot 1170 = 2340$$

Na wykonanie torebki zużyto około $2340 \text{ cm}^2$ skóry.

**Ćwiczenie 1**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 2**

W trójkącie prostokątnym równoramiennym

- ◯ stosunek obwodu do długości przeciwprostokątnej jest równy $\sqrt{2}$
- ◯ długość przynajmniej jednego z boków jest wyrażona liczbą niewymierną
- ◯ przeciwprostokątna jest dwukrotnie dłuższa od przyprostokątnej

**Ćwiczenie 3**

Kąty trójkąta są równe $45^\circ,\ 45^\circ,\ 90^\circ$. Najdłuższy bok ma długość $m$. Oblicz sumę długości krótszych boków.

**Ćwiczenie 4**

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny. Oblicz obwód $L$ tego trójkąta, wiedząc, że

1. jego przyprostokątna ma długość $2$
2. przeciwprostokątna ma długość $\sqrt{72}$
3. pole jest równe $8$

**Ćwiczenie 5**

Czy istnieje trójkąt prostokątny równoramienny, którego długości boków wyrażają się liczbami naturalnymi?

**Ćwiczenie 6**

Czy w trójkącie $ABC$ bok $BC$ jest najdłuższy? Wybierz poprawną odpowiedź.

Grafika statyczna

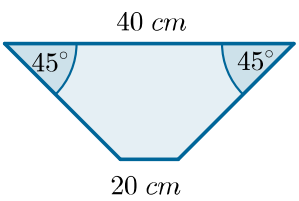
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Nie, ponieważ trójkąt ma dwa równe kąty.
- Tak, ponieważ trójkąt ma dwa równe kąty.
- Tak, trójkąt jest prostokątny i $BC$ jest jego przeciwprostokątną.
- Nie, trójkąt jest prostokątny i $BC$ jest jego przeciwprostokątną.

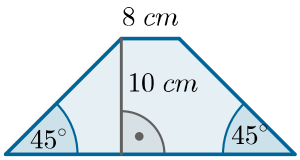
**Ćwiczenie 7**

Oblicz obwód trapezu.

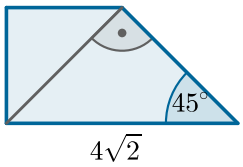
**a)**




**b)**




**c)**




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 8**

Miara kąta rozwartego równoległoboku jest równa $135^\circ$. Dłuższy bok jest równy $16\ \mathrm{dm}$. Oblicz obwód równoległoboku, wiedząc, że jego wysokość jest równa $2\ \mathrm{dm}$.

## Ćwiczenie 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10

Prawda czy fałsz?

Rysunek trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych równych 9 i k oraz przeciwprostokątnej a. Bok k leży naprzeciw kąta 30 stopni.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

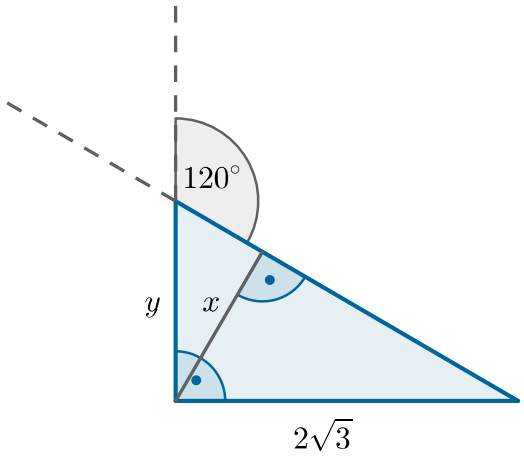
- [ ] $a = 18$
- [ ] $a - k = \sqrt{2}$
- [ ] $k = 3\sqrt{2}$
- [ ] $k = 3\sqrt{3}$

## Ćwiczenie 11

W trójkącie prostokątnym stosunek miary kątów ostrych jest równy $2:1$. Krótsza przyprostokątna ma długość $10$. Oblicz obwód trójkąta.

## Ćwiczenie 12

Na podstawie rysunku można stwierdzić, że

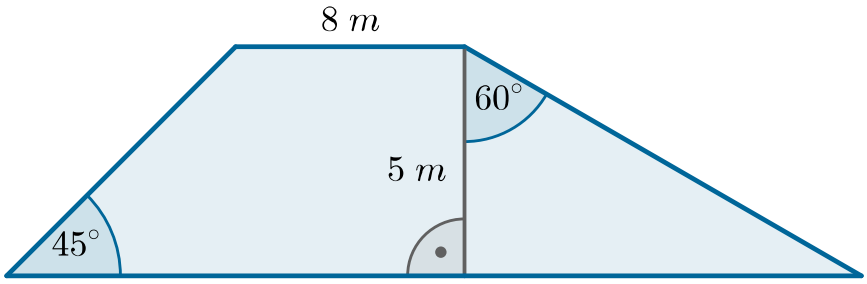



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- $x + y = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $x + y = 2 + \sqrt{3}$
- $x + y = 2\sqrt{3}$
- $x + y = 4\sqrt{3}$

**Ćwiczenie 13**

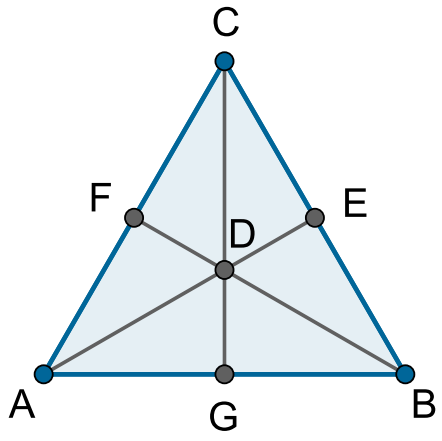
Metalowy element ozdobny ma kształt trapezu przedstawionego na rysunku. Ile $m^2$ blachy potrzeba na jego wykonanie?




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 14**

Punkty: $E,\ \mathrm{F},\ \mathrm{G}$ są środkami boków trójkąta równobocznego $\mathrm{ABC}$. Punkt $D$ jest punktem przecięcia środkowych boków tego trójkąta i $|\mathrm{DE}| = 2$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz obwód

1. trójkąta $\mathrm{EDB}$
2. trójkąta $\mathrm{EAB}$
3. trójkąta $\mathrm{ABC}$
4. czworokąta $\mathrm{FDEC}$

**Ćwiczenie 15**

Szerokość prostokąta jest równa $4\ \mathrm{dm}$. Znajdź sumę długości przekątnych tego prostokąta, wiedząc, że przecinają się one pod kątem $120^\circ$.

**Ćwiczenie 16**

Dany jest okrąg o środku w punkcie $S$ i promieniu $3\ m$, gdzie $m$ jest liczbą naturalną dodatnią. Z punktu $P$ leżącego poza okręgiem poprowadzono styczne do okręgu, przecinające się pod kątem $120^\circ$.

Długość odcinka $\mathrm{SP}$ jest równa

- $6\sqrt{3m}$
- $6m$
- $\sqrt{3}m$
- $2\sqrt{3}m$

**Ćwiczenie 17**

Przekątna prostokąta długości $8\ \mathrm{cm}$ jest nachylona do dłuższego boku pod kątem $30^\circ$. Oblicz pole i obwód prostokąta.

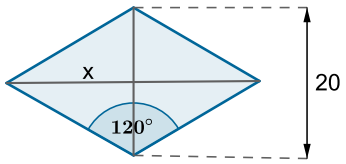
**Ćwiczenie 18**

Na trójkącie opisano okrąg o promieniu $7\ \mathrm{dm}$. Oblicz trzy wysokości trójkąta, wiedząc, że miary kątów tego trójkąta są w stosunku $3:2:1$.

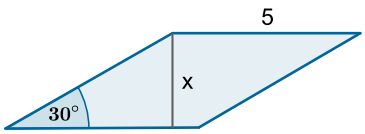
**Ćwiczenie 19**

Oblicz długość odcinka $x$ w rombie.

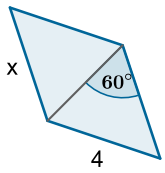
**a)**




**b)**




**c)**

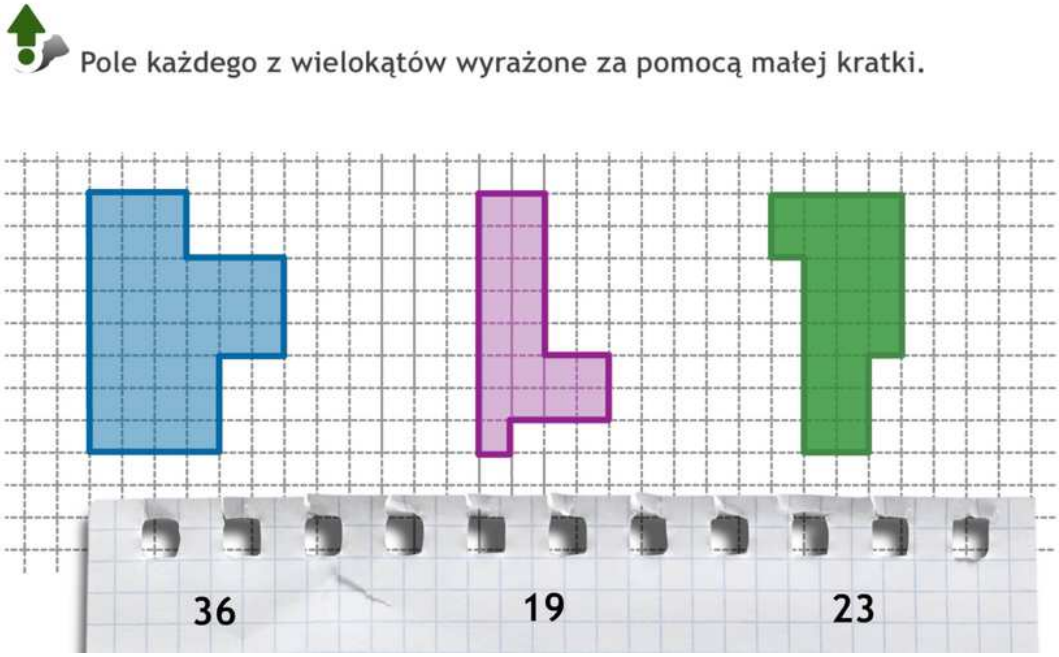



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

# Pole figury. Jednostki pola

## Pole figury

Wiemy już, że pole figury to nieujemna liczba określająca, ile figur jednostkowych (lub ich części) mieści się w danej figurze.




Film dostępny pod adresem /preview/resource/RxnK82x0xDIr3

Pole figury_atrapa_animacja_329

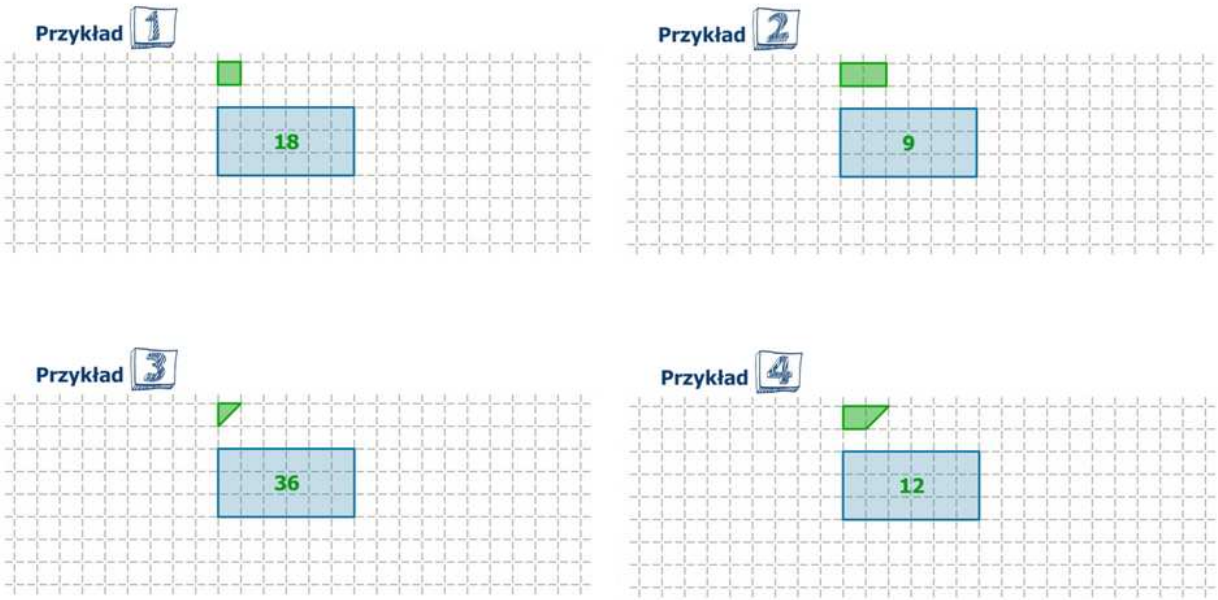
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

Pole figury może przyjmować różne wartości liczbowe w zależności od tego, jaką figurę przyjmiemy za jednostkę miary.

**Przykład 1**




Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1QtetDHMbYqL

Jednostki pola. Zamiana jednostek_atrapa_6085

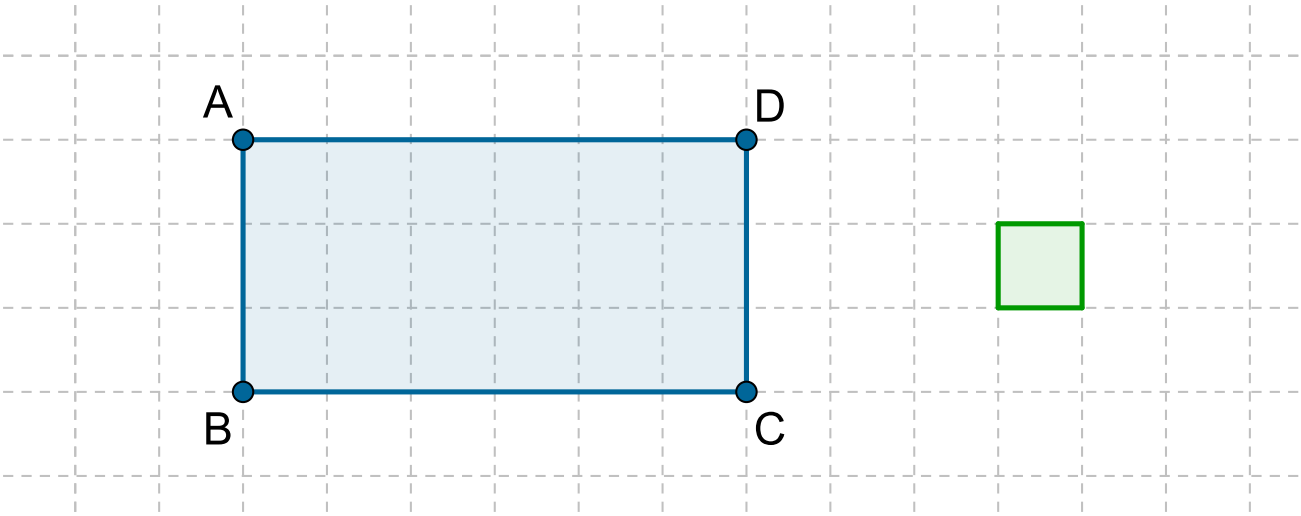
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 2**

Pole prostokąta ABCD jest równe 18, gdy za jednostkę pola przyjmiemy kwadrat.



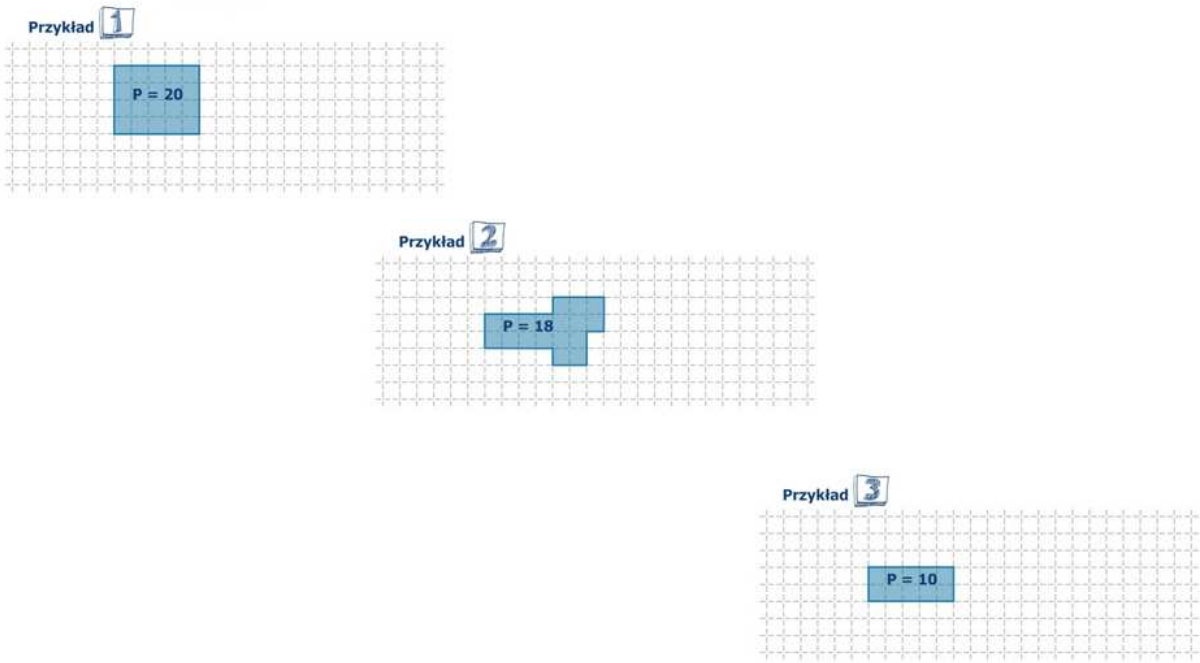

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Określ przybliżone pole tego prostokąta, przyjmując za jednostkę pola figurę wyróżnioną kolorem zielonym.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 3**

Do zbudowania każdej z figur: $K$, $\mathrm{L}$, $\mathrm{M}$ użyto tych samych trzech prostokątów. Czy pola tych figur są równe? Jeśli nie, to która z nich ma największe, a która najmniejsze pole? Dlaczego?




Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1A8D50OZmGaj

Jednostki pola. Zamiana jednostek_atrapa_6086

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

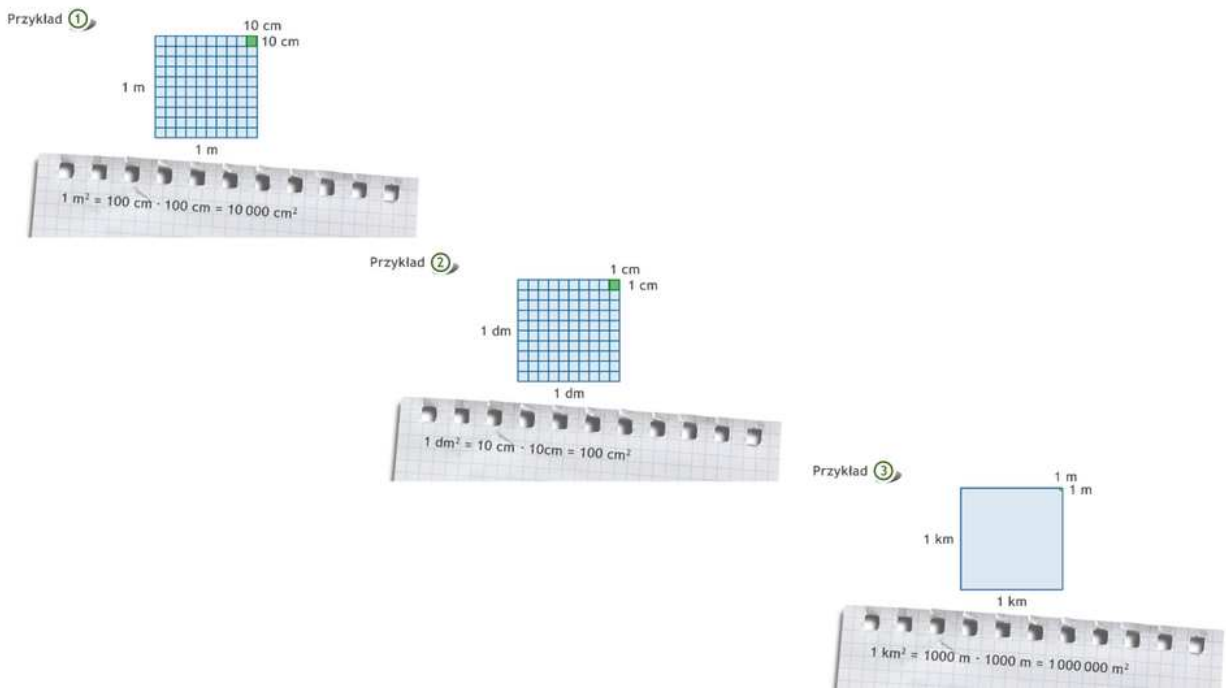
Animacja

# Jednostki pola

**Zapamiętaj!**

$1\ m^2$ to kwadrat o boku $1\ m$.
Inne najczęściej używane jednostki pola to: $mm^2, cm^2, dm^2, km^2$.

- $1\ \mathrm{mm}^2$
- $1\ \mathrm{cm}^2 = 100\ \mathrm{mm}^2$
- $1\ \mathrm{dm}^2 = 100\ \mathrm{cm}^2 = 10\ 000\ \mathrm{mm}^2$
- $1\ m^2 = 100\ \mathrm{dm}^2 = 10\ 000 \mathrm{cm}^2$
- $1\ \mathrm{km}^2 = 1000\ 000\ m^2$




Film dostępny pod adresem /preview/resource/RavQcfndwPfsd

Pole figury_atrapa_animacja_72

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 4**

Pole powierzchni dywanu jest równe 5,6 $m^2$. Ile to $dm^2$? Ile to $cm^2$?
1 $m^2$ to 100 d$m^2$, więc 5,6 $m^2 = 5{,}6 \cdot 100$ d$m^2 = 560$ d$m^2$
1 $m^2$ to 10 000 $cm^2$, więc 5,6 $m^2 = 5{,}6 \cdot 10\,000\ cm^2 = 56\,000$ c$m^2$

**Przykład 5**

Jedna z największych polskich sal kinowych znajduje się w Warszawie w centrum handlowym Złote Tarasy. Ekran w tej sali ma wymiary 2900 cm i 1200 cm.
Jeden z największych ekranów kinowych na świecie znajduje się w Sydney w Australii i ma wymiary 2970 cm i 3570 cm.
Przyjmij, że ekrany kinowe są prostokątami i oblicz, o ile $\mathrm{dm}^2$ pole ekranu w Sydney jest większe od pola ekranu w Warszawie.
Obliczamy pole powierzchni ekranu w warszawskich Złotych Tarasach w centymetrach kwadratowych i otrzymany wynik zapisujemy w decymetrach kwadratowych.

$$P_W = 2900 \cdot 1200$$

$$P_W = 3480000 \text{ c}m^2$$

$$1 \text{ d}m^2 = 100 \text{ c}m^2, \text{więc} 1 \text{ c}m^2 = 0{,}01 \text{ d}m^2$$

$$P_W = 3\,480\,000 \cdot 0{,}01 \text{ d}m^2 = 34\,800 \text{ d}m^2$$

Obliczamy pole powierzchni ekranu znajdującego się w Sydney w centymetrach kwadratowych i otrzymany wynik zapisujemy w decymetrach kwadratowych.

$$P_S = 2970 \cdot 3570$$

$$P_S = 10602900 \text{ c}m^2$$

$$P_S = 10\ 602\ 900 \cdot 0{,}01\ \mathrm{d}m^2\ =\ 106\ 029\ \mathrm{d}m^2$$

Wyznaczamy różnicę pól.

$$P_S - P_W\ = 106\ 029\ \mathrm{d}m^2 - 34\ 800\ \mathrm{d}m^2\ =\ 71\ 229\ \mathrm{d}m^2$$

Pole powierzchni ekranu w Sydney jest o $71\ 299\ \mathrm{d}m^2$ większe od pola powierzchni ekranu w Warszawie.

## Jednostki pola powierzchni gruntów

Jednostki często używane do wyznaczania pól powierzchni gruntów rolnych, działek budowlanych itp. to ar i hektar.

**Zapamiętaj!**

1 ar (1 a) to kwadrat o boku długości 10 m.

$$1\ \mathrm{a}\ = 10\ \mathrm{m} \cdot 10\ \mathrm{m}\ = 100\ m^2$$

1 hektar (1 ha) to kwadrat o boku długości 100 m.

$$1\ \mathrm{ha}\ =\ 100\ \mathrm{m}\ \cdot 100\ \mathrm{m} =\ 10\ 000\ m^2$$

**Zapamiętaj!**

- $1a = 100\ m^2$
- $1\ \mathrm{ha} = 10\ 000\ m^2$
- $1\ \mathrm{ha} = 100\ \mathrm{a}$

**Przykład 6**

Boisko na Stadionie Narodowym w Warszawie ma wymiary $105\ \mathrm{m}$ i $68\ \mathrm{m}$. Ile to hektarów? Ile to arów?
Obliczamy pole powierzchni boiska w metrach kwadratowych.

$$P = 105 \cdot 68 = 7140$$

$$P = 7140\ m^2$$

Zapisujemy wynik w hektarach.

$$1\ \mathrm{ha} = 10\ 000\ m^2 \text{ zatem } 1\ m^2 = 0{,}0001\ \mathrm{ha}$$

$$P = 7140 \cdot 0{,}0001\ \mathrm{ha} = 0{,}7140\ \mathrm{ha}$$

Zapisujemy pole powierzchni boiska w arach.

$$1\ \mathrm{a} = 100\ m^2 \text{to } 1\ \mathrm{m}^2 = 0{,}01\ \mathrm{a}$$

$$P = 7140 \cdot 0{,}01\ \mathrm{a} = 71{,}40\ \mathrm{a}$$

Odpowiedź: Boisko na Stadionie Narodowym ma pole powierzchni równe $0{,}7140\ \mathrm{ha}$, czyli $71{,}4\ \mathrm{a}$.

**Ciekawostka**

W osiemnastowiecznej Polsce stosowano inne miary pola niż obecnie. Na przykład jednostkami miar powierzchni stosowanymi dla gruntów rolnych były:

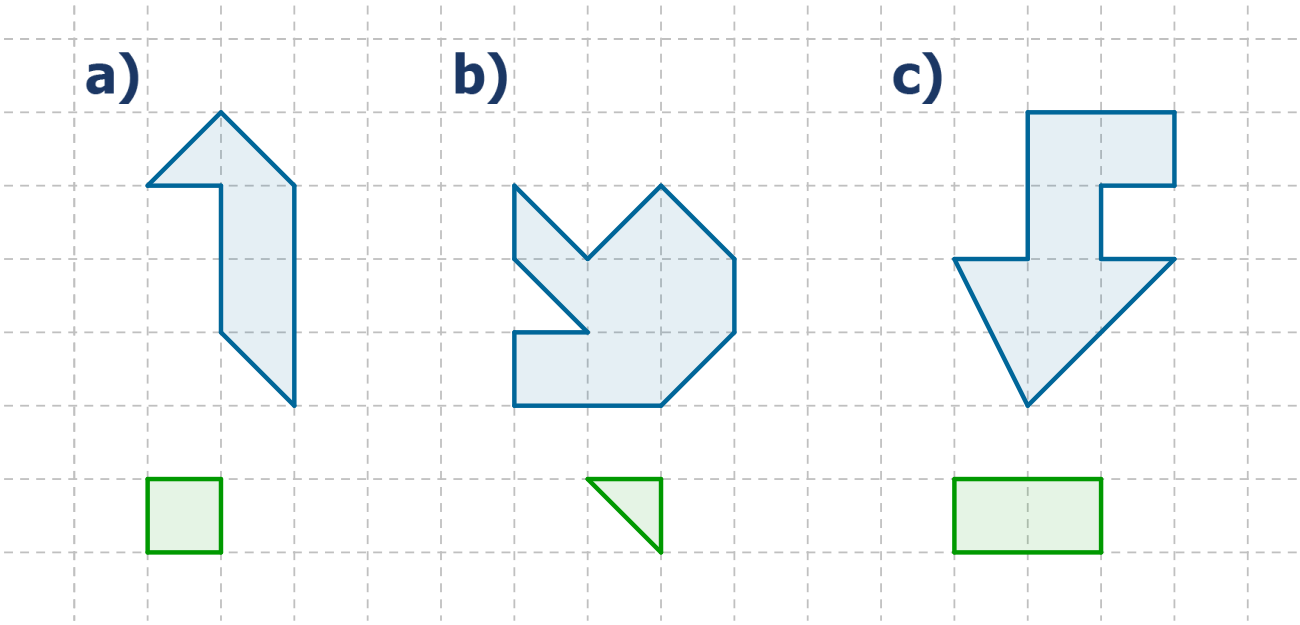
- kopanka $19{,}95\ m^2$,
- laska kwadratowa - 4 kopanki,
- kwadratowy pręt większy - 2,5 laski kwadratowej,

- wertel - 18 kwadratowych prętów większych,
- morga - $1\frac{2}{3}$ wertela - 5985 $m^2$.

Kmiecie, którzy stanowili w owym czasie największą grupę mieszkańców wsi, posiadali najczęściej dziewięćdziesięciomorgowe gospodarstwo.

**Ćwiczenie 1**

Oblicz pole figury, przyjmując za jednostkę pola wielokąt wyróżniony kolorem zielonym.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 2**

Przyjmij za jednostkę pola kratkę zeszytową i narysuj figurę o polu

1. równym 7
2. mniejszym od 5
3. większym od 10

## Ćwiczenie 3

Uzupełnij.

a) $2\ \mathrm{m}^2 =$ ____ $\mathrm{cm}^2$

b) $16,5\ \mathrm{m}^2 =$ ____ $\mathrm{cm}^2$

c) $11\ \mathrm{dm}^2 =$ ____ $\mathrm{cm}^2$

d) $150\ \mathrm{mm}^2 =$ ____ $\mathrm{cm}^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 4

Uzupełnij.

a) $5\ \mathrm{km}^2 =$ ____ $\mathrm{m}^2$

b) $182\ \mathrm{cm}^2 =$ ____ $\mathrm{dm}^2$

c) $4444\ \mathrm{cm}^2 =$ ____ $\mathrm{m}^2$

d) $7890000\ \mathrm{cm}^2 =$ ____ $\mathrm{m}^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 5

Na planie wykonanym w skali $1:\ 2000$ pole powierzchni parku jest równe $4\ cm^2$. Jakie pole powierzchni ma ten park w rzeczywistości?

**Ćwiczenie 6**

Pole powierzchni trawnika na działce Marcina jest równe $68\ m^2$. Pole powierzchni trawnika na działce Agaty jest równe $680\ \mathrm{d}m^2$, na działce Bogdana $68000\ \mathrm{c}m^2$, a na działce Emilii $0{,}00068\ \mathrm{k}m^2$.

Kto ma największy trawnik?

- ◯ Agata
- ◯ Emilia
- ◯ Marcin
- ◯ Bogdan

**Ćwiczenie 7**

Pole powierzchni sadu jest równe $2\ \mathrm{ha}$. Na $\frac{3}{4}$ całej powierzchni posadzone są grusze. Grusze zajmują więc

- ☐ $150 \cdot 10^2\ m^2$
- ☐ $150 \cdot 10^5\ \mathrm{c}m^2$
- ☐ $150 \cdot 10^2\ \mathrm{a}$
- ☐ $150\ \mathrm{a}$

## Ćwiczenie 8

Połącz w pary.

| | |
|---|---|
| $0,73\ \mathrm{a}$ | $0,073\ \mathrm{km}^2$ |
| $7,3\ \mathrm{ha}$ | $730\ \mathrm{m}^2$ |
| $73\ \mathrm{a}$ | $7300\ \mathrm{m}^2$ |
| $0,073\ \mathrm{ha}$ | $73\ \mathrm{m}^2$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DgWzKvXo

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 10




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DgWzKvXo

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 11




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DgWzKvXo

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 12




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DgWzKvXo

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 13




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DgWzKvXo

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

# Pole trójkąta

## Wzór na pole trójkąta

**Przykład 1**

Rysunek przedstawia trójkąt ABC o podstawie $a$ i wysokości $h$. Odcinek DE dzieli wysokość trójkąta na dwie równe części.
Przemieszczając odpowiednio części trójkąta, zbuduj prostokąt. Określ długości boków tego prostokąta i oblicz jego pole.



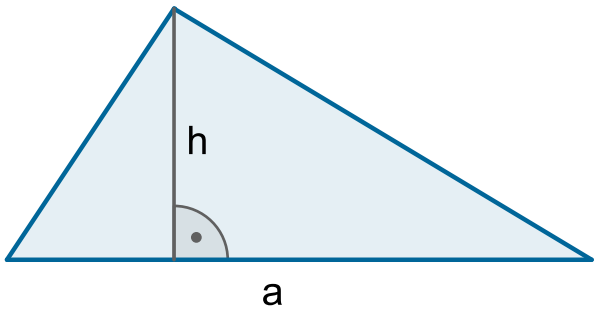

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D16g8sBbj

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Czy pole trójkąta ABC jest większe, czy mniejsze od pola otrzymanego prostokąta? Dlaczego?

**Twierdzenie: Pole trójkąta**

Pole $P$ trójkąta o wysokości $h$ poprowadzonej do podstawy długości $a$ jest równe $P = \frac{a \bullet h}{2}$.

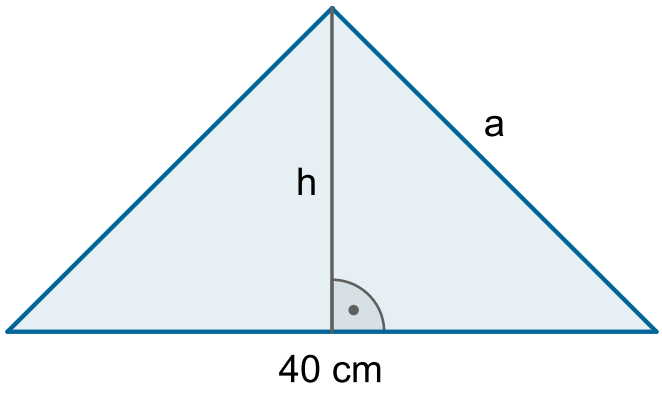



$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 2**

Pole trójkąta równoramiennego jest równe $420\ cm^2$. Oblicz obwód trójkąta, jeżeli jego podstawa ma długość 40 cm.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczamy wysokość $h$ trójkąta.

$$420 = \frac{40 \cdot h}{2}$$

$$h = 21 \text{ cm}$$

Obliczamy długość a boku trójkąta, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$h^2 + \left(\frac{40}{2}\right)^2 = a^2$$

$$21^2 + 20^2 = a^2$$

$$441 + 400 = a^2$$

$$841 = a^2$$

$$a = \sqrt{841} = 29$$

$$a = 29 \text{ cm}$$

Obliczamy obwód trójkąta.

$$L = 2a + 40$$

$$L = 2 \cdot 29 + 40 = 98$$

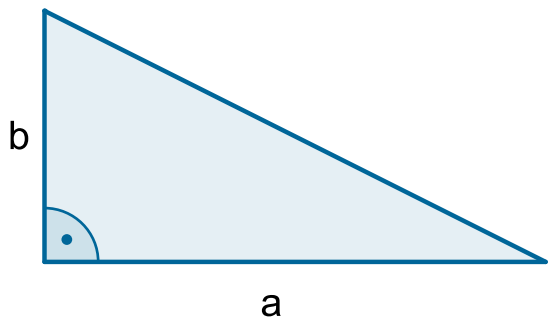
$$L = 98 \text{ cm}$$

Obwód trójkąta jest równy 98 cm.

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne są zarazem wysokościami trójkąta. Zatem, aby obliczyć pole trójkąta prostokątnego, wystarczy znać długości jego przyprostokątnych.

**Twierdzenie: Pole trójkąta prostokątnego**

Pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości $a$ i $b$ jest równe $P = \frac{a \bullet b}{2}$

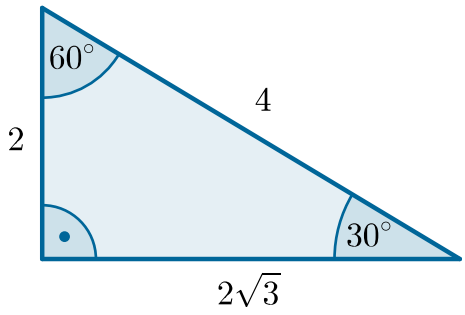



$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 3**

Oblicz pole trójkąta, w którym miary dwóch kątów są równe $30^\circ$ i $60^\circ$, a najdłuższy bok jest równy 4.
W trójkącie, w którym miary dwóch kątów są równe $30^\circ$ i $60^\circ$, trzeci kąt ma miarę $90^\circ$.



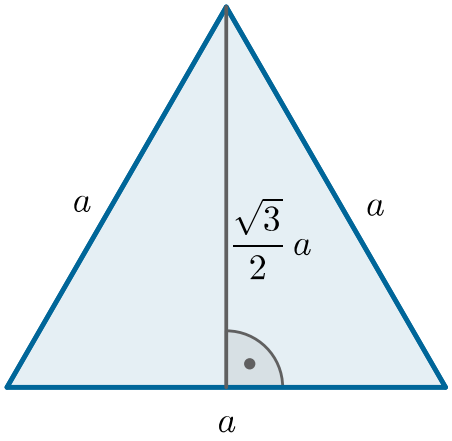

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem jest to trójkąt prostokątny.
Najdłuższy bok to przeciwprostokątna, ma ona długość 4. Z własności trójkąta prostokątnego o kątach ostrych $30^\circ$ i$60^\circ$ wynika, że przyprostokątne tego trójkąta mają długości 2 i $2\sqrt{3}$.
Obliczamy pole trójkąta.

$$P = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Pole trójkąta jest równe $2\sqrt{3}$.

# Pole trójkąta równobocznego



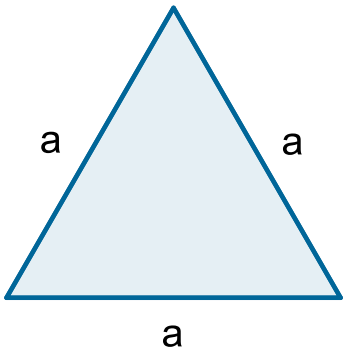

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a jest równa $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Wstawiając tę wartość do wzoru na pole trójkąta, otrzymujemy wzór na pole trójkąta równobocznego

$$P = \frac{\mathrm{ah}}{2} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

**Twierdzenie: Pole trójkąta równobocznego**

Pole trójkąta równobocznego o boku długości $a$ jest równe $P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.




$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 1**

Pole trójkąta jest równe $P$. Podstawa trójkąta ma długość równą wysokości poprowadzonej do tej podstawy. Oblicz długość podstawy.

**Ćwiczenie 2**

Pole trójkąta jest równe $20\ cm^2$. Oblicz

1. wysokość trójkąta, wiedząc, że podstawa do której poprowadzono wysokość, jest równa $4\ \mathrm{cm}$.
2. długość podstawy trójkąta, wiedząc, że wysokość poprowadzona do tej podstawy, jest równa $1\ \mathrm{dm}$.

**Ćwiczenie 3**

Wysokość $\mathrm{CD}$ trójkąta $\mathrm{ABC}$ dzieli podstawę $\mathrm{AB}$ w stosunku $1:3$. Wykaż, że pola trójkątów $\mathrm{ADC}$ oraz $\mathrm{DBC}$ pozostają również w stosunku $1:3$.

**Ćwiczenie 4**

Wysokość $\mathrm{CD}$ trójkąta $\mathrm{ABC}$ ma długość $8$ i dzieli podstawę $\mathrm{AB}$ w stosunku $1:3$. Pole trójkąta jest równe $32$. Oblicz pole trójkąta $\mathrm{ADC}$ oraz pole trójkąta $\mathrm{DBC}$.

**Ćwiczenie 5**

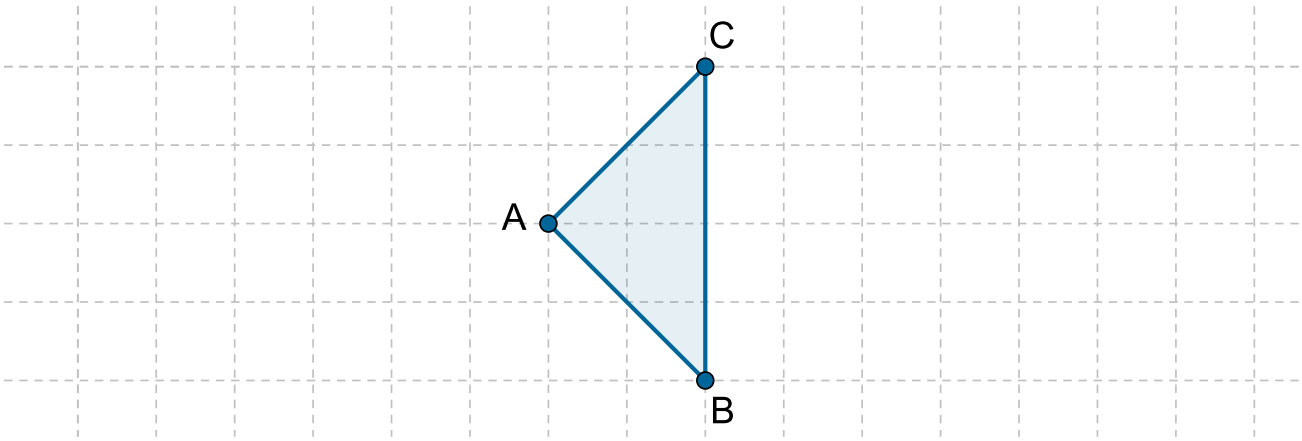
Wysokość $\mathrm{CD}$ trójkąta $\mathrm{ABC}$ dzieli podstawę $\mathrm{AB}$ w stosunku $1:3$. Oblicz iloraz pól trójkątów $\mathrm{ADC}$ oraz $\mathrm{DBC}$.

**Ćwiczenie 6**

Skonstruuj trójkąt o bokach $|\mathrm{AC}| = 14,\ |\mathrm{BC}| = 20$ oraz wysokości $\mathrm{CD}$ równej $12$. Oblicz pole wyznaczonego trójkąta. Przeanalizuj jednoznaczność rozwiązania.

**Ćwiczenie 7**

Oblicz pole trójkąta $ABC$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 8**

Oblicz pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości $9{,}5\ \mathrm{cm}$ i $12\ \mathrm{cm}$.

**Ćwiczenie 9**

Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o przeciwprostokątnej długości

1. $6\sqrt{2}$
2. $0{,}5\sqrt{2}$
3. $1$
4. $\frac{2}{5}$

**Ćwiczenie 10**

Zmień położenie wierzchołków trójkąta $ABC$ tak, aby otrzymać trójkąt prostokątny. Oblicz pole tego trójkąta, przyjmując, że długość jednej kratki jest równa $1$.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D16g8sBbj

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ćwiczenie 11**

Pole trójkąta prostokątnego jest równe $12$. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej, wiedząc, że

1. pierwsza przyprostokątna ma długość $4$
2. pierwsza przyprostokątna jest równa drugiej
3. pierwsza przyprostokątna jest dwukrotnie dłuższa od drugiej
4. pierwsza przyprostokątna jest trzykrotnie krótsza od drugiej

**Ćwiczenie 12**

Oblicz obwód $L$ trójkąta prostokątnego wiedząc, że

1. jego pole jest równe $6$, a jedna z przyprostokątnych ma długość $4$
2. jego pole jest równe $30$, a jedna z przyprostokątnych ma długość $12$
3. jego przyprostokątne są równe, a pole wynosi $24{,}5$.

**Ćwiczenie 13**

Udowodnij, że pole trójkąta rozwartokątnego jest różnicą pól dwóch trójkątów prostokątnych.

**Ćwiczenie 14**

Oblicz pole $P$ trójkąta równoramiennego, którego podstawa ma długość $80$, a ramię $41$.

**Ćwiczenie 15**

Ramiona trójkąta równoramiennego mają długość $10$, a jego podstawa ma długość $16$. Oblicz pole tego trójkąta.

**Ćwiczenie 16**

Oblicz obwód $L$ trójkąta równoramiennego, którego pole jest równe $660$, a podstawa ma długość $120$.

**Ćwiczenie 17**

Pole trójkąta równobocznego o boku długości $\sqrt{2}\ \mathrm{dm}$ wynosi

- ○ $\frac{\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{dm}^2$
- ○ $\frac{\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{dm}$
- ○ $2\ \mathrm{dm}^2$

**Ćwiczenie 18**

Pole $P$ trójkąta równobocznego o wysokości $9\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$ wynosi

- $80\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$
- $81\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$
- $100\ \mathrm{cm}^2$

**Ćwiczenie 19**

Pole trójkąta równobocznego o obwodzie $12\ \mathrm{mm}$ wynosi

- $12\sqrt{3}\ \mathrm{mm}^2$
- $4\sqrt{3}\ \mathrm{mm}^2$
- $\sqrt{3}\ \mathrm{mm}^2$

**Ćwiczenie 20**

Oblicz wysokość $h$ trójkąta równobocznego, którego pole $P$ jest równe liczbie ze zbioru $\left\{\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 15\sqrt{3}, 16\sqrt{3}\right\}$.

Pole trójkąta równobocznego o boku długości $a$ wynosi: $P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, stąd $a = \sqrt{\frac{4P\sqrt{3}}{3}}$

.

**Ćwiczenie 21**

Oblicz obwód $L$ trójkąta równobocznego, którego pole $P$ jest równe liczbie ze zbioru $\left\{\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 15\sqrt{3}, 16\sqrt{3}\right\}$. Pole trójkąta równobocznego o boku długości $a$ wynosi $P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, stąd $a = \sqrt{\frac{4P\sqrt{3}}{3}}$.

**Ćwiczenie 22**

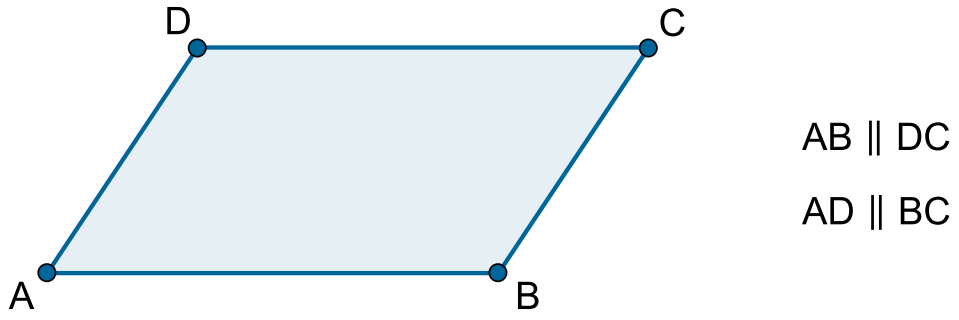
Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Pole trójkąta równobocznego zawsze wyraża się liczbą niewymierną.
- [ ] Jeśli pole trójkąta równobocznego wyraża się liczbą niewymierną, to również obwód tego trójkąta wyraża się liczbą niewymierną.
- [ ] Pole trójkąta równobocznego o boku długości $\sqrt{3}$ wyraża się liczbą naturalną.

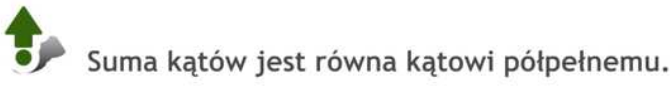
# Pole równoległoboku

**Już wiesz**

- **Równoległobok** to czworokąt, który ma dwie pary równoległych boków.
- Równoległobokami są więc na przykład prostokąty, kwadraty i romby.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Film dostępny pod adresem /preview/resource/RyqsHZ9HfWo7t

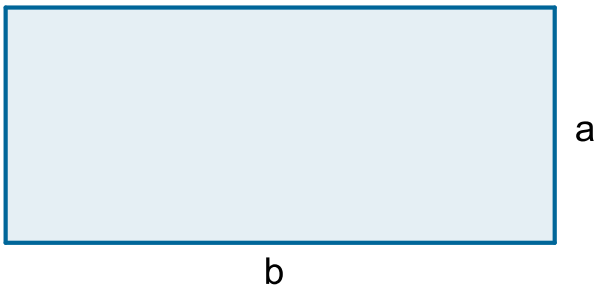
Rownoleglobok i jego wlasnosci_atrapa_animacja_393

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

# Obliczanie pola prostokąta

**Ważne!**




$$P = a \cdot b$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole prostokąta o bokach długości $a$ oraz $b$ jest równe

$$\mathrm{P} = \mathrm{ab}$$




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1EsaDoKb

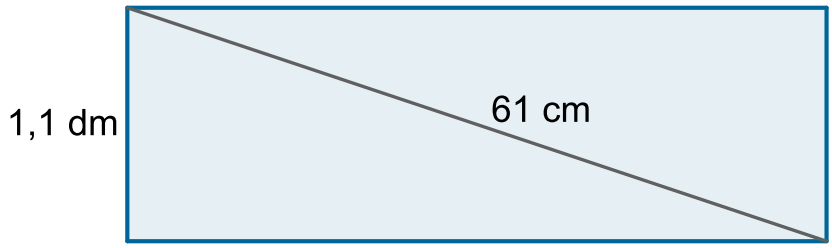
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1EsaDoKb

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Przykład 1**

Oblicz pole prostokąta o przekątnej długości 61 cm i szerokości 1,1 dm.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapisujemy szerokość prostokąta w centymetrach.

$$1{,}1 \text{ dm} = 11 \text{ cm}$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość $a$ prostokąta.

$$11^2 + a^2 = 61^2$$

$$121 + a^2 = 3721$$

$$a^2 = 3600,\ a > 0$$

$$a = 60$$

Obliczamy pole prostokąta.

$$P = 11 \cdot 60$$

$$P = 660\ \mathrm{c}m^2$$

Pole prostokąta jest równe $660\ \mathrm{c}m^2$.

**Przykład 2**

Oblicz pole „parasolki”.
Zauważmy, że choć „parasolka” zbudowana jest z fragmentów koła, to jej pole można obliczyć mimo nieznajomości wzoru na pole koła.

Przesuń suwak

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1EsaDoKb

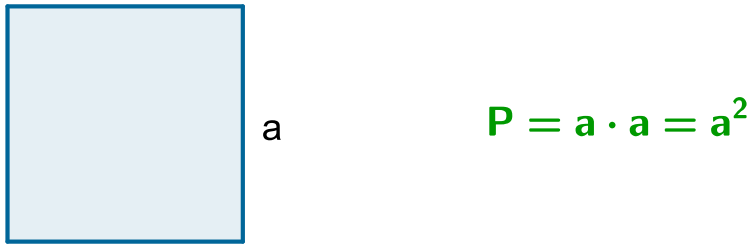
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

„Parasolka” i prostokąt o bokach długości $a$ i $\frac{a}{2}$ składają się z części odpowiednio do siebie przystających. O takich figurach mówimy, że są równoważne. Pola tych figur są równe.
Pole „parasolki” jest równe $P = \frac{1}{2}a^2$.

# Pole kwadratu

**Kwadrat** to prostokąt, którego boki są równe. Jego pole obliczamy więc podobnie jak pole prostokąta.

**Ważne!**




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole kwadratu o boku długości $a$ jest równe

$$P = a \cdot a = a^2$$




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1EsaDoKb

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1EsaDoKb

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Przykład 3**

Pole kwadratu jest równe 49. Oblicz długość jego przekątnej.
Obliczamy najpierw długość $a$ boku kwadratu.

$$a^2 = 49$$

$$a = 7$$

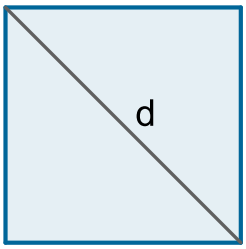
Długość $d$ przekątnej obliczamy, korzystając ze wzoru na przekątną kwadratu.

$$d = a\sqrt{2}$$

$$d = 7\sqrt{2}$$

Długość przekątnej kwadratu jest równa $7\sqrt{2}$.
Pole kwadratu można obliczyć, znając długość jego przekątnej.

**Ważne!**




$$P = \frac{1}{2} d^2$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole kwadratu o przekątnej długości $d$ jest równe

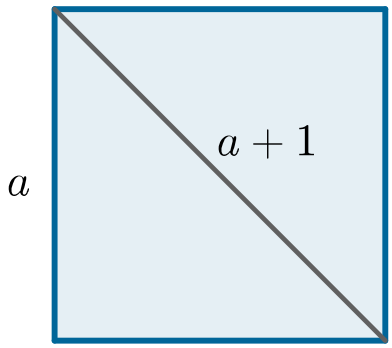
$$P = \frac{1}{2} d^2$$

**Ćwiczenie 1**

Uzasadnij prawdziwość wzoru na pole kwadratu o przekątnej długości $d$.

**Przykład 4**

Oblicz obwód i pole kwadratu, wiedząc, że jego przekątna jest o 1 dłuższa od boku.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy: $a$ – długość boku kwadratu. Wtedy jego przekątna d ma długość $a+1$. Korzystamy ze wzoru na przekątną kwadratu.

$$d = a\sqrt{2}$$

$$a\sqrt{2} = a + 1$$

$$a\sqrt{2} - a = 1$$

$$a\left(\sqrt{2} - 1\right) = 1$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

Usuwamy niewymierność z mianownika ułamka, rozszerzając ułamek przez $\sqrt{2}+1$ i wykonując wskazane działania.

$$a = \frac{1 \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right)}{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1}$$

$$a = \frac{\sqrt{2} + 1}{1}$$

$$a = \sqrt{2} + 1$$

Obliczamy obwód kwadratu.

$$L = 4\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

Obliczamy pole kwadratu.

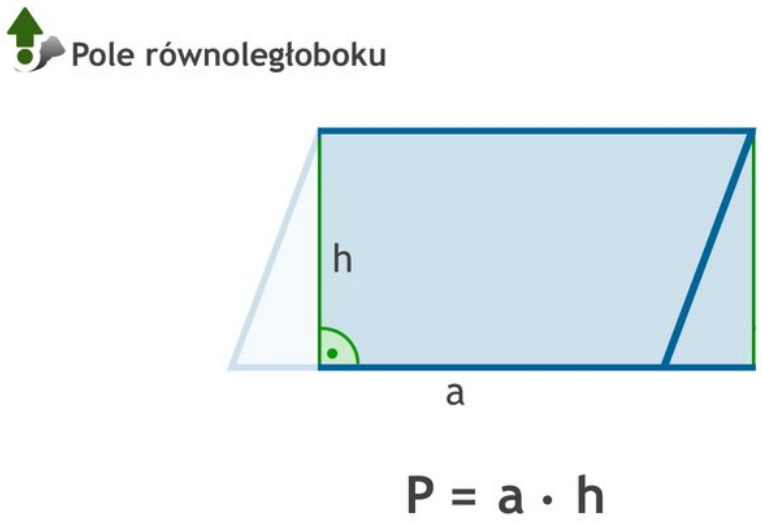
$$P = \left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

$$P = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) = 2+\sqrt{2}+\sqrt{2}+1 = 3+2\sqrt{2}$$

Obwód kwadratu jest równy $4\left(\sqrt{2}+1\right)$, a jego pole $3+2\sqrt{2}$.

# Pole równoległoboku

**Zapamiętaj!**




Film dostępny pod adresem /preview/resource/R6BN31mrbpFsK

Atrapa_animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Przykład 5**

Rysunek przedstawia równoległobok ABCD ( w różnym położeniu) o wysokości $h$ poprowadzonej do boku długości $a$.
Przekształć równoległobok tak, aby otrzymać prostokąt.

- przypadek $I$




Zasób interaktywny dostępny pod adresem
https://zpe.gov.pl/a/D1EsaDoKb

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

- przypadek II

Zasób interaktywny dostępny pod adresem
https://zpe.gov.pl/a/D1EsaDoKb

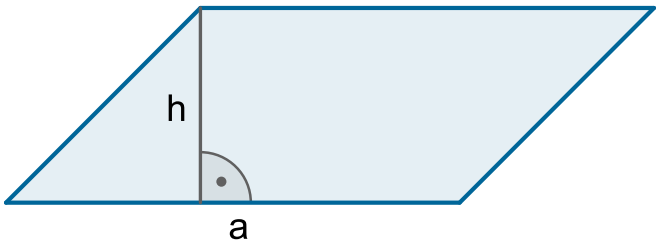
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Jakie jest pole otrzymanego prostokąta? Jakie jest pole równoległoboku? Zapisz wzór na pole równoległoboku.

**Ważne!**

Pole równoległoboku o podstawie długości $a$ i wysokości $h$ poprowadzonej do tej podstawy jest równe

$$P = a \cdot h$$




$$\mathbf{P = a \cdot h}$$

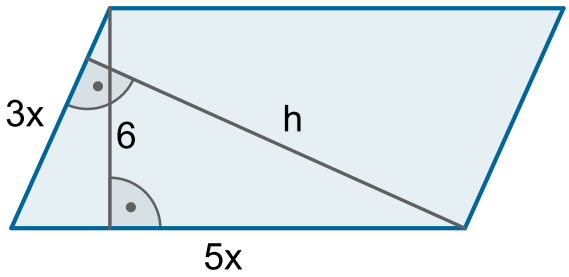
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 6**

Stosunek długości boków równoległoboku jest równy $3:5$. Obwód równoległoboku jest równy $40$. Wysokość poprowadzona do dłuższego boku jest równa $6$. Oblicz długość drugiej wysokości równoległoboku.
Oznaczmy

- $3x$ (gdzie $x$ jest liczbą naturalną różną od 0) – długość krótszego boku równoległoboku
- $5x$ (gdzie $x$ jest liczbą naturalną różną od 0)- długość dłuższego boku równoległoboku.

Obliczamy długości boków równoległoboku, korzystając z tego, że obwód równoległoboku jest równy 40.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$2(3x + 5x) = 40 \ / : 2$$

$$8x = 20$$

$$x = 2{,}5$$

$$3x = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$$

$$5x = 5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$$

Obliczamy pole równoległoboku.

$$P = 12{,}5 \cdot 6 = 75$$

Pole równoległoboku możemy też obliczyć jako iloczyn krótszego boku i wysokości poprowadzonej do tego boku.

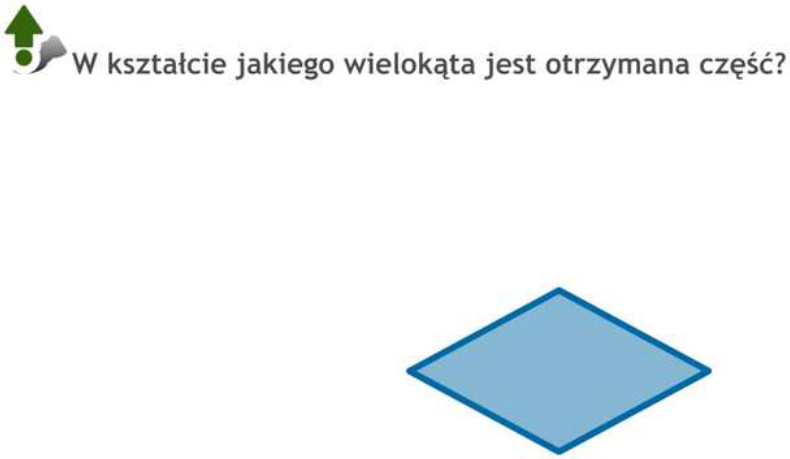
$$7{,}5 \cdot h = 75$$

$$h = 10$$

Druga z wysokości równoległoboku jest równa 10.

# Pole rombu

**Już wiesz**




Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1IOJ6o5hEH5T

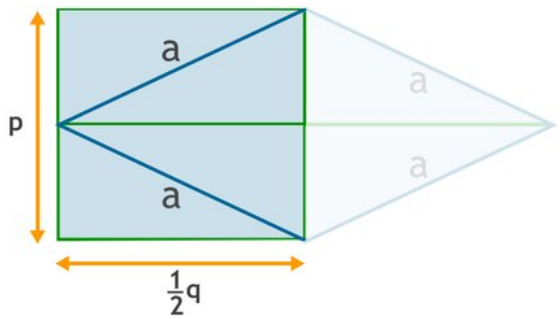
Wlasnosci rombu_atrapa_animacja_394

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Zapamiętaj!**

Pole rombu




$$P = \frac{1}{2}q \cdot p$$

Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1ALKa6rbcFDi

Atrapa_animacji

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 7**

Rysunek przedstawia romb o wysokości $h$ i boku długości $a$.
Przekształć romb tak, aby otrzymać prostokąt.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1EsaDoKb

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Jakie jest pole otrzymanego prostokąta? Jakie jest pole rombu? Zapisz wzór na pole rombu.

**Przykład 8**

Rysunek przedstawia romb o przekątnych długości $p$ i $q$. Przekształć romb tak, aby otrzymać prostokąt.

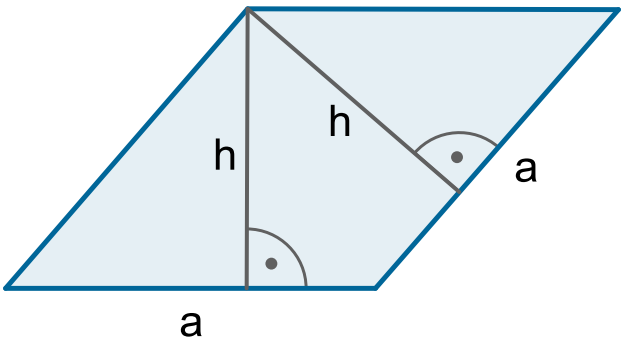
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1EsaDoKb

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Jakie jest pole otrzymanego prostokąta? Jakie jest pole rombu? Zapisz wzór na pole rombu.

**Ważne!**

Pole rombu o wysokości $h$ i boku długości $a$



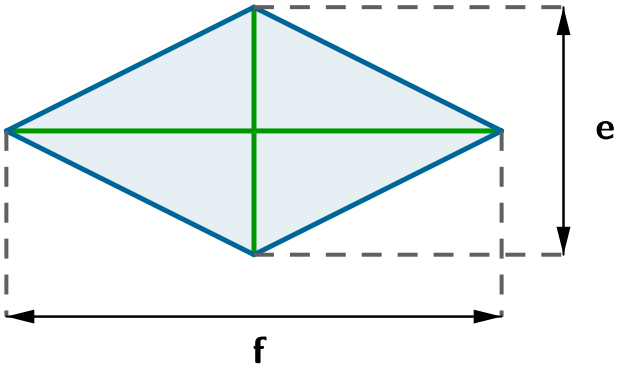

$$P = a \cdot h$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$P = a \cdot h$$

**Ważne!**

Pole rombu o przekątnych długości $p$ i $q$




$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$P = \frac{p \cdot q}{2}$$

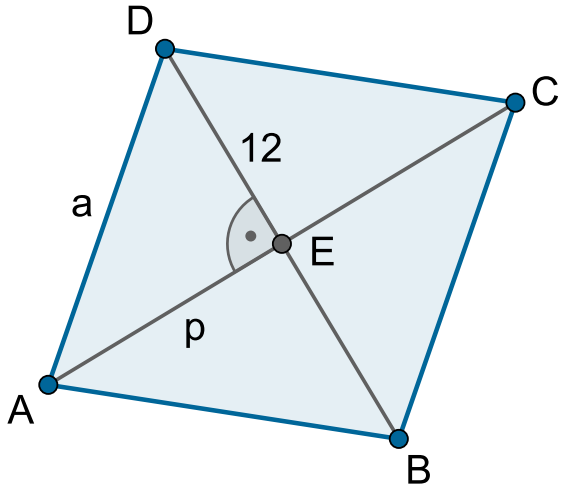
**Przykład 9**

Obwód rombu jest równy 148, a jedna z przekątnych rombu ma długość 24. Oblicz pole rombu.
Obliczamy długość $a$ boku rombu.

$$4a = 148$$

$$a = 37$$

Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym. Oznaczmy $E$ – punkt przecięcia przekątnych rombu, $A, B, C, D$ – wierzchołki rombu. Otrzymujemy trójkąt prostokątny AED, w którym jedna z przyprostokątnych ma długość $24 : 2 = 12$, a przeciwprostokątna ma długość 37.
Obliczamy długość $p$ drugiej przyprostokątnej, czyli połowę długości drugiej przekątnej rombu.
Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$p^2 + 12^2 = 37^2$$

$$p^2 = 1369 - 144$$
$$p^2 = 1225$$

$$p = \sqrt{1225} = 35$$

Obliczamy długość drugiej przyprostokątnej.

$$2p = 2 \cdot 35 = 70$$

Znając długości przekątnych rombu, obliczamy jego pole.

$$P = \frac{24 \cdot 70}{2}$$

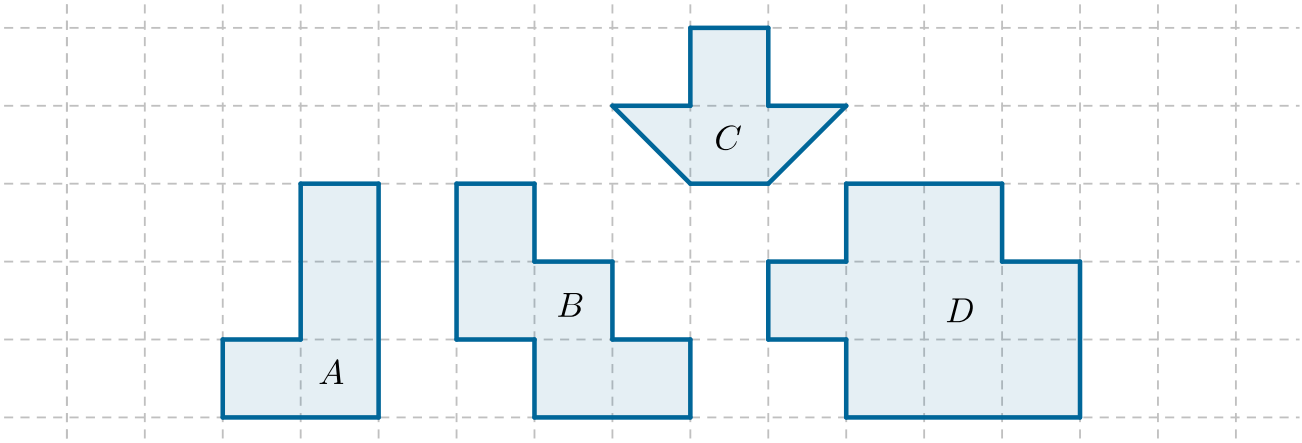
$$P = 840$$

Pole rombu jest równe 840.

Zadania

**Ćwiczenie 2**

Oblicz pola figur przedstawionych na rysunku.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przyjmij, że długość kratki na rysunku jest równa

1. $1\ \mathrm{cm}$
2. $2\ \mathrm{dm}$
3. $0{,}5\ \mathrm{m}$

**Ćwiczenie 3**

Boisko do gry w siatkówkę ma wymiary $18\ \mathrm{m}$ i $9\ \mathrm{m}$. Boisko to przedstawiono na planie wykonanym w skali $1\ :\ 30$. Wynika z tego, że pole tak otrzymanego prostokąta jest równe ... $m^2$

**Ćwiczenie 4**

Przekątne prostokąta mają długość $10\ \mathrm{cm}$ i przecinają się pod kątem $120^\circ$. Pole prostokąta jest równe . . . $cm^2$.

**Ćwiczenie 5**

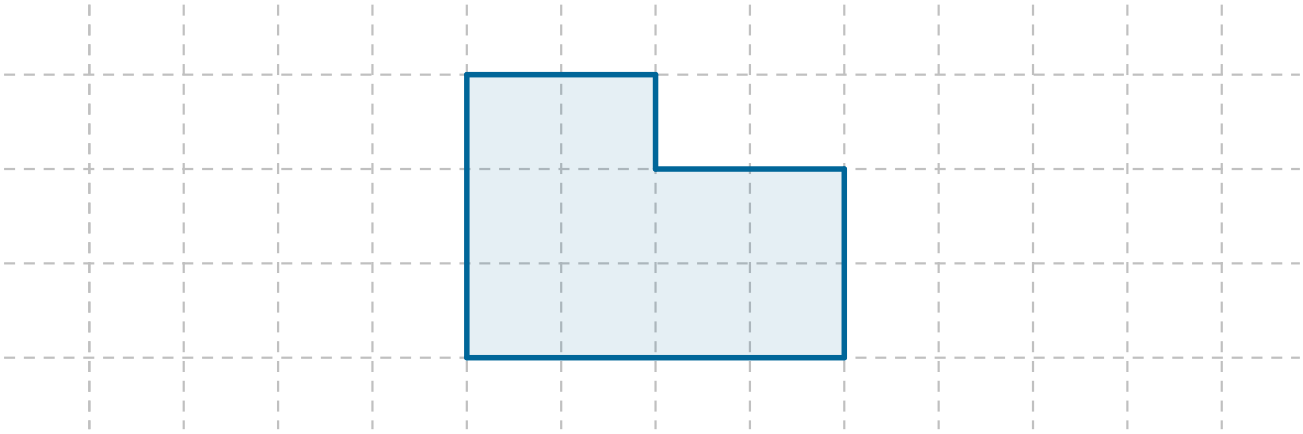
Stosunek długości boków prostokąta wynosi $3:4$. Obwód prostokąta jest równy $28\ \mathrm{cm}$. Oblicz pole prostokąta.

**Ćwiczenie 6**

Szerokość prostokąta stanowi $0{,}25$ jego długości. Pole prostokąta jest równe $6{,}25$. Oblicz obwód prostokąta.

**Ćwiczenie 7**

Figura na rysunku zbudowana jest z jednakowych kwadratów. Pole tej figury jest równe $2{,}5$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obwód figury jest więc równy

- $14$
- $7{,}5$
- $7$
- $3{,}5$

**Ćwiczenie 8**

Na środku kwadratowej podłogi w odległości $50\ \mathrm{cm}$ od każdej ze ścian leży kwadratowy dywan. Na planie wykonanym w skali $1:\ 200$ dywan ma wymiary $2\ \mathrm{cm}$ i $2\ \mathrm{cm}$. Jaki procent powierzchni podłogi zajmuje ten dywan?

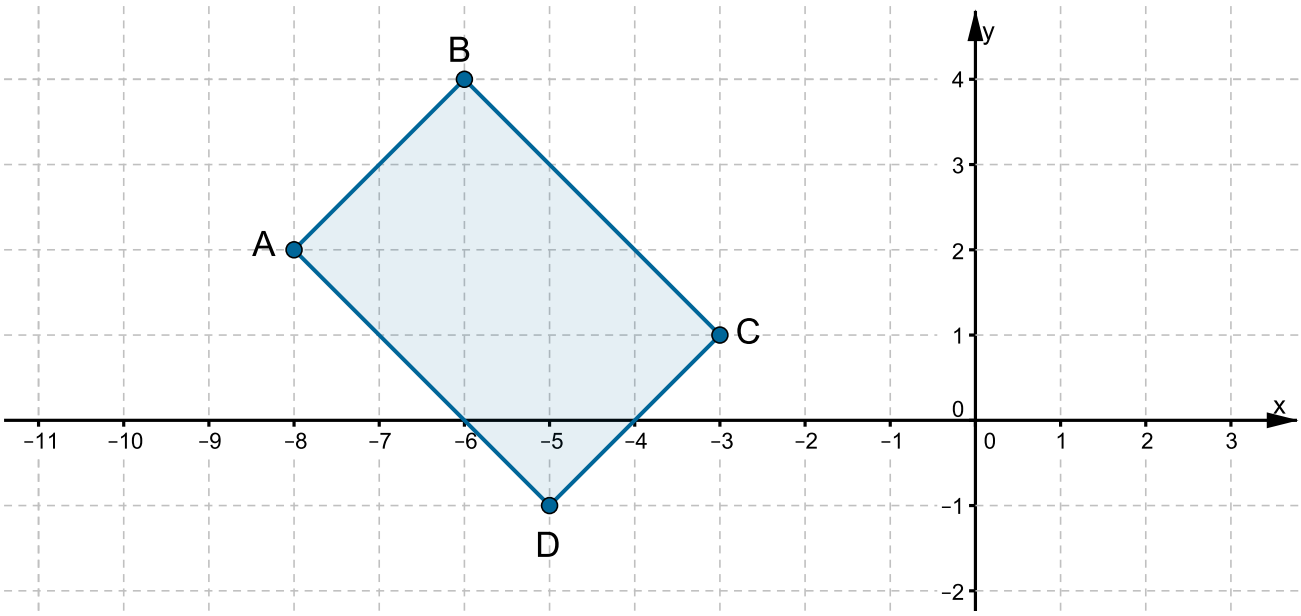
**Ćwiczenie 9**

Obwód kwadratu jest równy $6{,}4\ \mathrm{dm}$. Pole tego kwadratu przedstawionego w skali $3:1$ jest równe

- $19{,}2\ \mathrm{dm}^2$
- $7{,}68\ \mathrm{dm}^2$
- $23{,}04\ \mathrm{dm}^2$
- $2{,}56\ \mathrm{dm}^2$

**Ćwiczenie 10**

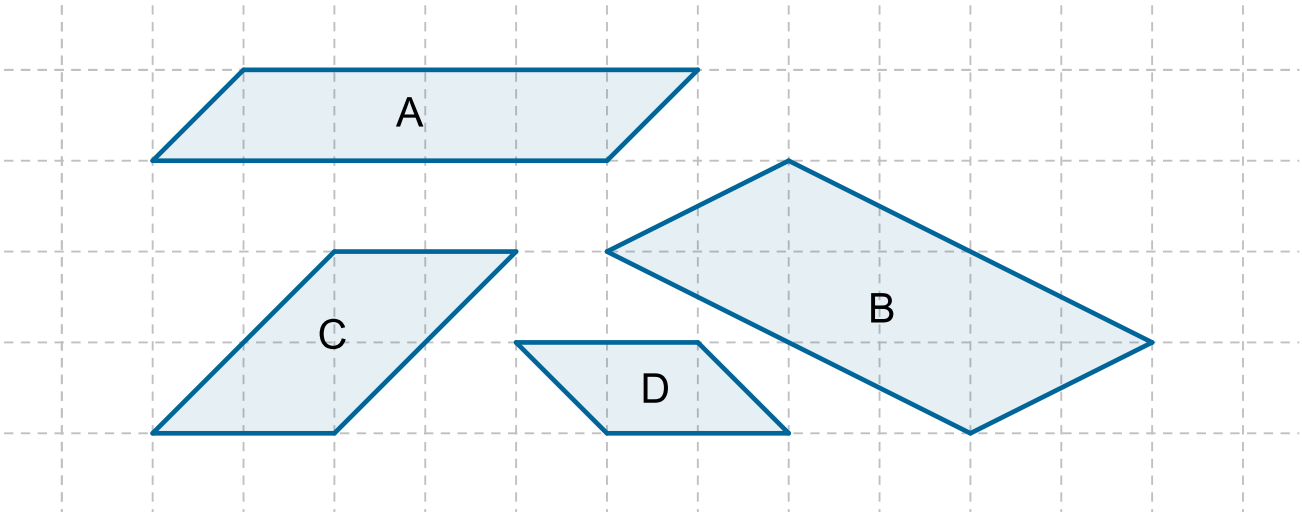
Oblicz pole prostokąta $ABCD$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 11**

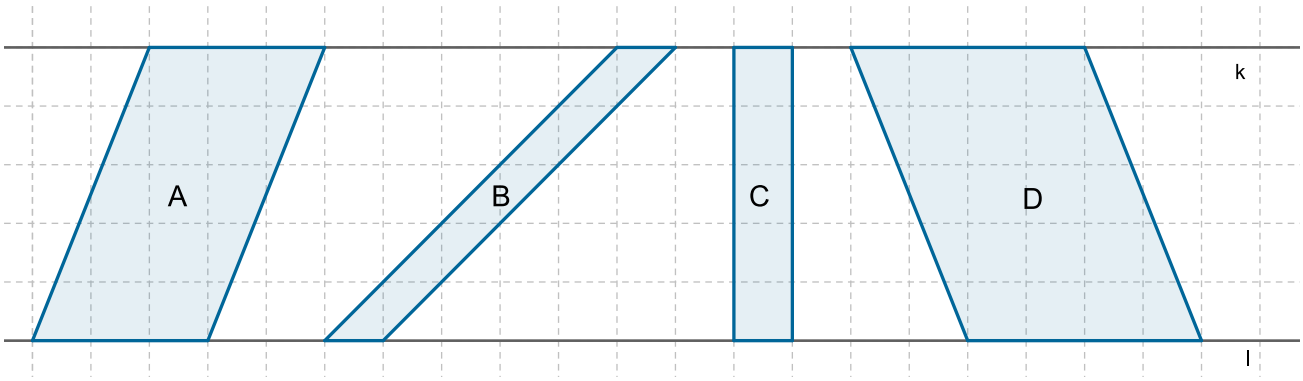
Oblicz pole każdego z równoległoboków przedstawionych na rysunku. Przyjmij za jednostkę pole jednej kratki.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 12**

Proste $k$ i $l$ są równoległe.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Za jednostkę pola przyjmij pole jednej kratki. Uzupełnij zdania.

1. Równoległobok o największym polu to ...
2. Pole największego z równoległoboków jest o ... większe od pola najmniejszego z równoległoboków.
3. Pole równoległoboku ... jest równe polu równoległoboku $B$.

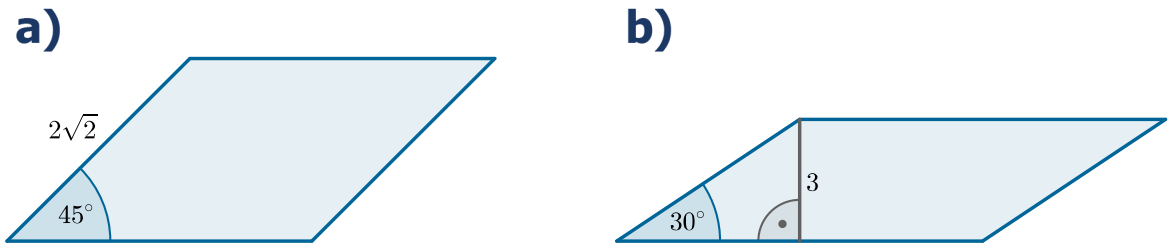
**Ćwiczenie 13**

Pole równoległoboku jest równe $24\ cm^2$.

1. Oblicz wysokość równoległoboku, wiedząc, że długość boku, do którego ta wysokość jest poprowadzona, wynosi $8\ \mathrm{cm}$.
2. Wysokość poprowadzona do dłuższego boku jest równa $2\ \mathrm{cm}$. Kąt ostry ma miarę $45^\circ$. Oblicz drugą wysokość równoległoboku.
3. Wysokość równoległoboku jest sześć razy większa od długości boku, do którego została poprowadzona. Oblicz wysokość.

**Ćwiczenie 14**

Pole równoległoboku przedstawionego na rysunku jest równe $12$. Oblicz obwód równoległoboku.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 15**

Pole rombu jest równe $720$. Jedna z przekątnych rombu ma długość $80$. Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ◯ Obwód rombu jest równy $164$.
- ◯ Druga przekątna rombu ma długość $20$.
- ◯ Obwód rombu wyraża się liczbą niewymierną.

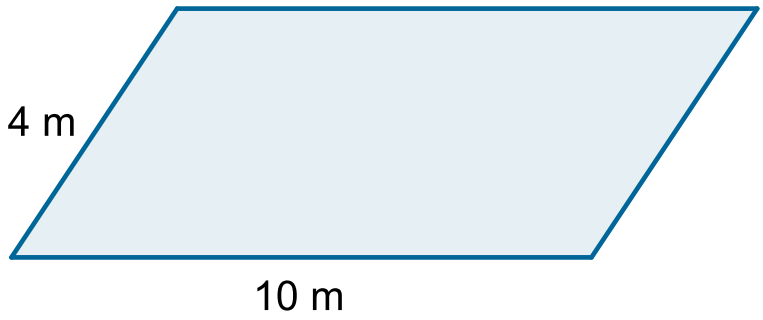
**Ćwiczenie 16**

Oblicz długość boku rombu, w którym

1. pole jest równe $840$, a jedna z przekątnych ma długość $40$
2. pole jest równe $2184$, a jedna z przekątnych ma długość $168$
3. pole jest równe $336$, a jedna z przekątnych ma długość $14$

**Ćwiczenie 17**

Rabatka ma kształt równoległoboku, takiego jak na rysunku.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wydzielono część rabatki w kształcie rombu największego z możliwych i takiego, którego boki są równoległe do boków równoległoboku. Na części w kształcie rombu posadzono fiołki, a na pozostałej części bratki. Jaki procent rabatki obsadzono bratkami?

**Ćwiczenie 18**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Jeśli dwa romby mają boki tej samej długości, to ich pola są równe.
- [ ] Jeśli dwa romby mają przekątne tej samej długości, to ich pola i długości boków są równe.
- [ ] Jeśli romb ma przekątne równej długości, to jest kwadratem.
- [ ] Każdy romb jest równoległobokiem.

**Ćwiczenie 19**

Każdy bok równoległoboku zwiększono o $10\%$. O ile procent zwiększy się jego pole?

- ◯ poniżej $30\%$
- ◯ poniżej $20\%$
- ◯ powyżej $30\%$
- ◯ o $10\%$

**Ćwiczenie 20**

Każdy bok prostokąta zwiększono $10\%$. O ile procent zwiększy się jego pole?

**Ćwiczenie 21**

Połączono środki boków prostokąta o wymiarach $4\ \mathrm{cm}$ na $8\ \mathrm{cm}$.

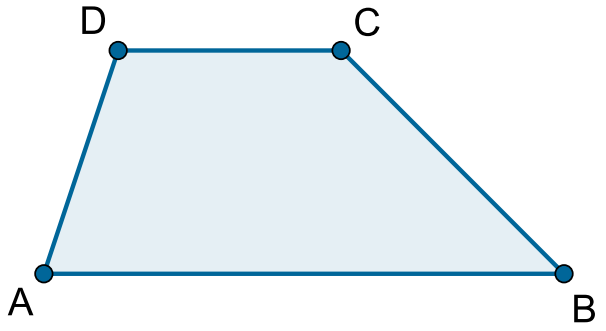
Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ☐ Pole otrzymanej figury jest równe $16\ cm^2$.
- ☐ Otrzymana figura to romb.

# Pole trapezu

**Już wiesz**

**Trapez** to czworokąt mający co najmniej jedną parę boków równoległych. Zatem trapezami są np. równoległoboki. Prostokąt to szczególny przykład trapezu prostokątnego, czyli takiego, w którym jest kąt prosty. Trapez równoramienny to trapez, w którym ramiona są równe i nierównoległe.
Wysokością w trapezie jest odległość między podstawami.




AB || CD

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 1**

Znajdź obraz trapezu $ABCD$ w symetrii względem środka boku $BC$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Ds3kOV1GQ

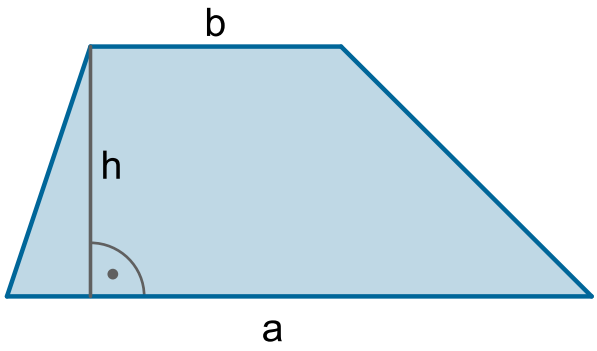
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Otrzymany trapez jest przystający do trapezu ABCD.
Jeśli podstawy trapezu ABCD mają długości $a$ oraz $b$, natomiast odległość między nimi jest równa $h$, to jakie jest pole otrzymanego równoległoboku?

**Zapamiętaj!**

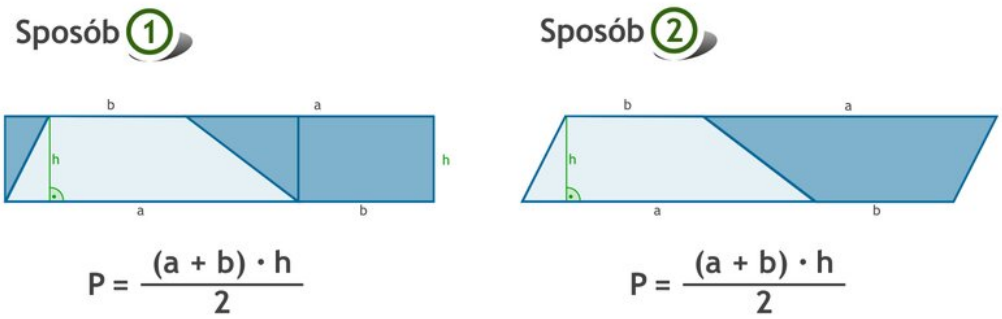
Pole trapezu o podstawach długości $a$ oraz $b$ i wysokości $h$ jest równe

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$




$$\mathbf{P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

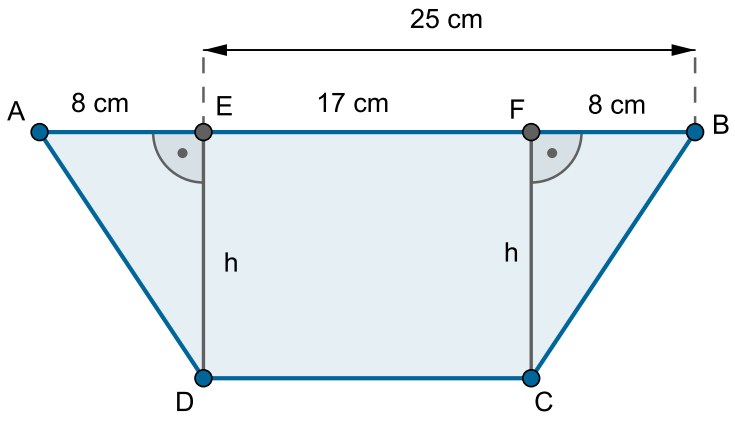
Animacja

---

# Obliczanie pola trapezu

**Przykład 2**

W trapezie równoramiennym ABCD wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli podstawę AB na odcinki: AE długości 8 cm i EB długości 25 $cm$ . Ramię jest równe krótszej podstawie. Oblicz pole trapezu.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Trapez jest równoramienny, zatem $|\mathrm{FB}| = |\mathrm{AE}| = 8$ cm. Wynika z tego, że

$$|\mathrm{DC}| = |\mathrm{FE}| = 25\ cm - 8\ \mathrm{cm} = 17\ \mathrm{cm}.$$

Długość ramienia $\mathrm{AD}$ jest równa krótszej podstawie, czyli wynosi $17$ cm. Wysokość $h$ trapezu obliczamy z trójkąta prostokątnego $\mathrm{AED}$, stosując twierdzenie Pitagorasa.

$$h^2 + |\mathrm{AE}|^2 = |\mathrm{AD}|^2$$

$$h^2 + 8^2 = 17^2$$

$$h^2 = 17^2 - 8^2$$

$$h^2 = 289 - 64$$

$$h^2 = 225$$

$$h = \sqrt{225}$$

$$h = 15$$

Obliczamy pole trapezu.

$$P = \frac{|\mathrm{AB}|+|\mathrm{CD}|}{2} \cdot h$$

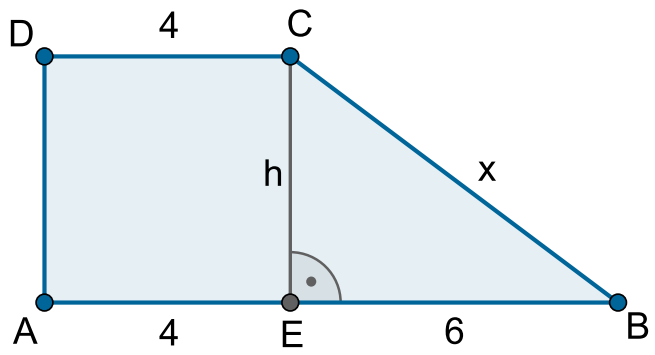
$$P = \frac{(8+25)+17}{2} \cdot 15$$

$$P = 375\ cm^2$$

Pole trapezu jest równe $375\ cm^2$.

**Przykład 3**

Podstawy trapezu prostokątnego $ABCD$ są równe $4$ i $10$. Pole trapezu jest równe $56$. Oblicz obwód trapezu.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczamy wysokość trapezu $h$, korzystając ze wzoru na pole trapezu.

$$P = \frac{4+10}{2} \cdot h$$

$$56 = 7h$$

$$h = 8$$

Trójkąt $CEB$ jest prostokątny. Obliczmy długość jego przeciwprostokątnej $x$ na podstawie twierdzenia Pitagorasa.

$$h^2 + 6^2 = x^2$$

$$8^2 + 36 = x^2$$

$$64 + 36 = x^2$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10$$

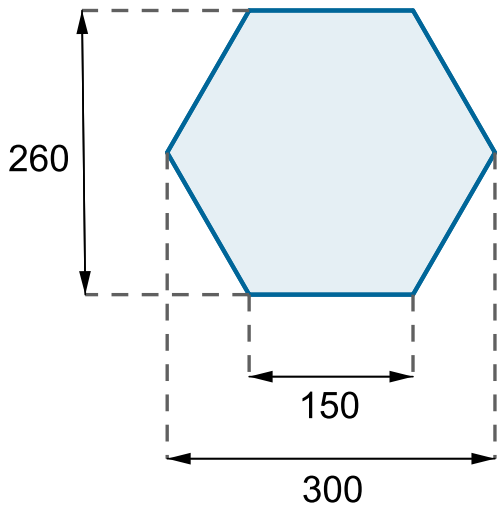
Zauważmy, że długość ramienia $AD$ jest równa wysokości. Obliczamy obwód trapezu.

$$L = 8 + 10 + 10 + 4 = 32$$

Obwód trapezu jest równy 32.

**Przykład 4**

Piaskownica ma kształt sześciokąta o wymiarach (w cm) podanych na rysunku. Oblicz w $m^2$ pole powierzchni zajmowane przez piaskownicę.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że sześciokąt, w kształcie którego jest piaskownica, możemy podzielić na dwa przystające trapezy o podstawach długości 300 cm i 150 cm oraz wysokości $\frac{260}{2}$ cm. Pole powierzchni piaskownicy jest więc równe sumie pól tych trapezów.

$$P = 2 \cdot \frac{300+150}{2} \cdot \frac{260}{2}$$

$$P = 450 \cdot 130$$

$$P = 58500 \text{ cm}^2$$

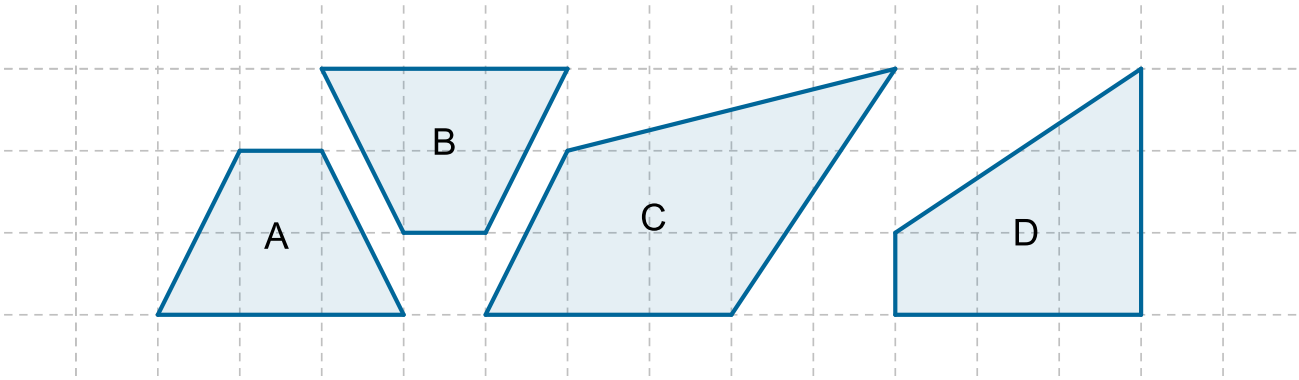
Zapisujemy pole powierzchni piaskownicy w $m^2$, pamiętając, że $1 \text{ cm}^2 = 0{,}0001 \text{ m}^2$.

$$58500 \text{ cm}^2 = 5{,}85 \text{ m}^2$$

Pole powierzchni piaskownicy jest równe $5{,}85 \text{ m}^2$.

## Ćwiczenie 1

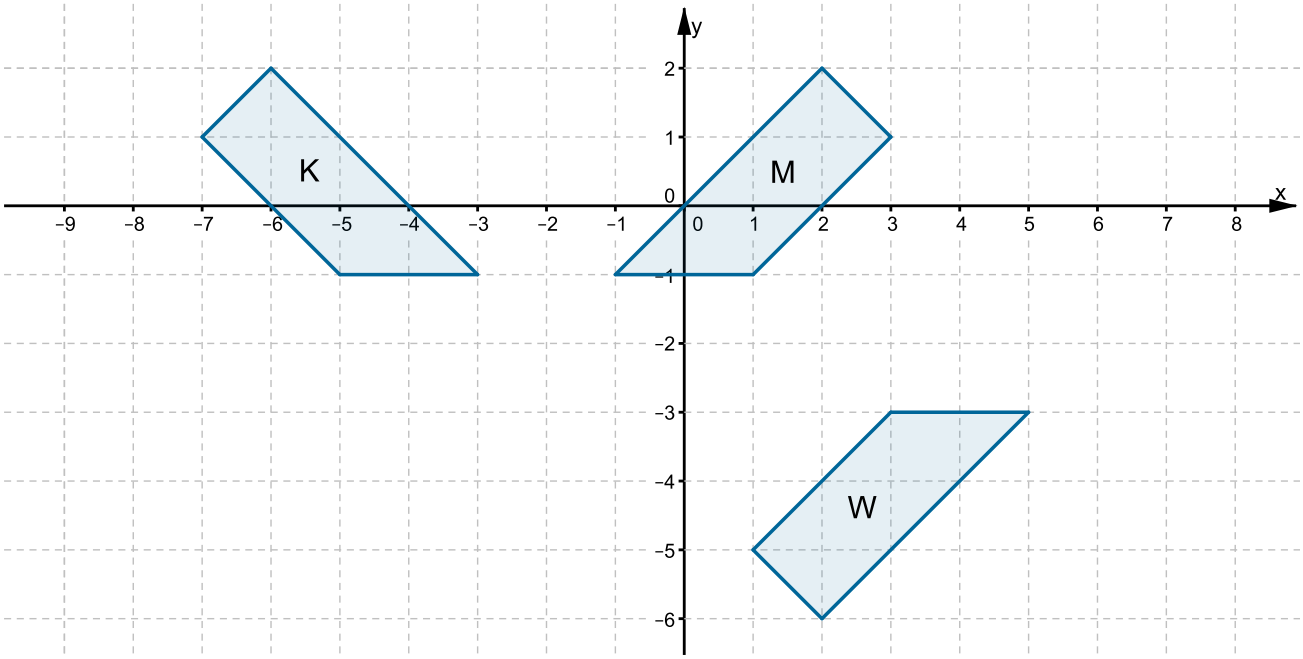
Oblicz pole każdej z figur, przyjmując za jednostkę pole jednej kratki. Uporządkuj otrzymane pola od największego do najmniejszego.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 2

Wykaż, że pola wielokątów $K$,$M$, $W$ są równe.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

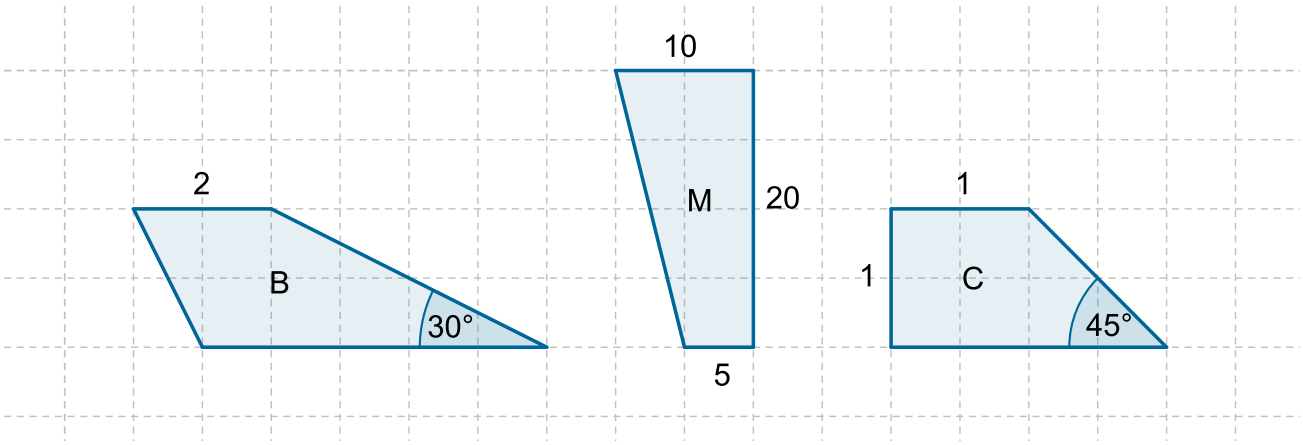
**Ćwiczenie 3**

Wysokość trapezu jest równa $10\ \mathrm{cm}$. Oblicz pole trapezu, wiedząc, że

1. suma długości jego podstaw jest równa $7\ \mathrm{dm}$
2. jedna z podstaw trapezu jest trzykrotnie dłuższa od drugiej, a krótsza podstawa ma długość $9\ \mathrm{cm}$
3. jego przekątne są równe i przecinają się w połowie pod kątem prostym
4. kąt ostry ma miarę $45^\circ$, a krótsza podstawa ma długość $25\ \mathrm{mm}$

**Ćwiczenie 4**

Oblicz pole każdego z trapezów: $B,\ \mathrm{M},\ \mathrm{W}$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 5**

Oblicz pole trapezu, którego każdy z trzech boków jest równy $10\ \mathrm{cm}$, a czwarty bok ma długość $26\ \mathrm{cm}$.

**Ćwiczenie 6**

Wysokość trapezu równoramiennego jest równa krótszej podstawie. Dłuższa podstawa jest trzykrotnie większa od krótszej. Pole trapezu jest równe $200$. Oblicz jego obwód.

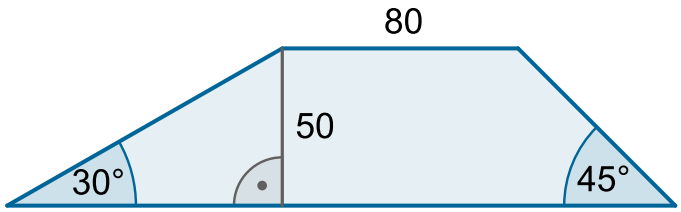
**Ćwiczenie 7**

Pole trapezu jest równe $40$. Oblicz

1. wysokość $h$ trapezu, wiedząc, że suma długości jego podstaw jest równa $80$
2. długość jednej z podstaw, jeżeli długość drugiej jest równa $8$, a wysokość wynosi $0{,}5$

**Ćwiczenie 8**

Ile arów powierzchni ma działka pani Bożeny?




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 9**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Dwa trapezy równoramienne mające wysokości oraz ramiona tej samej długości mają równe pola.
- [ ] Wysokość trapezu może być jego bokiem.
- [ ] Trapezy przystające mają równe pola.
- [ ] Dwa trapezy mające podstawy tej samej długości mają równe pola.

**Ćwiczenie 10**

Udowodnij, że pole trapezu równoramiennego jest równe polu pewnego prostokąta.

**Ćwiczenie 11**

Dokończ zdania.

1. Jeśli trapez ma podstawy równej długości, to jest ...
2. Jeśli dokładnie trzy boki trapezu są równe, to trapez jest ...

**Ćwiczenie 12**

Pole trapezu przedstawionego na rysunku wynosi

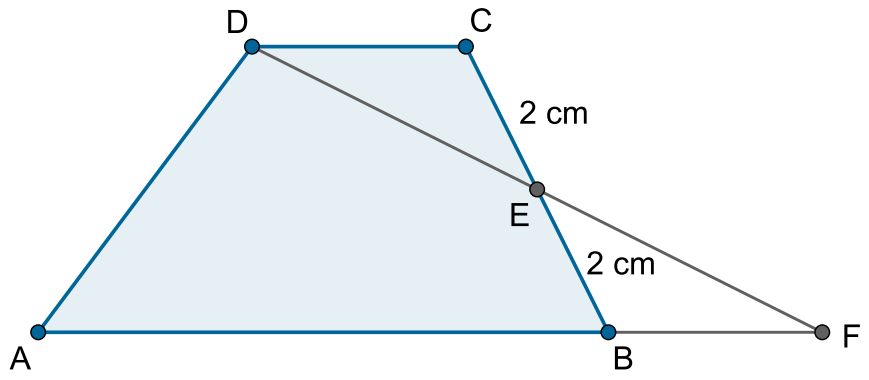
Rysunek trapezu prostokątnego o górnej podstawie długości 6 cm, wysokości 2 cm i kącie 45 stopni leżącym przy dolnej podstawie.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- ◯ $14\ \mathrm{cm}^2$
- ◯ $30\ \mathrm{cm}^2$
- ◯ $26\ \mathrm{cm}^2$
- ◯ $12\ \mathrm{cm}^2$

**Ćwiczenie 13**

Wykaż, że pole trapezu $\mathrm{ABCD}$ jest równe polu trójkąta $\mathrm{ADF}$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 14**

Pole pewnego czworokąta to iloczyn długości sąsiednich boków. Czworokątem tym może być

- [ ] równoległobok
- [ ] trapez
- [ ] kwadrat

**Ćwiczenie 15**

Obraz ma wymiary $2{,}2\ \mathrm{m}$ i $2{,}2\ \mathrm{m}$. Drzwi mają wymiary $1m$ i $2\ \mathrm{m}$. Czy obraz można przenieść przez drzwi?

**Ćwiczenie 16**

Oblicz pole trapezu równoramiennego, w którym ramię ma długość $10$, a krótsza podstawa $8$. Wysokość trapezu jest równa długości krótszej podstawy.

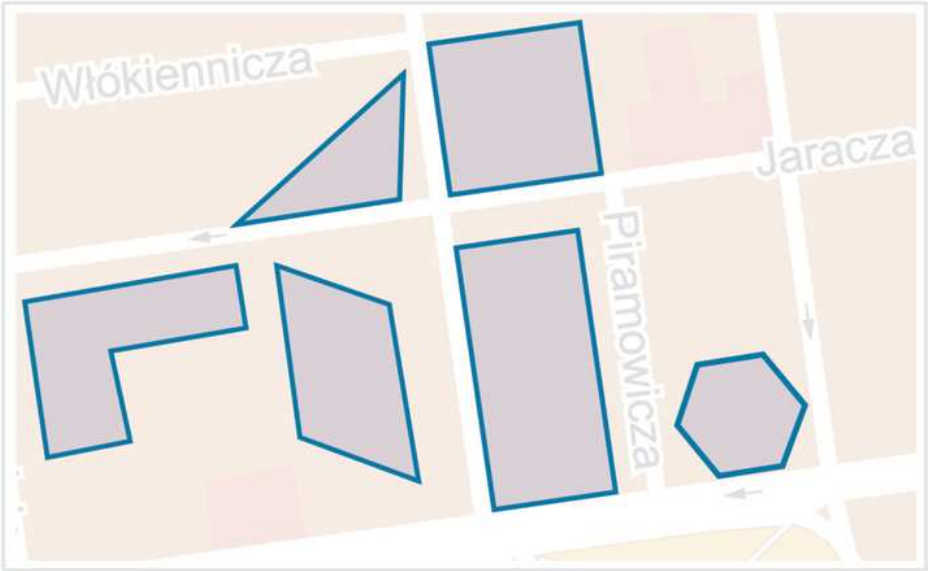
**Ćwiczenie 17**

Przekątne trapezu równoramiennego przecinają się pod kątem $120^\circ$ i dzielą kąty przy dłuższej podstawie na połowy. Dłuższa podstawa ma długość $12$. Oblicz pole trapezu.

**Ćwiczenie 18**

Pole trapezu jest równe $8$. Oblicz wysokość tego trapezu, jeśli wiadomo, że jest ona równa sumie długości podstaw trapezu.

# Pole wielokąta




Wielokąty

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

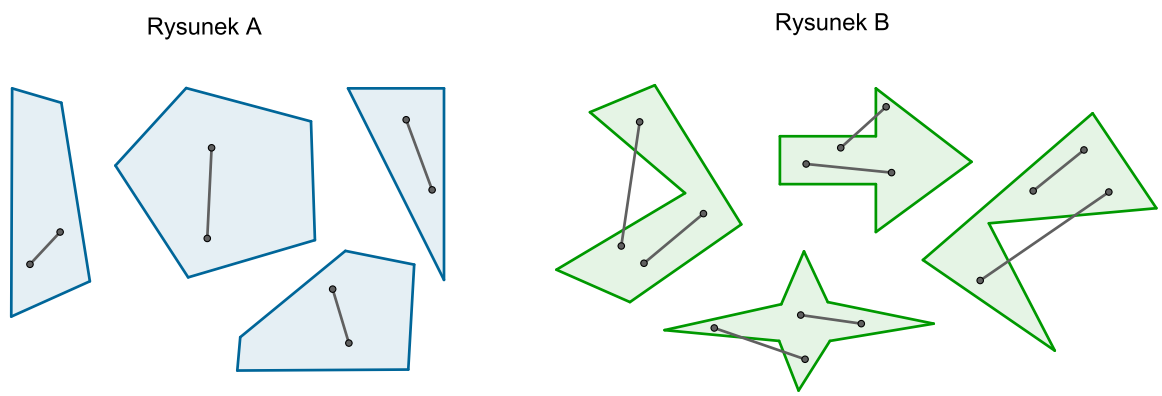
# Wielokąty wypukłe i wklęsłe

**Twierdzenie: Wielokąt wklęsły**

Wielokąt jest **wklęsły**, jeżeli co najmniej jeden z jego kątów ma miarę większą od $180^\circ$. Wielokąt, który nie jest wklęsły, to **wielokąt wypukły**.

**Przykład 1**

Rysunek $A$ przedstawia kilka wielokątów wypukłych, a rysunek $B$ kilka wielokątów wklęsłych. Co zauważasz?




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

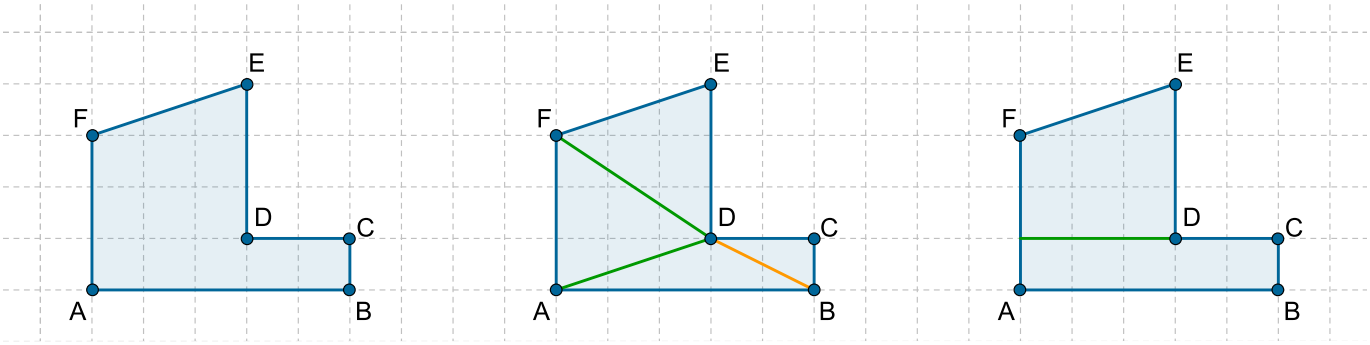
**Definicja: Wielokąt wypukły**

Jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty w wielokącie jest całkowicie w nim zawarty, to taki wielokąt nazywamy wypukłym.

Trapezoid to czworokąt, w którym nie ma żadnej pary boków równoległych. Czworokąty wypukłe to trapezy albo trapezoidy.

# Obliczanie pól wielokątów

Wiemy już, że każdy wielokąt, zarówno wypukły, jak i wklęsły, można podzielić na skończoną liczbę trójkątów. Pole wielokąta jest równe sumie pól trójkątów. Jednak nie zawsze łatwe jest wyznaczenie tych pól. W praktyce dzielimy więc wielokąt na takie figury, których pola łatwo wyznaczyć, przy tym staramy się, aby tych figur było jak najmniej.




wielokąt ABCDEF

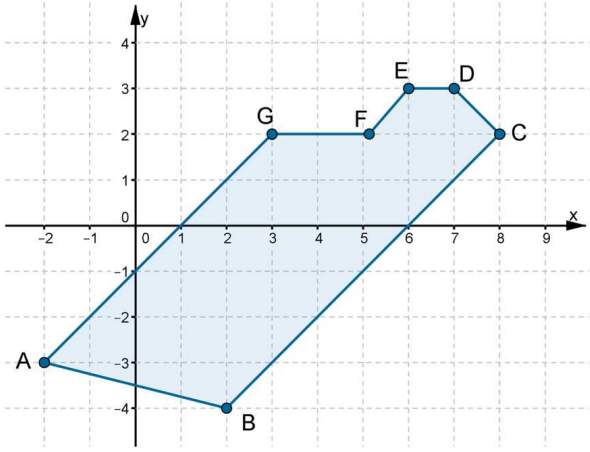
podział wielokąta ABCDEF na trójkąty

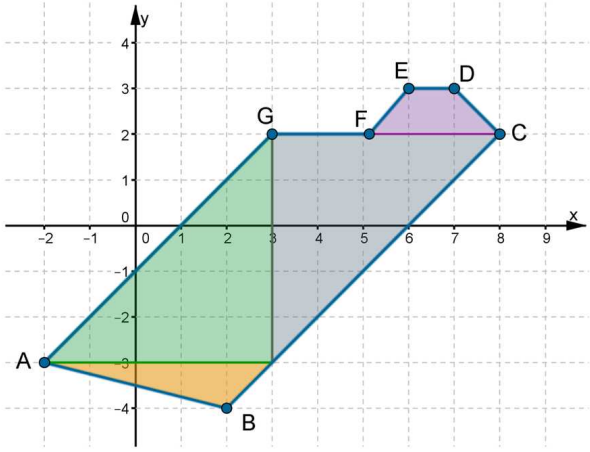
podział wielokąta ABCDEF na trapez i prostokąt

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 2**

Jak obliczyć pole wielokąta $\mathrm{ABCDEFG}$, gdzie
$A = (-2, -3),\ \mathrm{B} = (2, -4),\ \mathrm{C} = (8{,}2),\ \mathrm{D} = (7{,}3),\ \mathrm{E} = (6{,}3),\ \mathrm{F} = (5{,}2),\ \mathrm{G} = ($
?




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznaczamy wielokąt $\mathrm{ABCDEFG}$ w układzie współrzędnych. Dzielimy go na trapez oraz trójkąty i obliczamy pola tych figur.

# Pole sześciokąta foremnego

**Twierdzenie: Pole sześciokąta foremnego**

Pole sześciokąta foremnego o boku długości $a$ jest równe

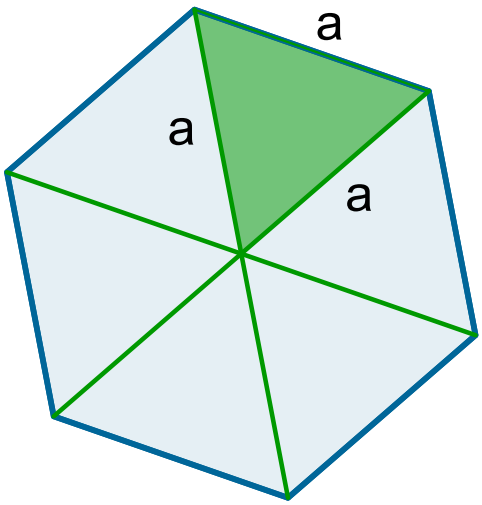
$$P = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

**Dowód**

Sześciokąt foremny, którego bok ma długość $a$, można podzielić na $6$ przystających trójkątów równobocznych. Długość boku takiego trójkąta jest

równa $a$, zatem jego pole to $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
Pole sześciokąta foremnego jest sześciokrotnie większe od pola trójkąta, zatem

$$P = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 3**

Oblicz obwód sześciokąta foremnego o polu $24\sqrt{3}\ \mathrm{d}m^2$.
Obliczamy długość boku $a$ sześciokąta.

$$\frac{3}{2}\sqrt{3}a^2 = 24\sqrt{3}\ /:\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$a^2 = \frac{48}{3}$$

$$a^2 = 16$$

$$a = 4,$$

bo $a > 0$.
Obliczamy obwód sześciokąta.

$$L = 6a = 6 \cdot 4$$

$$L = 24\ \mathrm{dm}$$

Obwód sześciokąta jest równy $24\ \mathrm{dm}$.

**Przykład 4**

Obliczymy długość krótszej przekątnej sześciokąta foremnego ABCDEF o boku długości $a$.






Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D3rUikMMH

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Sześciokąt ABCDEF można podzielić na trzy przystające sześciokąty foremne. Obliczymy długość $b$ boku każdego z mniejszych sześciokątów.

$$3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 / : \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$3b^2 = a^2$$

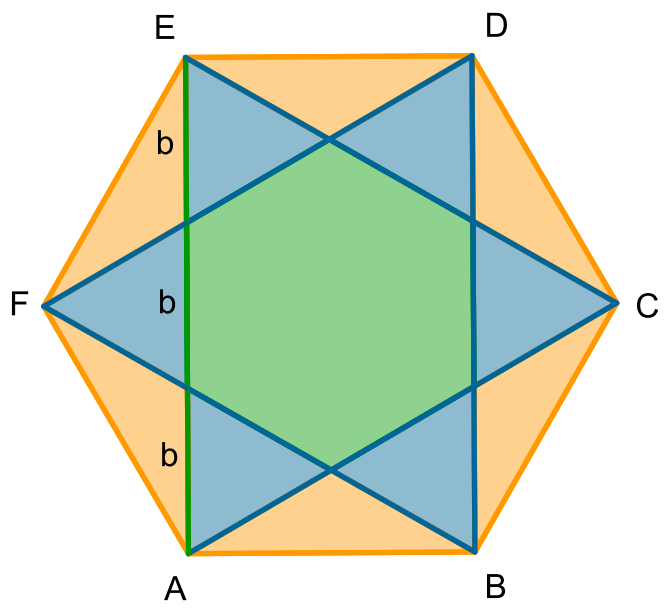
$$b^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$b = \sqrt{\frac{a^2}{3}}$$

$$b = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

bo $a > 0$ i $b > 0$

Krótsza przekątna sześciokąta AE jest 3 razy dłuższa od $b$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$|\mathrm{AE}| = 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{3}$$

Krótsza przekątna sześciokąta foremnego o boku długości $a$ jest równa $a\sqrt{3}$.

**Ćwiczenie 1**

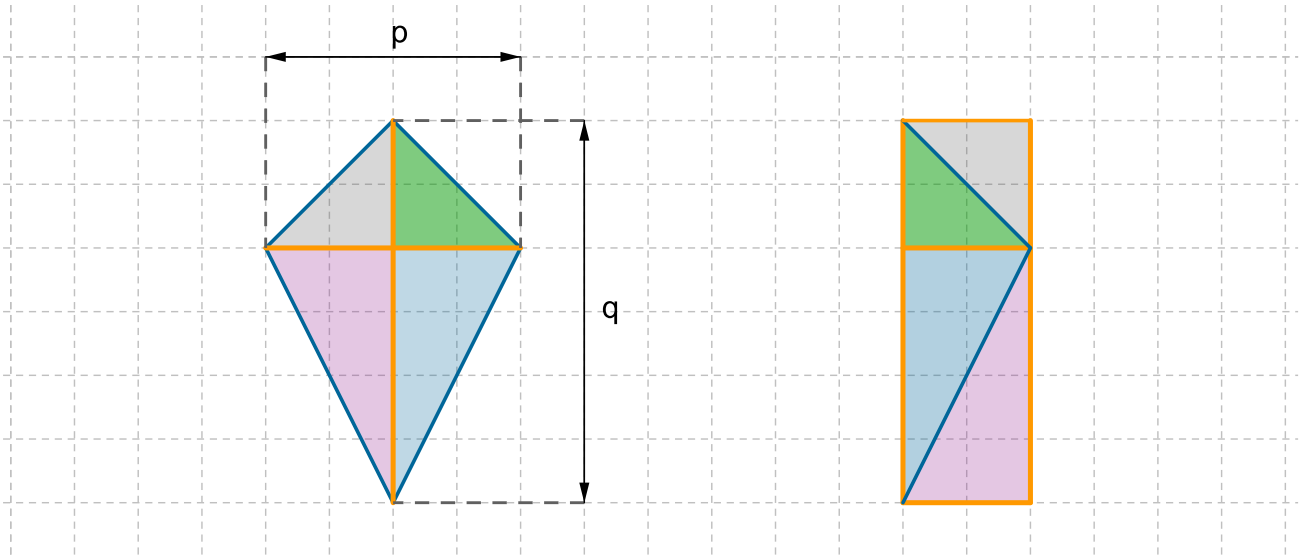
Oblicz długość krótszej przekątnej sześciokąta foremnego o boku długości $a$.
Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa.

# Pole deltoidu

**Deltoid** jest czworokątem, którego przekątne są prostopadłe i jedna z nich jest zawarta w osi symetrii deltoidu.

**Przykład 5**

Wykażemy, że pole deltoidu można obliczyć podobnie jak pole rombu.
Rozważmy deltoid o przekątnych długości $p$ i $q$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że deltoid można przekształcić w prostokąt o bokach długości $\frac{p}{2}$ i $q$. Pole tego prostokąta, jak również pole deltoidu, jest równe $q \cdot \frac{p}{2}$.

**Ważne!**

**Pole deltoidu** o przekątnych długości $p$ i $q$ jest równe

$$P = \frac{p \cdot q}{2}$$




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D3rUikMMH

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D3rUikMMH

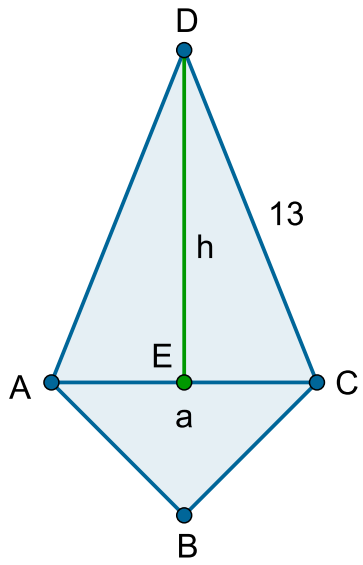
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ćwiczenie 2**

Oblicz pole deltoidu o przekątnych długości $0{,}4\ \mathrm{m}$ i $5\ \mathrm{m}$.

**Przykład 6**

Krótsza przekątna dzieli deltoid na trójkąt równoboczny o polu $25\sqrt{3}$ i trójkąt równoramienny o boku długości $13$. Oblicz pole deltoidu.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy wierzchołki deltoidu $A, B, C, D$. Trójkąt $\mathrm{ABC}$ jest równoboczny i jego pole jest równe $25\sqrt{3}$.
Obliczamy długość boku tego trójkąta.

$$\frac{\sqrt{3}}{4}|\mathrm{AC}|^2 = 25\sqrt{3}$$

$$|\mathrm{AC}|^2 = 100$$

$$|\mathrm{AC}| = 10$$

Stąd

$$|\mathrm{EC}| = \frac{|\mathrm{AC}|}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Z trójkąta prostokątnego $\mathrm{DEC}$, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy długość boku $\mathrm{DE}$.

$$|\mathrm{DE}|^2 + |\mathrm{EC}|^2 = |\mathrm{DC}|^2$$

$$|\mathrm{DE}|^2 + 5^2 = 13^2$$

$$|\mathrm{DE}|^2 = 169 - 25$$

$$|\mathrm{DE}|^2 = 144$$

$$|\mathrm{DE}| = 12$$

Obliczamy pole deltoidu jako sumę pól trójkątów $\mathrm{ABC}$ i $\mathrm{ACD}$.

$$P = P_{\mathrm{ABC}} + P_{\mathrm{ACD}}$$

$$P = 25\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}|\mathrm{AC}| \cdot |\mathrm{DE}|$$

$$P = 25\sqrt{3} + \tfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12$$

$$P = 25\sqrt{3} + 60$$

Pole deltoidu jest równe $25\sqrt{3} + 60$.

# Twierdzenie Picka

Matematyk Aleksander George Pick $(1859 - 1943)$, pracujący na uniwersytetach w Wiedniu, Pradze i Dreźnie, odkrył metodę, która pozwala na obliczenie pola wielokąta bez wykorzystania znanych nam wzorów i bez podziału wielokąta na trójkąty (lub inne wielokąty).
Zauważył on, że jeśli umieścić wielokąt na kratkowanej planszy w taki sposób, że jego wierzchołki leżą w punktach kratowych (czyli na przecięciu linii tworzących kratki), to jego pole jest zależne tylko od liczby punktów kratowych, które leżą wewnątrz i na brzegu wielokąta.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem [https://zpe.gov.pl/a/D3rUikMMH](https://zpe.gov.pl/a/D3rUikMMH)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

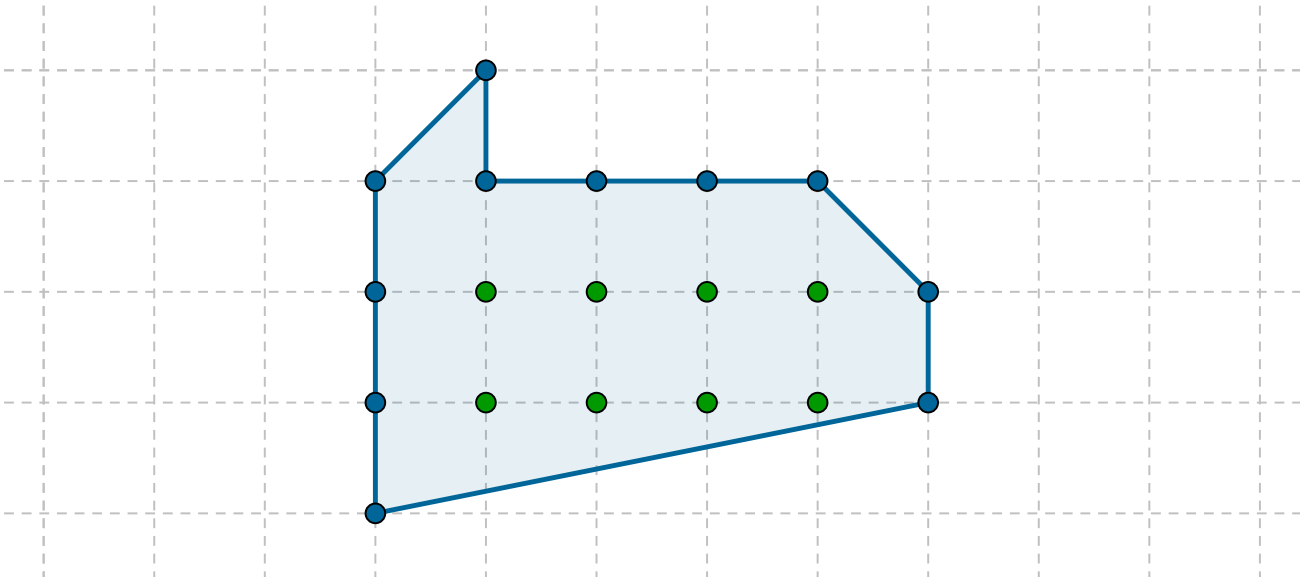
Na rysunku przedstawione są trzy wielokąty, których pola są równe. Punkty kratowe leżące na brzegach wielokątów zaznaczone są kolorem niebieskim, a we wnętrzu – czerwonym.

**Ćwiczenie 3**

Zmieniaj położenie wierzchołków wielokąta. Obliczaj w każdym przypadku pole wielokąta i porównuj otrzymany przez ciebie wynik z wynikiem zapisanym na ekranie.

**Ćwiczenie 4**

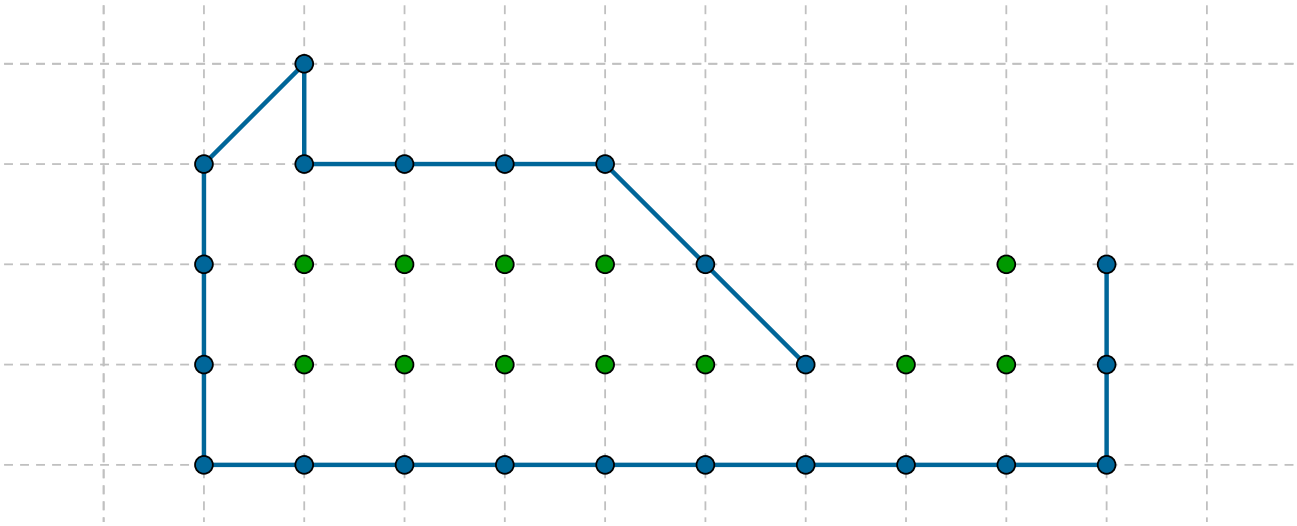
Wyznacz pole wielokąta, korzystając ze wzoru Picka.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 5**

Bronek nie dokończył rysunku wielokąta $W$. Dokończ rysunek, wiedząc, że pole wielokąta jest równe $22{,}5$, a każdy z brakujących wierzchołków leży w jednym z punktów zaznaczonych na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 6**

Dokończ zdanie.

Jeśli wielokąt ma wszystkie boki równej długości oraz wszystkie kąty równe, to jest to wielokąt . . . .

**Ćwiczenie 7**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Z każdych czterech odcinków można zbudować czworokąt.
- [ ] Istnieje wielokąt, który nie ma przekątnych.
- [ ] Pięciokąt foremny może mieć pole równe polu sześciokąta foremnego.
- [ ] Wielokąt wklęsły nie ma przekątnych.

**Ćwiczenie 8**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Czworokąt foremny jest kwadratem.
- [ ] Jeżeli czworokąt jest wklęsły, to jedna jego przekątna leży wewnątrz tego czworokąta, a druga leży poza czworokątem.
- [ ] Każdy prostokąt jest trapezem.
- [ ] Niektóre deltoidy są kwadratami.
- [ ] Jeżeli czworokąt jest wypukły, to obie jego przekątne leżą wewnątrz tego czworokąta.
- [ ] Każdy bok wielokąta musi mieć długość mniejszą niż suma długości boków pozostałych.

**Ćwiczenie 9**

Udowodnij, że jeśli przekątne czworokąta są prostopadłe, to niezależnie od jego kształtu pole czworokąta jest równe połowie iloczynu długości przekątnych.

**Ćwiczenie 10**

Uporządkuj rosnąco liczby $P_{1,}P_2$, $P_3$, gdzie $P_1$ jest polem sześciokąta, którego bok ma długość $0{,}5$. $P_2$ jest polem rombu, którego przekątna ma długość $1$, a bok ma długość $2$. Natomiast $P_3$ jest polem deltoidu o przekątnych długości $\sqrt{3}$.

**Ćwiczenie 11**

Oszacuj, ile $m^2$ szkła potrzeba na wykonanie dwóch witraży, z których jeden ma kształt sześciokąta foremnego o boku długości $0{,}5\ \mathrm{m}$, a drugi deltoidu o przekątnych długości $2\ \sqrt{3}$.

**Ćwiczenie 12**

Odcinki długości $6\ \mathrm{cm}$ oraz $8\ \mathrm{cm}$ są przekątnymi deltoidu. Ile takich deltoidów możesz narysować?

**Ćwiczenie 13**

Odcinki długości $6\ \mathrm{cm}$ oraz $8\ \mathrm{cm}$ są przekątnymi rombu. Ile takich rombów możesz narysować?

**Ćwiczenie 14**

1. Wielokąt foremny o $4$ bokach podzielono na trójkąty przekątnymi poprowadzonymi z jednego wierzchołka. Ile jest tych trójkątów?
2. Wielokąt foremny o $5$ bokach podzielono na trójkąty przekątnymi poprowadzonymi z jednego wierzchołka. Ile jest tych trójkątów?

**Ćwiczenie 15**

Wielokąt foremny o $n$ bokach podzielono na trójkąty, przekątnymi poprowadzonymi z jednego wierzchołka.

1. Ile jest tych trójkątów?
2. Ile wynosi suma miar wszystkich kątów tych trójkątów?
3. Ile wynosi miara kąta w tym wielokącie?

**Ćwiczenie 16**

Punkt $O$ jest punktem wewnętrznym ośmiokąta foremnego. Leży on w odległości $10$ od każdego z wierzchołków. Oblicz pole ośmiokąta.

**Ćwiczenie 17**

Każdy z boków trójkąta równobocznego podzielono na trzy równe części. Połączono punkty podziału i otrzymano sześciokąt foremny. Oblicz pole tego sześciokąta, jeżeli bok trójkąta ma długość $a$.

**Ćwiczenie 18**

Bok kwadratu ma długość $a$. Każdy z boków tego kwadratu podzielono na trzy równe części. Połączono punkty podziału i otrzymano ośmiokąt. Oblicz pole tego ośmiokąta.

# Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

**Definicja: Równanie**

Równaniem nazywamy równość dwóch wyrażeń algebraicznych, przy czym przynajmniej w jednym z tych wyrażeń występuje co najmniej jedna zmienna, zwana niewiadomą.
Na przykład:

$$3\text{xy} = 5, 3x + t^2 = 10$$

**Ważne!**

- **Równania równoważne** są to takie równania, które posiadają taki sam zbiór rozwiązań.
- **Rozwiązać równanie** to znaleźć zbiór wszystkich rozwiązań tego równania lub stwierdzić, że równanie nie ma rozwiązań. W tym celu zapisujemy równania równoważne danemu, pamiętając o tym, że

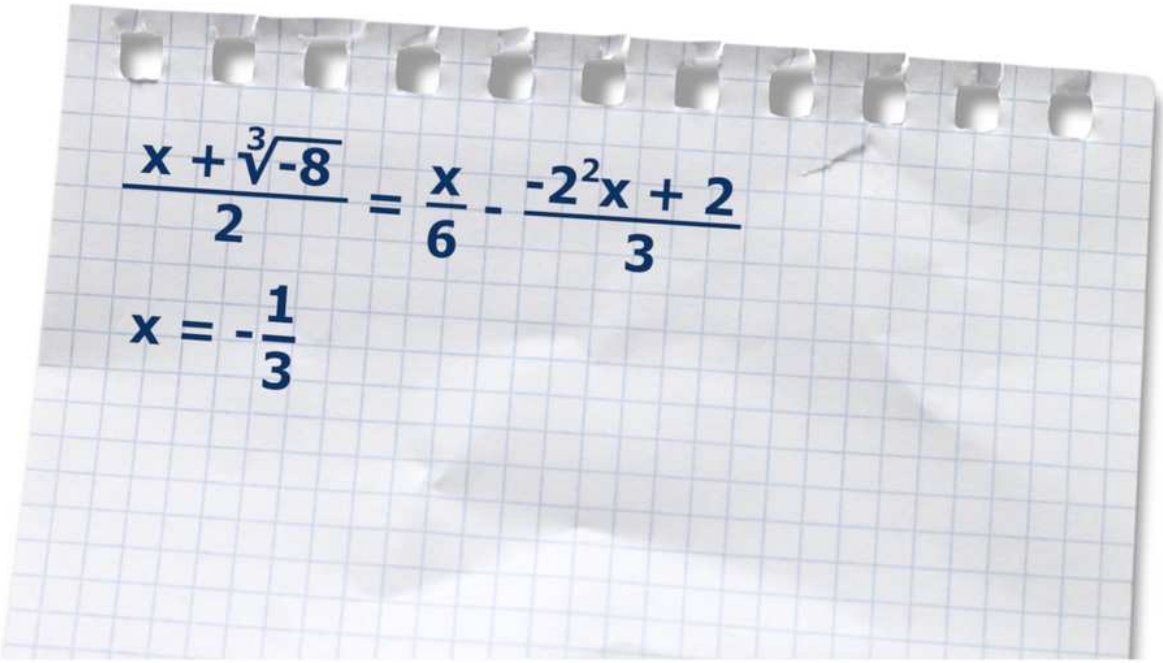
1. do obu stron równania możemy dodać tę samą liczbę lub wyrażenie algebraiczne,
2. obie strony równania możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Przykład 1**




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą może

- nie mieć żadnej liczby, która spełnia to równanie – nazywamy je sprzecznym
- mieć dokładnie jedną liczbę spełniającą to równanie – mówimy, że równanie to ma jeden pierwiastek
- mieć nieskończenie wiele liczb spełniających to równanie – nazywamy je tożsamościowym

**Ćwiczenie 1**

Połącz w pary równania z ich rozwiązaniami.

| | |
|---|---|
| $-5x = \sqrt{4}x$ | $16$ |
| $\frac{1}{6}\left(x+2\right) - 2 = 7^0$ | $12$ |
| $x - \sqrt{16} = \frac{1}{2}x + 2$ | $1\frac{1}{3}$ |
| $2x + 2 = \sqrt{9}x - 8$ | $0$ |
| $\sqrt[3]{8}x + 6 = 10 - x$ | $10$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 2

Połącz w pary równania z ich rozwiązaniami.

| | |
|---|---|
| $-3^2x+1=-\left(-\sqrt[3]{-1}\right)-3x$ | brak rozwiązań |
| $4-x=4$ | $3$ |
| $(-2)^2x+1=2x-5^0$ | $27$ |
| $x+3^3=\sqrt[3]{8}x$ | $0$ |
| $2^2-x=-1^2x+1$ | $\frac{1}{3}$ |
| $2x-\sqrt{4}=4$ | $-1$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 3

Wstaw w miejsce kropek taką liczbę, aby równania były równoważne.

1. $4x-1=8$ i $2x=$ ...
2. $x-1=2$ i $x-4=\ldots$
3. $2x+5=3$ i $4x+$...$=2$
4. $3-1x=2x$ i $5x-\ldots=-2$

## Ćwiczenie 4

Dopisz drugą stronę równania $2x+3=2+\ldots$ tak, aby otrzymać równanie równoważne danemu

1. $3x-1=2x$
2. $2x=\sqrt{3}$
3. $-2^2x=1-2x$
4. $\sqrt{5}-x=2$

## Ćwiczenie 5

Przeciągnij i upuść wyrażenia tak, aby równania były sprzeczne.

a) $3x = 3x +$ ____

b) $2x - 3 = 2 -$ ____

c) $2x + \sqrt{3} = x +$ ____

d) $2 - 3x = 1 +$ ____

$-2x$ | $x + \sqrt{2}$ | $x + \sqrt{3}$ | $-3x + 1$ | $\sqrt[3]{2}$ | $-x$ | $-3x$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6

Dopisz drugą stronę równania tak, aby równanie było tożsamościowe.

1. $2x - \sqrt[3]{6} = x + \ldots$
2. $3x - 5 = 1 + \ldots$
3. $\sqrt{5} - 3x = 2x + \ldots$
4. $-1 + \sqrt{2}x = -4 + \ldots$

**Ćwiczenie 7**

Dany jest pięciokąt $\mathrm{ABCDE}$.

Rysunek pięciokąta A B C D E o bokach długości: AB =2x, BC =x -2, CD =3x, DE =dwie trzecie x, EA =x. Obwód wielokąta równy 67.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozstrzygnij, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

- [ ] Bok $\mathrm{AB}$ jest $3$ razy dłuższy od boku $\mathrm{DE}$.
- [ ] Suma długości wszystkich boków jest równa $65$.
- [ ] Najdłuższy bok pięciokąta ma długość $27$.
- [ ] Bok $\mathrm{DE}$ jest o $1$ krótszy od boku $\mathrm{BC}$.
- [ ] Obwód pięciokąta opisuje równanie: $2x + x - 2 + 3x + \frac{2}{3}x + x = 67$.
- [ ] Bok $\mathrm{AE}$ ma długość $9$.
- [ ] Bok $\mathrm{AB}$ jest dwa razy dłuższy od boku $\mathrm{AE}$.
- [ ] Suma długości boków $\mathrm{AB}$ i $\mathrm{AE}$ jest taka sama jak bok $\mathrm{CD}$.
- [ ] Bok $\mathrm{BC}$ jest takiej samej długości jak bok $\mathrm{DE}$.
- [ ] Najkrótszy bok ma długość $9$.

## Ćwiczenie 8

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9

Rozwiąż równania.

1. $2(x+2)+3(x+3)=4(x+4)$
2. $3(x-1)-\sqrt{4}x+3=\sqrt[3]{125}+3\left(x-1\right)$
3. $x-2(x-1)+1=3+2(x-2)$
4. $2\left(x-\sqrt{\frac{1}{4}}\right)-3(x+1)=2-x$
5. $\frac{1}{2}(4x+2)-2(x-2)=5x-\sqrt[3]{8}\left(2x+1\right)$
6. $x-2(1-x)-2(3x-1)=\sqrt{9}-2\left(x+5\right)$

## Ćwiczenie 10

Rozwiąż równania.

1. $\frac{x-1}{3}+\frac{\sqrt{4}x}{7}=\frac{1}{7}\left(x+\frac{1}{3}\right)$
2. $\frac{\sqrt{3}^2x}{2}+\frac{4x}{3}+\frac{5x}{4}=\sqrt[3]{1}$
3. $\frac{2x-\sqrt[3]{27}}{5}-x=\frac{3x-1}{3}$
4. $\frac{6(x-1)-2}{2}=\frac{3^2x-2}{3}-3\frac{1}{3}$
5. $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{2^3}=x$
6. $\frac{x-\sqrt{16}}{2}-\frac{2x}{5}=x-\frac{2-x}{5}$

**Ćwiczenie 11**

Rozwiąż równania.

1. $\frac{x+1}{2} + 3x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(x - 1\right)$
2. $2x - \frac{1}{2} = \frac{3x+1}{\sqrt{3}^2} - 2\left(x - 6^0\right)$
3. $-3^2x - 2\frac{1}{3}(x - 2) = -\sqrt[3]{-27}x - \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}} - x\right)$
4. $3 - \frac{2x-1}{7} + \sqrt[3]{-8}x = \sqrt[3]{5}^0 x - \frac{3-x}{2}$

**Ćwiczenie 12**

Znając pierwiastek równania, wyznacz liczbę $a$.

1. $2x - 3(a - 2) = 2(x + 1), x = 1$
2. $3z + 2a - 1 = 2a - a(z - 3), z = -2$
3. $2a - 3(v + a) = 4(a - 1), v = -\frac{1}{3}$
4. $p + 2(a + 5) = a(p - 3), p = \sqrt[3]{-27}$

**Ćwiczenie 13**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 14**

Dane jest równanie: $2x + 3(1 + x) - 2a = 3(x + a)$. Dla jakiej wartości $a$ rozwiązaniem równania jest liczba $5$?

# Rozwiązywanie zadań tekstowych z zastosowaniem równań

**Ćwiczenie 1**

Wśród kwiatów rosnących w ogródku pani Urszuli połowa to róże, tulipany stanowią czwartą część wszystkich kwiatów, a żonkile ósmą część wszystkich kwiatów. Oprócz nich rośnie jeszcze $14$ narcyzów. Ile kwiatów rośnie w ogródku pani Urszuli?

**Ćwiczenie 2**

W akwarium Michała pływają skalary, gupiki i welony. Skalarów jest o pięć więcej niż welonów, a gupików dwa razy więcej niż welonów. Ile skalarów, gupików i welonów pływa w akwarium Michała, jeżeli wszystkich ryb jest $13$ ? Przeciągnij i upuść liczbę odpowiadającą ilości każdego z gatunków ryb.

Ilość skalarów: ____

Ilość gupików: ____

Ilość welonów: ____

$6$ $2$ $3$ $9$ $4$ $7$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 3**

Zosia podzieliła wstążkę na dwie części, tak że pierwsza z nich stanowiła $\frac{3}{4}$ całej długości wstążki. Druga część była o $8\ \mathrm{cm}$ krótsza od pierwszej. Jaka była długość wstążki przed podziałem?

**Ćwiczenie 4**

Kinga kupiła bluzkę i spódnicę, za które zapłaciła $138$ zł. Bluzka była o $43$ zł tańsza od spódnicy. Jeżeli przez $x$ oznaczymy cenę bluzki, to równanie opisujące treść zadania będzie postaci:

- $2x + 43 = 138$
- $x - 43 = 138$
- $2x - 43 = 138$
- $x + 43 = 138$

**Ćwiczenie 5**

Maciek kupił $2$ długopisy i ołówek, za które zapłacił $15{,}20$ zł. Długopis był o $20\%$ droższy od ołówka. Jeżeli przez $x$ oznaczymy cenę ołówka, to równanie opisujące treść zadania będzie postaci:

- $2x + 0{,}8x = 15{,}20$
- $x + 1{,}6x = 15{,}20$
- $2x + 1{,}2x = 15{,}20$
- $x + 2{,}4x = 15{,}20$

**Ćwiczenie 6**

Gospodarstwa Pawlaka i Nowaka mają razem $8{,}6$ ha powierzchni. Jaka jest powierzchnia każdego z gospodarstw, jeżeli gospodarstwo Pawlaka jest o $15\%$ większe od gospodarstwa Nowaka?

## Ćwiczenie 7

Uzupełnij.

a) ____ solanki $5$-procentowej $+$ ____ solanki $20$-procentowej $= 50\,\mathrm{dag}$ solanki $10$-procentowej

b) ____ solanki $10$-procentowej $+$ ____ solanki $4$-procentowej $= 40\,\mathrm{dag}$ solanki $8$-procentowej

c) ____ solanki $25$-procentowej $+$ ____ solanki $30$-procentowej $= 60\,\mathrm{dag}$ solanki $28$-procentowej

$24\,\mathrm{dag}$ | $36\,\mathrm{dag}$ | $33\frac{1}{3}\,\mathrm{dag}$ | $16\frac{2}{3}\,\mathrm{dag}$ | $13\frac{1}{3}\,\mathrm{dag}$ | $26\frac{2}{3}\,\mathrm{dag}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8

Paweł i Gaweł mają razem $a$ znaczków, ale kolekcja Pawła jest o $\frac{1}{4}$ większa od kolekcji Gawła. Ile znaczków ma Paweł?

## Ćwiczenie 9

Zosia narysowała $18$ kwadratów, trójkątów i kół. Ile figur geometrycznych każdego rodzaju narysowała Zosia, jeżeli trójkątów było o $50\,\%$ więcej niż kół, a kwadratów o $20\,\%$ mniej niż kół i trójkątów razem?

## Ćwiczenie 10

Ania jest o $5$ lat młodsza od Stasia. Cztery lata temu Staś był dwa razy starszy od Ani. Ile lat ma Ania, a ile Staś?

**Ćwiczenie 11**

Połącz w pary treści zadań z równaniami, za pomocą których można zapisać te treści.

1. Tata jest o $24$ lata starszy od Kasi. Cztery lata temu był od niej cztery razy starszy. Przez $x$ oznaczmy wiek Kasi.
2. Kinga jest o $20$ lat starsza od Basi. Cztery lata temu była od niej cztery razy starsza. Przez $x$ oznaczmy wiek Basi.
3. Tata jest o $24$ lata starszy od Kasi. Cztery lata temu był od niej cztery razy starszy. Przez $x$ oznaczmy wiek taty.
4. Kinga jest o $20$ lat starsza od Basi. Cztery lata temu była od niej cztery razy starsza. Przez $x$ oznaczmy wiek Kingi.
5. $\mathrm{x} - 4 = 4(\mathrm{x} - 28)$
6. $\mathrm{x} + 20 = 4(\mathrm{x} - 4)$
7. $\mathrm{x} + 16 = 4(\mathrm{x} - 4)$
8. $\mathrm{x} - 4 = 4(\mathrm{x} - 24)$

**Ćwiczenie 12**

W trapezie równoramiennym kąt leżący przy dłuższej podstawie jest o $24^\circ$ mniejszy od kąta leżącego przy krótszej podstawie. Miary kątów trapezu wynoszą

- ○ $24^\circ$ i $156^\circ$
- ○ $61^\circ$ i $119^\circ$
- ○ $78^\circ$ i $102^\circ$
- ○ $66^\circ$ i $114^\circ$

**Ćwiczenie 13**

Prostokąt, w którym jeden z boków jest o $4\ \mathrm{cm}$ dłuższy od drugiego, ma pole o $16\ cm^2$ większe od pola kwadratu o boku takiej samej długości, jak krótszy bok prostokąta. Oblicz długości boków prostokąta.

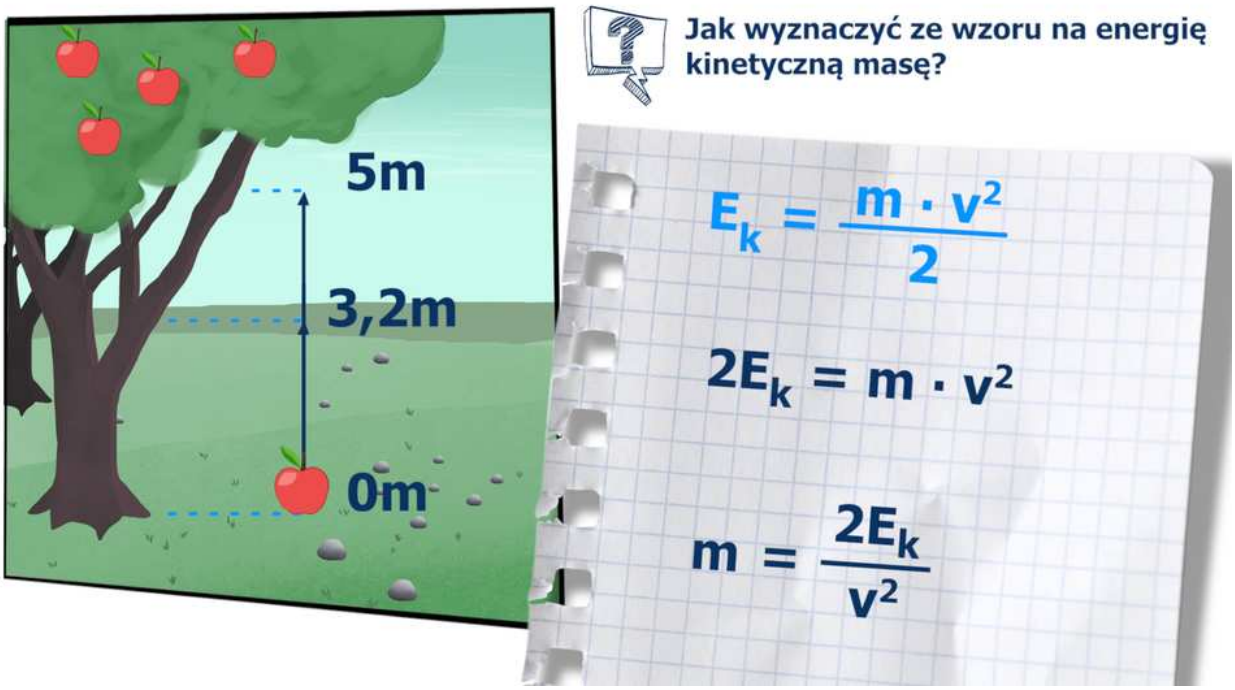
**Ćwiczenie 14**

W dwóch słojach mieści się $160$ litrów soku wiśniowego. Gdyby z większego słoja przelano $\frac{1}{3}$ jego zawartości do mniejszego słoja, to w obu byłoby po tyle samo soku. Ile litrów soku jest w każdym ze słojów?

# Przekształcanie wzorów

Przekształcanie wzorów polega na wyznaczaniu niewiadomej w zależności od innych zmiennych występujących w tych wzorach. Ma to zastosowanie przy wyznaczaniu potrzebnych niewiadomych ze wzorów matematycznych, fizycznych, chemicznych.

**Już wiesz**



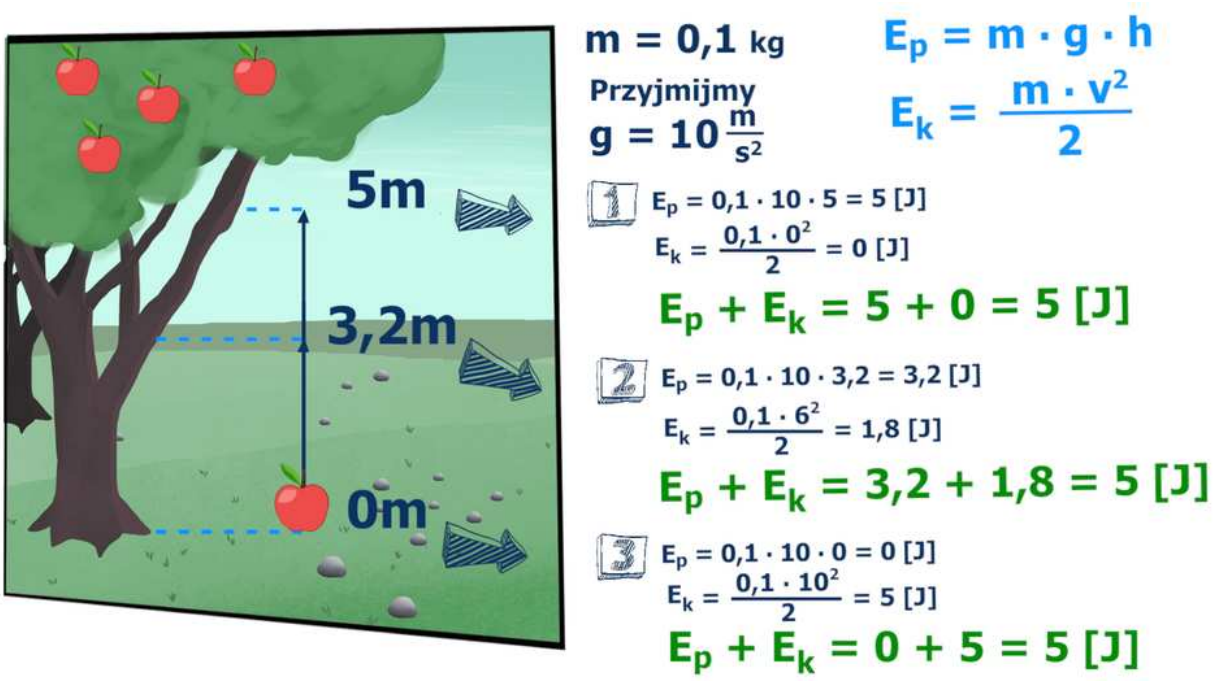

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Gdy niewiadoma, którą chcemy wyznaczyć występuje w kilku miejscach i nie możemy dokonać redukcji wyrazów podobnych, należy szukaną zmienną wyłączyć przed nawias.
Przypomnijmy, jak poprawnie wykonać potrzebne działania.

**Już wiesz**




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Ćwiczenie 1**

Z podanego wzoru wyznacz niewiadomą $x$.

1. $3x - 5 = 2x + 2a...$
2. $\sqrt{9} - x = 1 - 5a...$
3. $x - 5y + z = -4^0y...$
4. $a + 2\mathrm{ab} + 2x = 2^3b + 3x...$

**Ćwiczenie 2**

Połącz opis z odpowiednim wzorem i wyznacz $a$.

1. wzór na wysokość w trójkącie równobocznym
2. wzór na pole trójkąta równobocznego
3. wzór na pole dowolnego trójkąta
4. wzór na pole trapezu
5. wzór na pole kwadratu
6. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
7. $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
8. $P = \frac{a \bullet h}{2}$
9. $P = \frac{a+b}{2} \bullet h$
10. $P = a^2$

**Ćwiczenie 3**

Z podanego wzoru wyznaczono zmienną $x$. Uzupełnij wykropkowane miejsca tak, aby wzór był poprawny. Przyjmij, że wszystkie zmienne są różne od zera.

1. $2\mathrm{cx} + 2a = c - \mathrm{cx}$, $x = \frac{c-2a}{\dots}$
2. $4\mathrm{vx} - 5v + 1 = v(2x - v)$ , $x = \frac{-v^2+5v+\dots}{2v}$
3. $2\mathrm{ab} - \mathrm{ax} + \sqrt[3]{8}b = 3a\left(2x + 3ab\right)$, $x = \frac{-9a^2b+2\mathrm{ab}+\dots}{7}$
4. $3(\mathrm{px} - p) + 2\mathrm{pq} = 2p(3q + 2x - p) + 1$, $x = \frac{2p^2-3p-4\mathrm{pq}-1}{\dots}$

**Ćwiczenie 4**

Z podanego wzoru wyznacz wskazane zmienne. Wszystkie zmienne są liczbami dodatnimi.

1. $\frac{a}{b} = \frac{2c}{d}, c \text{ i } d$
2. $\frac{\sqrt[3]{27}a}{2b} = \frac{2^3c}{d}, c \text{ i } d$
3. $\frac{a+3^0}{b} = \frac{\sqrt{2}^2}{c}, b \text{ i } c$
4. $\frac{a}{b+1} = \frac{3c}{d+\sqrt{4}}, a \text{ i } c$

**Ćwiczenie 5**

Z podanego wzoru wyznacz zmienną $x$.

1. $p(x+2a) = 3x+1$
2. $z = \frac{2x}{v} + 2x$
3. $v = \frac{x}{x+1} + 1$
4. $\frac{a}{z} - 1 = z + \frac{1}{x}$

**Ćwiczenie 6**

Jeżeli $v = \frac{s}{t}$ $(s > 0\ , v > 0, t > 0)$, to

- ○ $s = \frac{v}{t}$
- ○ $s = v \bullet t$
- ○ $s = v - t$
- ○ $s = \frac{t}{v}$

**Ćwiczenie 7**

Po wyznaczeniu $t$ ze wzoru $s = \frac{a \bullet t^2}{2}$ otrzymamy

- $t = \sqrt{\frac{s}{2a}}$
- $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$
- $t = \frac{\sqrt{s}}{2a}$
- $t = \frac{\sqrt{2s}}{a}$

**Ćwiczenie 8**

Zapisz wzór na podstawę $a$ trójkąta, którego pole wynosi $4p + 3$, a wysokość $2h$.

- $a = \frac{p}{4h} + 3$
- $a = \frac{4p}{h} + 3$
- $a = \frac{4p+3}{2h}$
- $a = \frac{4p+3}{h}$

**Ćwiczenie 9**

Wyznacz długość $x$ dłuższej podstawy trapezu o polu $2p$, jeżeli wysokość trapezu wynosi $2h$, a krótsza podstawa ma długość $3z$.

**Ćwiczenie 10**

Z podanych wzorów wyznacz wskazane zmienne. Wszystkie zmienne są liczbami dodatnimi.

1. $P = \mathrm{ab} + \mathrm{ah} + \mathrm{bh},\ a,\ \mathrm{h}$
2. $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2a \bullet h, h$
3. $V = \frac{1}{3}a^2 \bullet H, a,\ \mathrm{H}$
4. $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \bullet H, a,\ \mathrm{H}$

**Ćwiczenie 11**

Dany jest wzór $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} R > 0$ i $R_1 > 0$ i $R_2 > 0$.
Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Wyznaczając ze wzoru $R_2$, otrzymamy $R_2 = \frac{R \bullet R_1}{R - R_1}$.
- [ ] Wyznaczając ze wzoru $R$, otrzymamy $R = \frac{R_1 \bullet R_2}{R_1 + R_2}$.
- [ ] Wyznaczając ze wzoru $R_1$, otrzymamy $R_1 = \frac{R \bullet R_2}{R + R_2}$.
- [ ] Wyznaczając ze wzoru $R_1$, otrzymamy $R_1 = \frac{R \bullet R_2}{R_2 - R}$.

**Ćwiczenie 12**

Uszereguj równości w odpowiedniej kolejności, tak aby ze wzoru wyznaczyć $a$. Błędne zapisy przenieś do drugiego zbioru.

1. $15a = -8b - 8c$
2. $3(a + 2b) + 6c = 12a - 2(b + c)$
3. $-9a = -8b - 8c$
4. $3a + 6b + 6c = 12a - 2b - 2c$
5. $3a - 12a = -2b - 6b - 2c - 6c$
6. $\frac{a+2b}{2} + c = 2a - \frac{b+c}{3}$
7. $3a + 12a = -2b - 6b - 2c - 6c$
8. $a = \frac{8b+8c}{15}$
9. $a = \frac{8b+8c}{9}$
10. $3(a + 2b) + c = 12a - 2(b + c)$
11. $3a + 6b + 6c = 12a - 2b + 2c$

**Ćwiczenie 13**

Sprawdź, czy wyznaczając $b$ ze wzoru $d = \frac{1-\frac{\mathrm{ab}}{c}}{a+b}$, otrzymasz wzór $b = \frac{1-\mathrm{ad}}{\frac{1}{c}(a+\mathrm{cd})}$.

Podaj konieczne założenia.

# Układ równań z dwiema niewiadomymi – opisywanie związków między wielkościami za pomocą równań

**Przykład 1**

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Zapamiętaj!**

- **Równaniem z dwiema niewiadomymi** nazywamy równanie, w którym występują dwie niewiadome.

Na przykład:

$$5x + y = x^2 + 6$$

$$z^2 = 4x$$

$$x^2 + 5x + 6 = y$$

$$y^3 = -x$$

- **Równaniem pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi** nazywamy równanie, w którym obie niewiadome występują w pierwszej potędze.

Na przykład:

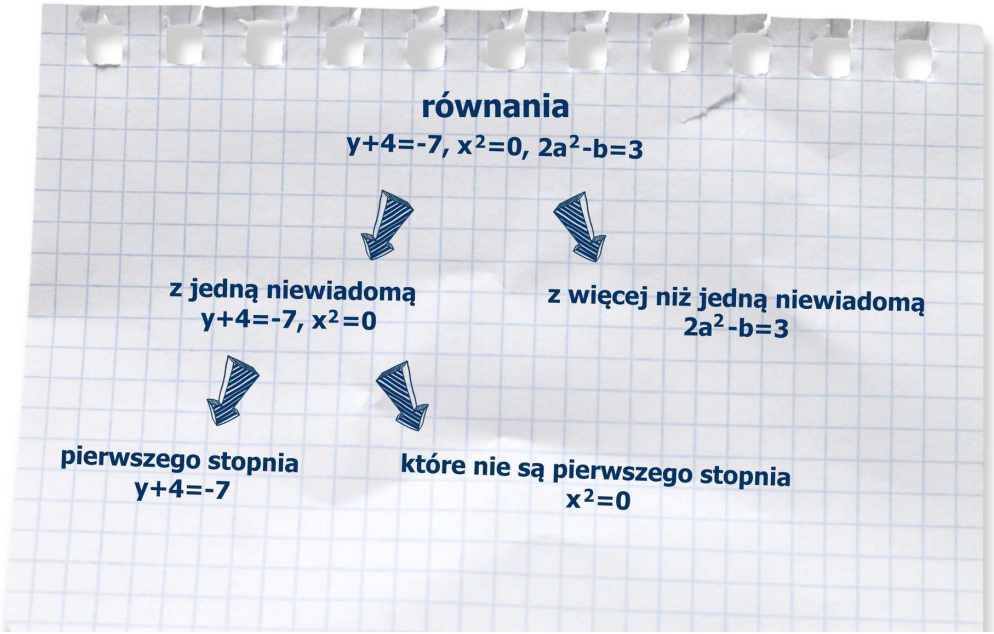
$$-x + y = 9$$

$$-2x + 4 = -y$$

$$7y - t = 9$$

$$-2(z - x) = 10$$

- **Równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi** ma nieskończenie wiele rozwiązań.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Zapamiętaj!**

- **Układem równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi** nazywamy dwa równania pierwszego stopnia z co najwyżej dwiema niewiadomymi, połączone spójnikiem „i”, który symbolizuje klamra.

Na przykład

$$\begin{cases} 2x = 8 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \begin{cases} 2a + 5b = 8 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \begin{cases} 6x - t = 12 \\ x = 5t \end{cases}$$

- **Układy równań** wykorzystujemy do zapisywania i rozwiązywania takich zadań, w których należy zastosować więcej niż jedną niewiadomą.

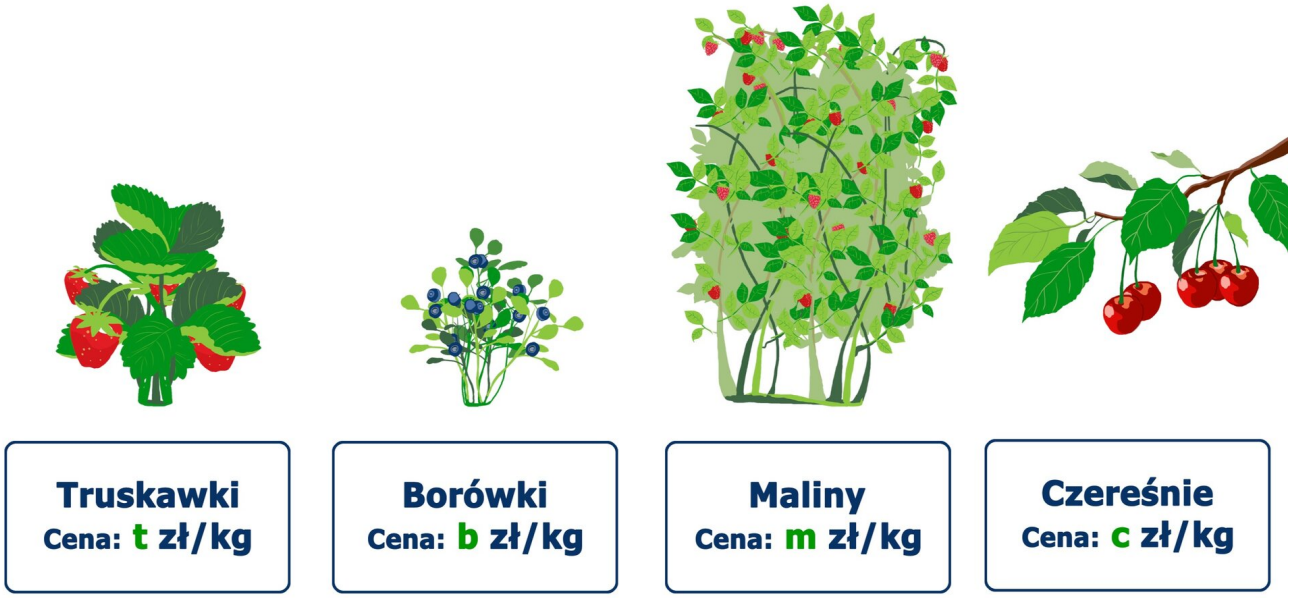
**Ćwiczenie 1**

Spośród poniższych układów równań wybierz układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

- [ ] $\begin{cases} a - 6b = 7 \\ 2b = -4 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} z - s = 1 \\ z + s = 1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ a - 3b = 6 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x^2 = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} r + 5t = 0 \\ -3r - 10t = 20 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x + y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

**Ćwiczenie 2**

Zapisz układ równań, który opisuje podaną sytuację. Skorzystaj z rysunku.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

1. Asia, kupując $4\ \mathrm{kg}$ truskawek i $0{,}5\ \mathrm{kg}$ malin, zapłaciła $23{,}50$ zł, a Maciek, kupując $2\ \mathrm{kg}$ truskawek i $1\ \mathrm{kg}$ malin, zapłacił $23$ zł.
2. Marysia, kupując $0{,}25$ kg borówek i $1\ \mathrm{kg}$ czereśni, zapłaciła $14$ zł, a Jacek, kupując $0{,}5\ \mathrm{kg}$ czereśni i $1\ \mathrm{kg}$ borówek, zapłacił $24{,}50$ zł.
3. Ala, kupując $3\ \mathrm{kg}$ truskawek i $1\ \mathrm{kg}$ borówek, zapłaciła $32$ zł, a Krzyś, kupując $5\ \mathrm{kg}$ truskawek i $0{,}5$ borówek, zapłacił $30$ zł.

**Ćwiczenie 3**

Zapisz układ równań, który opisuje podaną sytuację. Skorzystaj z rysunku.

1. Beata, kupując $1$ szampon i $3$ kremy do twarzy, zapłaciła $92$ zł, a Alicja, kupując $1$ krem i $2$ szampony, zapłaciła $54$ zł. Oznacz
   $x$- cena jednego szamponu do włosów $[\text{zł}]$
   $y$ - cena jednego kremu do twarzy $[\text{zł}]$

2.


   Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

   $x$ - masa większego klocka $[\text{kg}]$ $y$ - masa mniejszego klocka $[\text{kg}]$

3. Agnieszka, kupując $3$ opakowania ptasiego mleczka i $4$ mleczne czekolady, zapłaciła $51{,}60$ zł. Natomiast Bartek, kupując $3$ mleczne czekolady i $2$ opakowania ptasiego mleczka, zapłacił $35{,}20$ zł.
   $\text{x}$ - cena jednego opakowania ptasiego mleczka $[\text{zł}]$
   $y$ - cena jednej mlecznej czekolady $[\text{zł}]$

4.

   **masa owoców: 3,90 kg** **masa owoców: 3,20 kg**

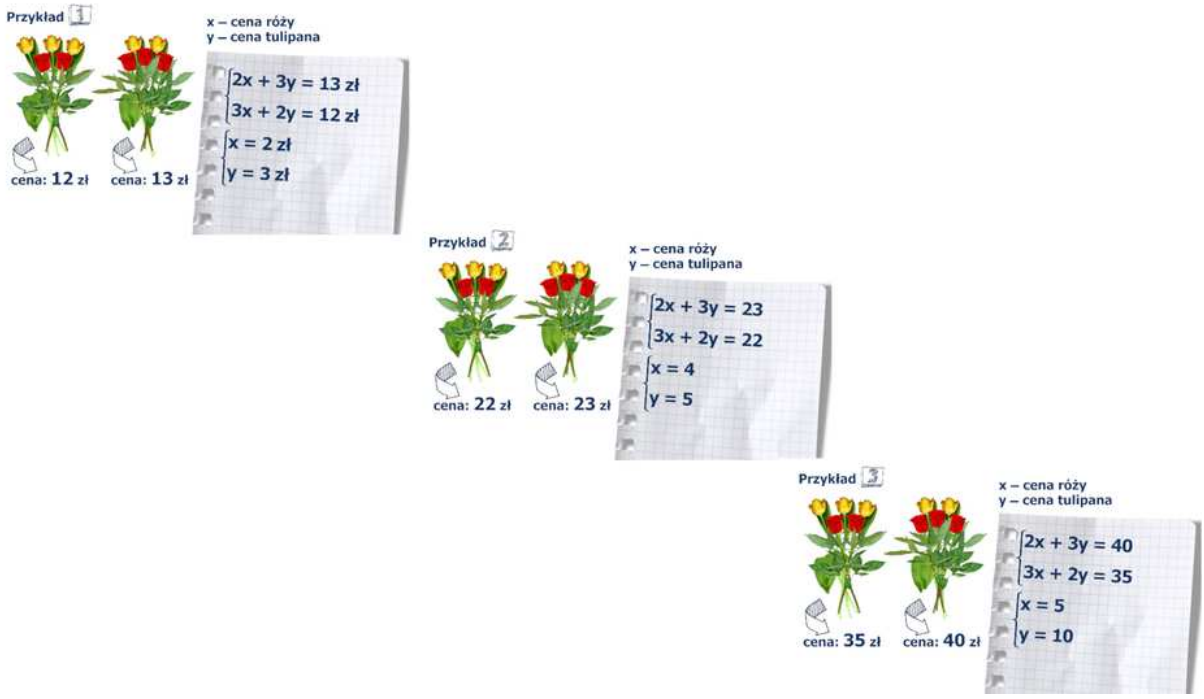
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$b$ - masa jednej brzoskwini $[\mathrm{kg}]$ $g$ - masa jednej gruszki $[\mathrm{kg}]$

**Ćwiczenie 4**

Które zdanie opisuje układ równań $\begin{cases} x-4=4y \\ x-y-2=\frac{x+2y}{2} \end{cases}$?

- [ ] Liczba o $4$ mniejsza od $x$ jest $4$ razy większa od $y$. Liczba o $2$ większa od różnicy liczb $x$ i $y$ jest równa średniej arytmetycznej liczby $x$ i dwukrotności liczby $y$.
- [ ] Liczba o $4$ większa od $x$ jest $4$ razy mniejsza od $y$. Liczba o $2$ mniejsza od różnicy liczb $x$ i $y$ jest równa średniej arytmetycznej liczby $x$ i dwukrotności liczby $y$.
- [ ] Liczba o $4$ mniejsza od $x$ jest $4$ razy większa od $y$.
- [ ] Liczba o $2$ mniejsza od różnicy liczb $x$ i $y$ jest równa średniej arytmetycznej liczby $x$ i dwukrotności liczby $y$.
- [ ] Liczba o $4$ mniejsza od $y$ jest $4$ razy większa od $x$. Liczba o $2$ mniejsza od różnicy liczb $x$ i $y$ jest równa średniej arytmetycznej liczby $x$ i dwukrotności liczby $y$.




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

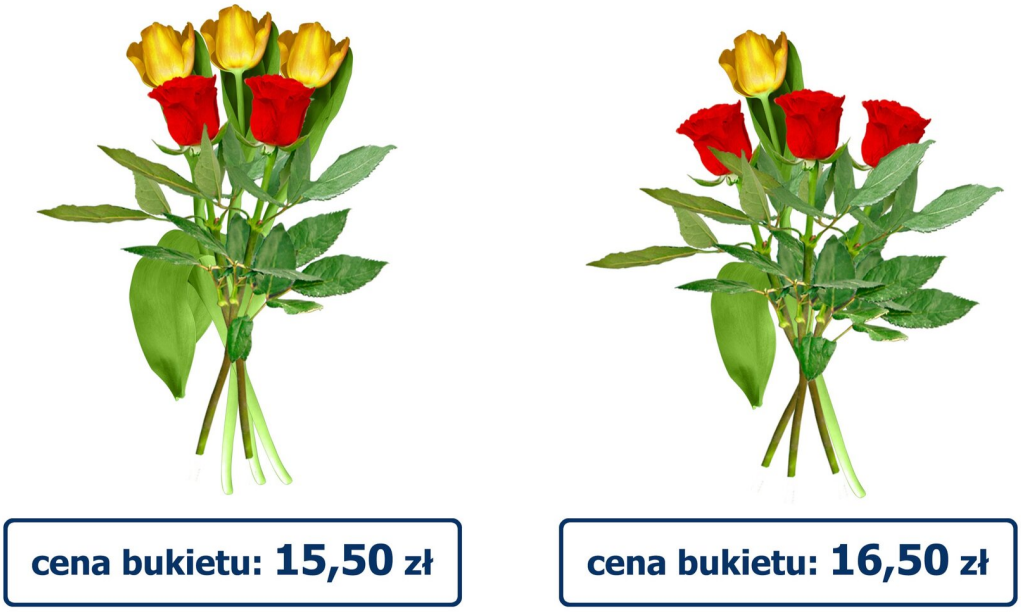
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Animacja

**Ćwiczenie 5**

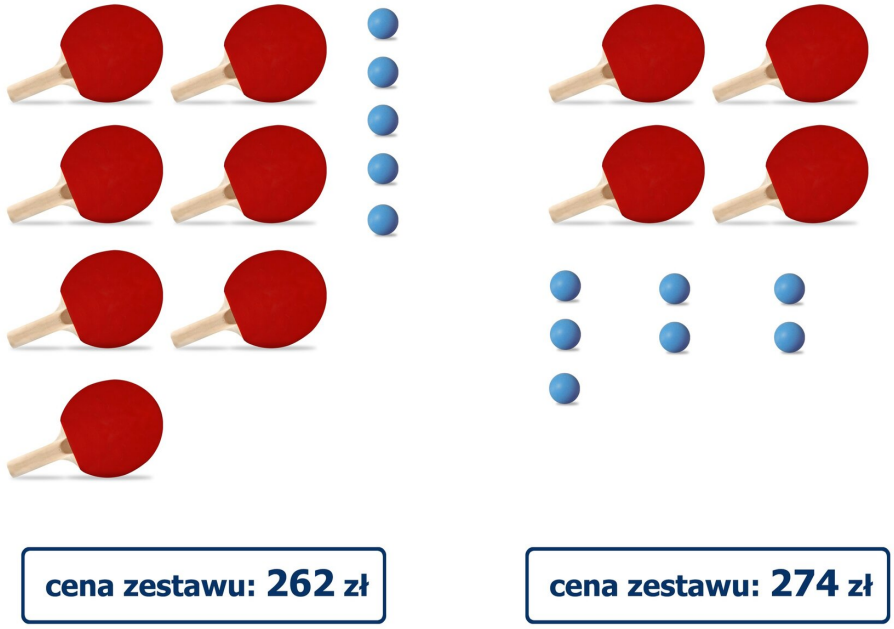
Zapisz układy równań opisujące sytuację przedstawioną na rysunkach.

1.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 6**

Uzupełnij wyrażenia, aby otrzymany układ równań opisywał poniższą sytuację.

1. Za stół i $4$ krzesła zapłacono $5600$ zł. Cena krzesła jest trzykrotnie mniejsza od ceny stołu.

   $s$ - cena stołu (w zł)

   $k$ - cena krzesła (w zł)

   $$\begin{cases} s = \ \ldots\ldots \\ s + 4k = \ \ldots\ldots \end{cases}$$

2. Za zeszyt i $5$ ołówków zapłacono $10{,}50$ zł. Dwa zeszyty kosztują tyle, co pięć ołówków.

   $z$ - cena jednego zeszytu (w zł)

   $o$- cena jednego ołówka (w zł)

   $$\begin{cases} 2z = \ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \ + \ \ldots\ldots = 10{,}50 \end{cases}$$

3. Mama i tata mają razem $75$ lat. Tata jest o $5$ lat starszy od mamy.

   $m$ - wiek mamy

   $t$ - wiek taty

   $$\begin{cases} m + 5 = \ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \ + \ \ldots\ldots = 75 \end{cases}$$

4. Ania jest o $10$ lat młodsza od swojego brata. Za dwa lata będzie od niego $5$ razy młodsza.

   $a$ - wiek Ani

   $b$ - wiek brata Ani

   $$\begin{cases} a = \ \ldots\ldots \\ a + 2 = \ \ldots\ldots \end{cases}$$

5. Zosia i Ala mają razem $13$ lat. Za $5$ lat będą miały razem $23$ lata.

   $z$ - wiek Zosi

   $a$ - wiek Ali

   $$\begin{cases} \ldots\ldots + \ \ldots\ldots = 13 \\ \ldots\ldots + \ \ldots\ldots = 23 \end{cases}$$

**Ćwiczenie 7**

Uzupełnij wyrażenia, aby otrzymany układ równań opisywał poniższą sytuację.

1. Masa $3$ opakowań ciastek i $7$ paczek cukierków jest równa $134\ \mathrm{dag}$. Masa jednego opakowania ciastek jest $20$ razy większa niż masa jednej paczki cukierków.
   $x$ - masa jednego opakowania ciastek $(\mathrm{dag})$
   $y$ - masa jednego opakowania cukierków $(\mathrm{dag})$
   $$\begin{cases} \ldots\ldots + \ \ldots\ldots = \ \ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots = \ \ldots\ldots \end{cases}$$
2. Liczba $x$ jest $3$ razy mniejsza od liczby $y$. Średnia arytmetyczna liczb $x$ i $y$ jest dwa razy większa od liczby $x$.
   $x$ - wartość pierwszej liczby
   $y$ - wartość drugiej liczby
   $$\begin{cases} \frac{\ldots + \ldots}{\ldots} = \ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots = \ \ldots\ldots \end{cases}$$
3. Na wycieczkę pojechało $a$ dziewcząt i $b$ chłopców, razem $25$ osób. Liczba chłopców jest o połowę większa od liczby dziewcząt.
   $a$ - liczba dziewcząt
   $b$ - liczba chłopców
   $$\begin{cases} \ldots\ldots + \ \ldots\ldots = \ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots = \ \ldots\ldots + \ \ldots\ldots \end{cases}$$
4. W skarbonce jest $m$ monet dwuzłotowych i $n$ monet pięciozłotowych, razem $128$ zł. Liczba monet pięciozłotowych jest o $6$ mniejsza od liczby monet dwuzłotowych.
   $m$ - liczba monet dwuzłotowych
   $n$ - liczba monet pięciozłotowych
   $$\begin{cases} \qquad \ldots + \ \ldots = \ldots \\ \ldots\ldots = \ \ldots\ldots + \ \ldots\ldots \end{cases}$$

**Ćwiczenie 8**

Połącz w pary podane zdania z układami równań, które je opisują.

Tabela. Dane

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1$ | Liczba $a$ jest o $4$ większa od trzeciej części liczby $b$ . Średnia arytmetyczna liczb $a$ i $b$ jest o $1$ mniejsza od liczby $b$. | $A$ | $\begin{cases} a = 3b + 4 \\ \frac{a+b}{2} = a - b - 2 \end{cases}$ |
| $2$ | Liczba $a$ jest o $4$ mniejsza od trzeciej części liczby $b$. Podwojona średnia arytmetyczna liczb $a$ i $b$ jest o $1$ większa od liczby $b$. | $B$ | $\begin{cases} a = \frac{1}{3}b + 4 \\ \frac{a+b}{2} = b - 1 \end{cases}$ |
| $3$ | Liczba $a$ jest o $4$ większa od potrojonej liczby $b$. Średnia arytmetyczna liczb $a$ i $b$ jest o $2$ mniejsza od różnicy liczb $a$ i $b$. | $C$ | $\begin{cases} a = 3b - 4 \\ \frac{a+2b}{2} = a - 1 \end{cases}$ |
| $4$ | Liczba $a$ jest o $4$ mniejsza od potrojonej liczby $b$. Średnia arytmetyczna liczby $a$ i podwojonej liczby $b$ jest o $1$ mniejsza od liczby $a$. | $D$ | $\begin{cases} a = \frac{1}{3}b - 4 \\ \frac{a+b}{2} \bullet 2 = b + 1 \end{cases}$ |

**Ćwiczenie 9**

Jedno opakowanie kawy rozpuszczalnej jest droższe o $2$ zł od trzech opakowań herbaty. Za dwa opakowania kawy i $5$ opakowań herbaty należy zapłacić $70$ zł. Który układ równań należy rozwiązać, aby wyznaczyć cenę tych produktów?

- ○ $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ 2x + 5y = 70 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} x = 3y + 2 \\ 2y + 5x = 70 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} x = 3y - 2 \\ 2y + 5x = 70 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} x = y - 2 \\ 2x + 5y = 70 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} x = y + 2 \\ 2x + 5y = 70 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} x = 3y + 2 \\ 2x + 5y = 70 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} x = 3y - 2 \\ 2x + 5y = 70 \end{cases}$

**Ćwiczenie 10**

Suma $10\%$ liczby $x$ i $20\%$ liczby $y$ jest równa $19$, a $30\%$ sumy liczb $x$ i $y$ jest równe $36{,}6$. Który układ równań należy rozwiązać, aby wyznaczyć wartości tych liczb?

- $\begin{cases} 10\%x + 20\%y = 19 \\ x + 30\%y = 36{,}6 \end{cases}$
- $\begin{cases} 10\%(x + 20\%y) = 19 \\ 30\%x + y = 36{,}6 \end{cases}$
- $\begin{cases} 10(x + 20y) = 19 \\ 30(x + y) = 36{,}6 \end{cases}$
- $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}2y = 19 \\ 30(x + y) = 36{,}6 \end{cases}$
- $\begin{cases} 10\%x + 20\%y = 19 \\ 30\%x + y = 36{,}6 \end{cases}$
- $\begin{cases} 10x + 20y = 19 \\ 30(x + y) = 36{,}6 \end{cases}$
- $\begin{cases} 10\%x + 20\%y = 19 \\ 30\%(x + y) = 36{,}6 \end{cases}$

**Ćwiczenie 11**

W skarbonce jest $11{,}4$ zł w monetach pięciogroszowych, dwudziestogroszowe oraz $3$ monety dwuzłotowe. Średnia arytmetyczna liczby wszystkich monet w skarbonce jest równa $14$.

Wskaż układy równań opisujące sytuację przedstawioną w zadaniu.

- [ ] $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}05y + 2 = 11{,}4 \\ \frac{x+y+3}{3} = 14 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}05y + 6 = 11{,}4 \\ x + y + 3 = 14 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 0{,}05x + 0{,}2y + 6 = 11{,}4 \\ \frac{x+y+3}{3} = 14 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x + y + 6 = 11{,}4 \\ \frac{0{,}2x+0{,}05y+6}{3} = 14 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}05y + 6 = 11{,}4 \\ \frac{x+y}{2} = 14 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}05y + 6 = 11{,}4 \\ \frac{x+y+3}{3} = 14 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 0{,}2y + 0{,}05x + 2 = 11{,}4 \\ \frac{x+y+3}{3} = 14 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}5y + 6 = 11{,}4 \\ \frac{x+y+3}{3} = 14 \end{cases}$

**Ćwiczenie 12**

Cztery lata temu Adam był $3$ razy starszy od Agnieszki, a za $4$ lata będzie od niej $2$ razy starszy. Który układ równań należy rozwiązać, aby wyznaczyć wiek Adama i Agnieszki?

- ○ $\begin{cases} x-4=y-4+3 \\ x+4=y+4+2 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} x-4=3(y-4) \\ x+4=2(y+4) \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} x-4=3y-4 \\ x+4=2y+4 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} x-4=2(y-4) \\ x+4=3(y+4) \end{cases}$

**Ćwiczenie 13**

Zapisz układ równań, który opisuje następującą sytuację.

1. Różnica dwóch liczb wynosi $20$. Znajdź te liczby, wiedząc, że jeżeli większą z nich zwiększymy o $10$, a mniejszą zwiększymy trzykrotnie, to otrzymamy liczby równe.
2. Liczba $x$ jest o $4$ mniejsza od liczby $y$. Połowa sumy liczb $x$ i $y$ jest o $1$ większa od liczby $x$.
3. Liczba o $30\%$ większa od liczby $x$ jest o $20$ większa od liczby $y$. Liczba o $20\%$ mniejsza od liczby $y$ jest równa liczbie $x$.
4. Czwarta część liczby $x$ stanowi $8\%$ liczby $y$. Liczba o $50\%$ większa od liczby $x$ jest o $10$ mniejsza od $50\%$ liczby $y$.

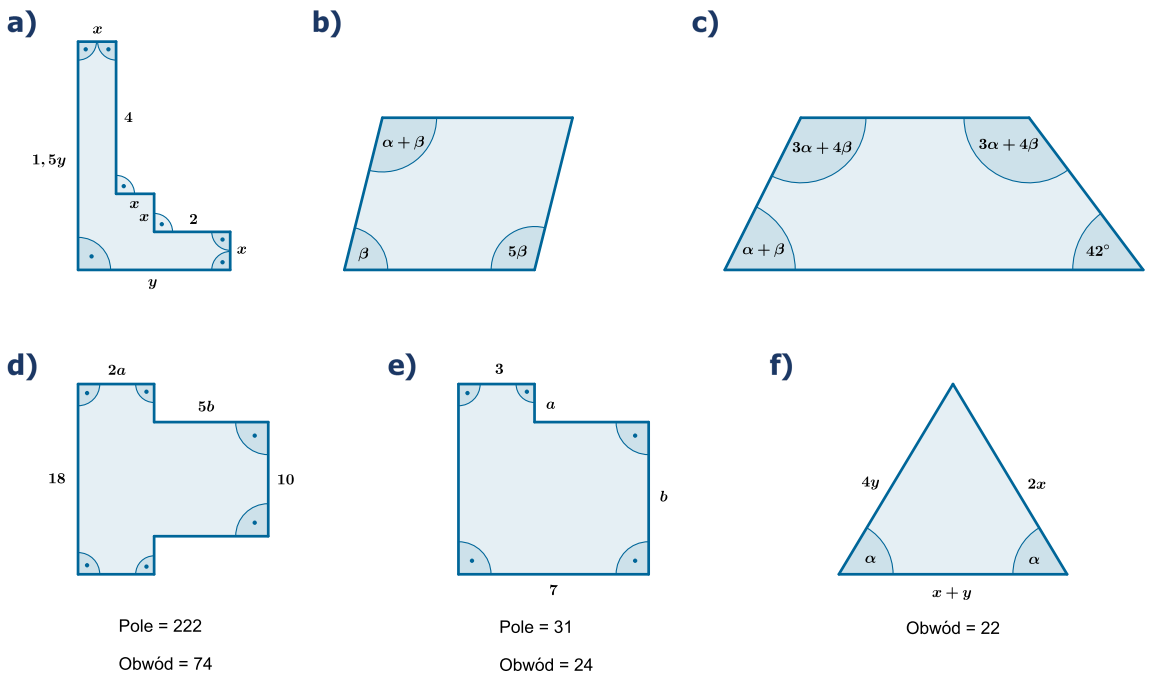
## Ćwiczenie 14

Ustal niewiadome i zapisz układ równań, który opisuje następującą sytuację.

1. Marysia, kupując w księgarni ołówek i długopis, zapłaciła $5{,}2$ zł. Justyna, kupując $4$ takie same ołówki i taki sam długopis, zapłaciła $8{,}8$ zł.
2. W nadmorskim pensjonacie znajdują się pokoje czteroosobowe i trzyosobowe oraz $44$ pokoi dwuosobowych, razem $90$ pokoi. Pensjonat może przyjąć $236$ wczasowiczów.
3. Marek i Ala dostają co miesiąc kieszonkowe od swoich rodziców. W ciągu roku rodzeństwo otrzymało $660$ złotych. Miesięczne kieszonkowe Marka jest o $15$ zł niższe od kieszonkowego Ali.
4. W pewnym gospodarstwie hodowano gęsi, których pilnowały mniejsze psy. Zwierzęta miały razem $300$ nóg i $135$ głów.
5. Skrzynia z narzędziami waży $24$ kg. Masa narzędzi jest siedmiokrotnie większa niż masa pustej skrzyni.

## Ćwiczenie 15

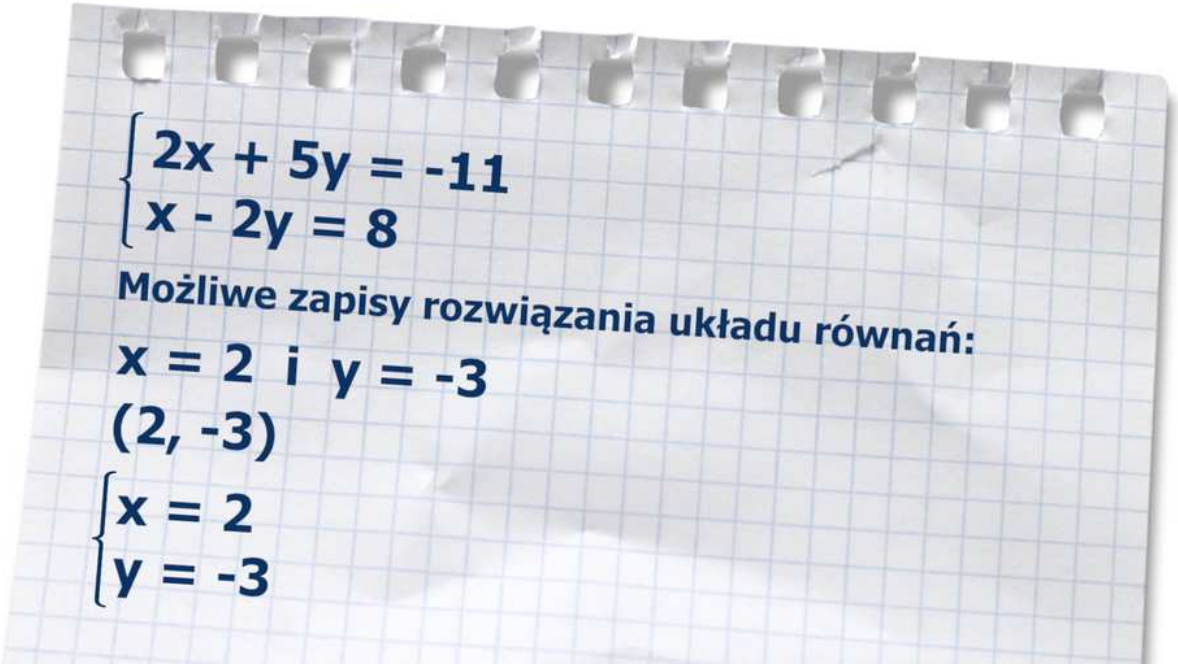
Zapisz układy równań opisujące sytuację przedstawioną na rysunku.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

# Liczba rozwiązań układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

**Przykład 1**

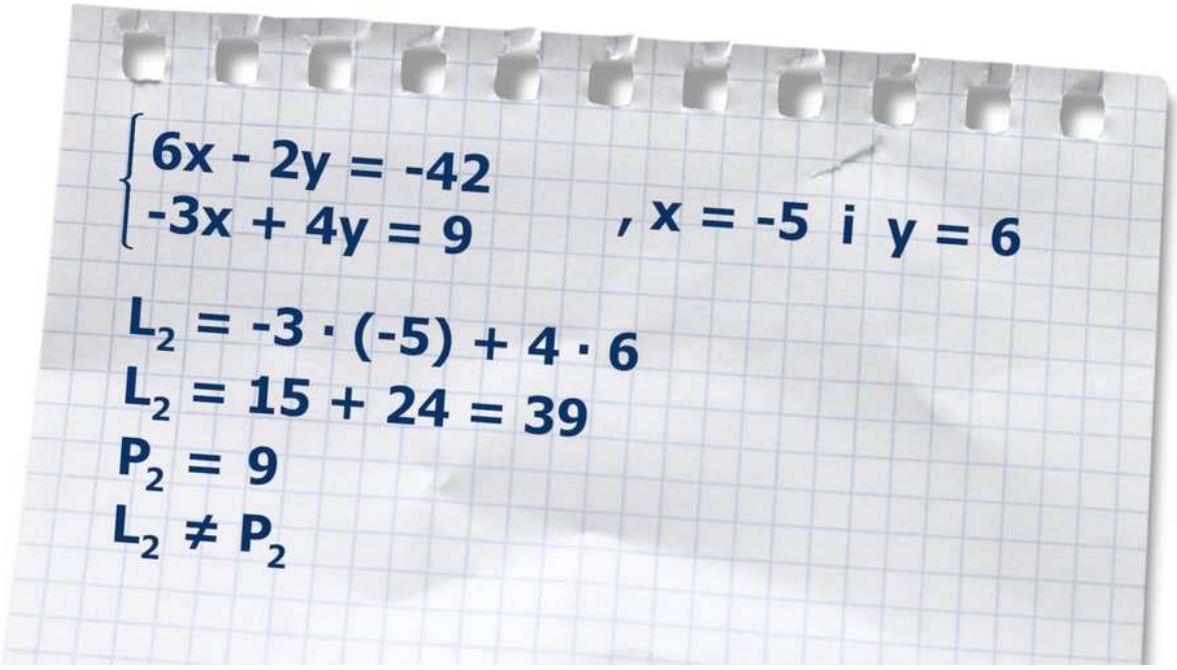



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Przykład 2**




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Zapamiętaj!**

- Para liczb spełnia dany układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, jeżeli spełnia jednocześnie dwa równania tego układu.
- Zbiór wszystkich par liczb spełniających dany układ równań nazywamy rozwiązaniem tego układu równań.

**Ważne!**

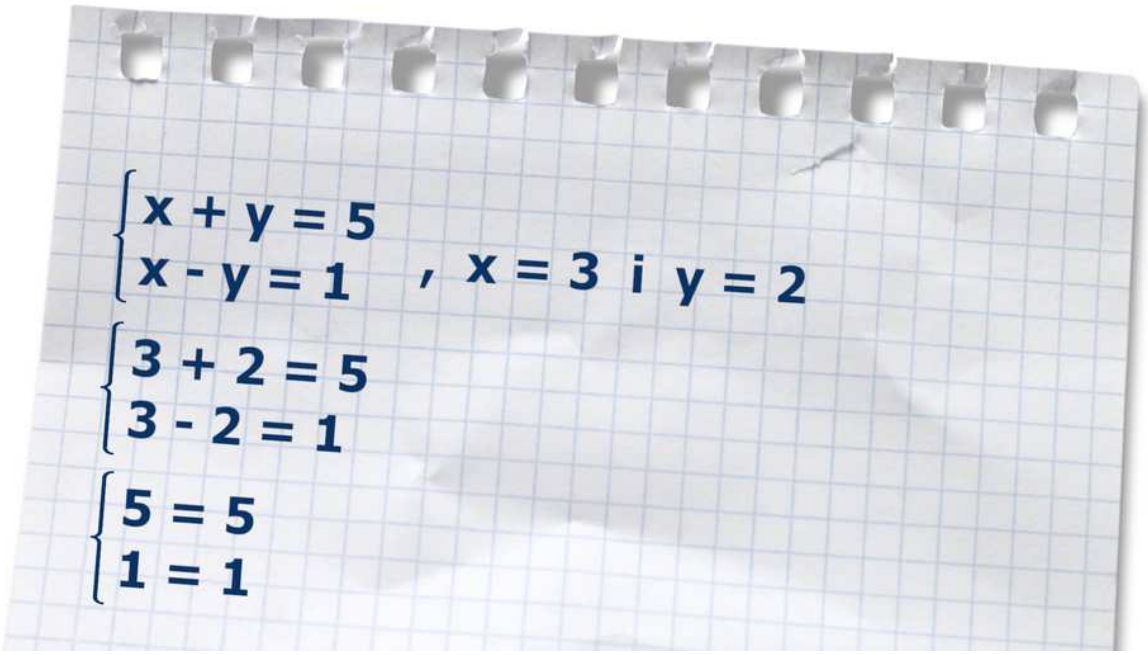
Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi może:

- nie mieć żadnej pary liczb spełniającej dany układ równań,
- mieć dokładnie jedną parę liczb spełniającą dany układ równań,
- mieć nieskończenie wiele par liczb spełniających dany układ równań.

**Przykład 3**

Spośród poniższych układów równań wybierz te, które:

- mają dokładnie jedno rozwiązanie,
- nie mają żadnego rozwiązania,
- mają nieskończenie wiele rozwiązań.




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Zapamiętaj!**

- **Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi**, którego rozwiązaniem jest dokładnie jedna para liczb nazywamy **układem oznaczonym**.
- **Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi**, którego rozwiązaniem jest nieskończenie wiele par liczb, nazywamy układem nieoznaczonym.
- **Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi**, który nie ma rozwiązania, nazywamy układem sprzecznym.

## Ćwiczenie 1

Połącz w pary układy równań z ich rozwiązaniami.

| | |
|---|---|
| $\begin{cases} -x+2y=4 \\ x-4y=-5 \end{cases}$ | $(2,3)$ |
| $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases}$ | $(-2,2)$ |
| $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=6 \end{cases}$ | $(-1,0)$ |
| $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-2y=3 \end{cases}$ | $(-5,-4)$ |
| $\begin{cases} 3x-4y=-14 \\ 2x+5y=6 \end{cases}$ | $(3,3)$ |
| $\begin{cases} 4x+5y=4 \\ 4x-5y=6 \end{cases}$ | $\left(1\frac{1}{4},-\frac{1}{5}\right)$ |
| $\begin{cases} 2x-y=-2 \\ x+y=-1 \end{cases}$ | $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 2**

Parą liczb spełniającą układ równań $\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ -4x - 0{,}5y = 2 \end{cases}$ jest

- $(1,\ 4)$
- $(1, -4)$
- $(-1,\ -4)$
- $(-1,\ 4)$

**Ćwiczenie 3**

Parą liczb spełniającą układ równań $\begin{cases} 2(x-6) + 4(y+3) = y - x \\ -(-x+1) - 2(5-2y) = -17 \end{cases}$ jest

- $(-2, -2)$
- $(2, -2)$
- $(2, 2)$
- $(-2, 2)$

**Ćwiczenie 4**

Sprawdź, czy podana para liczb jest rozwiązaniem danego układu równań.

- [ ] $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ y = 1 - x \end{cases}, \left(-2,\ 3\right)$
- [ ] $\begin{cases} x - 2y = -12 \\ 2y - x = 4 \end{cases}, \left(-4, -4\right)$
- [ ] $\begin{cases} 2(x - y) = 2 \\ 3(x - 1) + 2(y - 1) = 8 \end{cases}, \left(3,\ 2\right)$
- [ ] $\begin{cases} -4x - y = -15 \\ 3y - 7x = 7 \end{cases}, \left(2, -7\right)$
- [ ] $\begin{cases} -y - x = 1 \\ 2x - 3y = 28 \end{cases}, \left(5,\ -6\right)$

**Ćwiczenie 5**

Sprawdź, które układy równań spełnia para liczb $\left(-4,\ \frac{1}{5}\right)$.

- ○ $\begin{cases} 3\frac{1}{2}x + 25y = -9 \\ 10y - 3x = 14 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 10y = 6 \\ 6x - 15y = -1 \end{cases}$
- ○ $\begin{cases} -3x + 5y = 9 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$

**Ćwiczenie 6**

Zapisz układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, którego rozwiązaniem jest podana para liczb

1. $(4,\ 6)$
2. $(-2,\ -5)$
3. $(0,\ 9)$
4. $(-3,\ 0)$
5. $(-1,\ 4)$

## Ćwiczenie 7

Przeciagnij i upuść układy równań z dolnej sekcji do górnej.

brak rozwiązań

jedno rozwiązanie

nieskończenie wiele rozwiązań

$$\begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ -3x - 5y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ 2x + 2y = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 8**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Układ równań $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ jest układem sprzecznym.
- [ ] Układ równań $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ jest układem oznaczonym
- [ ] Układ równań $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=3 \end{cases}$ jest układem oznaczonym.
- [ ] Układ równań $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ jest układem oznaczonym.
- [ ] Układ równań $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ jest układem nieoznaczonym.
- [ ] Układ równań $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=3 \end{cases}$ jest układem nieoznaczonym.

**Ćwiczenie 9**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Układ równań $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ jest układem nieoznaczonym.
- [ ] Układ równań $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=-3 \end{cases}$ jest układem oznaczonym.
- [ ] Układ równań $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=-3 \end{cases}$ jest układem sprzecznym.
- [ ] Układ równań $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=-3 \end{cases}$ jest układem nieoznaczonym.
- [ ] Układ równań $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=3 \end{cases}$ jest układem sprzecznym.
- [ ] Układ równań $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=3 \end{cases}$ jest układem sprzecznym.

**Ćwiczenie 10**

Które z podanych układów równań są sprzeczne?

- [ ] $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ -x + 3y = 5 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ 2a + 3b = -1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 24x - 16y = 9 \\ 12x - 8y = 9 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 2a + 4b = 8 \\ a + 2b = 4 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} a - 6b = 2 \\ -a + 6b = 2 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x - 2y = -3 \end{cases}$

**Ćwiczenie 11**

Które z podanych układów równań są sprzeczne?

- [ ] $\begin{cases} 4a - 7b = 12 \\ 4a - 7b = 21 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} -3y + 3x = 1 \\ 3y - 3x = 1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x + 3y = 12 \\ x - 3y = 12 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 6x - 2y = 5 \\ -2y + 6x = 4 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 5x - 7y = 0 \\ 4x + 7y = 18 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 24x - 16y = 9 \\ 12x - 8y = 9 \end{cases}$

**Ćwiczenie 12**

Które z podanych układów równań są nieoznaczone?

- [ ] $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ -x - 3y = 5 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ -2a - 3b = -1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 4a - 7b = 12 \\ 4a - 7b = 24 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 24x - 16y = 9 \\ 12x - 8y = 9 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} a + 6b = 2 \\ a + 6b = 2 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 24x - 16y = 9 \\ 12x - 8y = 4{,}5 \end{cases}$

**Ćwiczenie 13**

Które z podanych układów równań są nieoznaczone?

- [ ] $\begin{cases} 4a - 7b = 12 \\ 14b - 8a = -24 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} y + 3x = 1 \\ 3y + x = 3 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 2a + 4b = 8 \\ a + 2b = 16 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} y + 3x = -1 \\ 3y + 9x = -3 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 24x - 16y = 9 \\ 12x - 8y = 4{,}5 \end{cases}$,
- [ ] $\begin{cases} 6x - 2y = 5 \\ -2y + 6x = 5 \end{cases}$

**Ćwiczenie 14**

Które z podanych układów równań są oznaczone?

- [ ] $\begin{cases} 24x - 16y = 9 \\ 12x - 8y = 9 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -x + 3y = 5 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 6x - 2y = 5 \\ -2y + 6x = 4 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 4a - 7b = 12 \\ 4a - 7b = 21 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} a - 6b = 2 \\ a + 6b = 2 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} y + 3x = 1 \\ 3y + x = 1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ -2a + 3b = -1 \end{cases}$

**Ćwiczenie 15**

Które z podanych układów równań są oznaczone?

- [ ] $\begin{cases} y = -7x \\ x + y = -6 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -x - 3y = 2 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} y + 3x = 1 \\ 3y + x = 1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -x - 3y = -5 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 4 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} 3x + 3y = 15 \\ -3x + 2y = 10 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -x - 3y = 5 \end{cases}$

**Ćwiczenie 16**

Układ równań $\begin{cases} 2x - 7y = -3 \\ -2x - 7y = -3 \end{cases}$ jest

- sprzeczny
- oznaczony
- nieoznaczony

**Ćwiczenie 17**

Układ równań $\begin{cases} -2x + 7y = -3 \\ 2x - 7y = 3 \end{cases}$ jest

- oznaczony
- sprzeczny
- nieoznaczony

**Ćwiczenie 18**

Układ równań $\begin{cases} -2x + 7y = -3 \\ 2x - 7y = -3 \end{cases}$ jest

- oznaczony
- sprzeczny
- nieoznaczony

**Ćwiczenie 19**

Jaki jednomian należy wpisać w miejsce kropek, aby otrzymany układ równań był sprzeczny?

1. $\begin{cases} x - 8y = 6 \\ \ldots \ - 8y = -5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2a - 4b = 3 \\ -2a + \ldots = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 6x + 8y = 12 \\ -3x - 4y = \ldots \end{cases}$

**Ćwiczenie 20**

Jaki jednomian należy wpisać w miejsce kropek, aby otrzymany układ równań był nieoznaczony?

1. $\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ -2a + \ldots = -5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 20x + 35y = 10 \\ \ldots - 7y = -2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 13x - 9y = 32 \\ 26x - 18y = \ \ldots \end{cases}$

**Ćwiczenie 21**

Z podanych równań wybierz takie, aby otrzymać układ oznaczony.

1. $\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ \quad \dots \end{cases}$

- $x - 3y = 5$ , $x + 3y = 5$ , $-x - 3y = 5$ , $x - 3y = -5$ , $-x + 3y = 5$

1. $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3y = 1 \\ \quad \dots \end{cases}$

- $2x - 12y = -4$ , $2x + 12y = -4$ , $-2x + 12y = -4$ , $2x - 12y = 4$ , $-2x$ -

1. $\begin{cases} 5x - y = -3 \\ \quad \dots \end{cases}$

- $15x - 3y = -9$ , $15x + 3y = -9$ , $-15x - 3y = -9$ , $15x - 3y = 9$ , $-15y$

**Ćwiczenie 22**

Z podanych równań dobierz takie drugie równanie, aby otrzymany układ był sprzeczny.

1. $\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ \quad \dots \end{cases}$
   $x - 3y = 5$ , $x + 3y = 5$ , $-x - 3y = 5$ , $x - 3y = -5$ , $-x + 3y = -5$
2. $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3y = 1 \\ \quad \dots \end{cases}$
   $2x - 12y = -4$ , $2x + 12y = -4$ , $-2x + 12y = -4$ , $2x - 12y = 4$ , $-2x$ -
3. $\begin{cases} 5x - y = -3 \\ \quad \dots \end{cases}$
   $15x - 3y = -9$ , $15x + 3y = -9$ , $-15x - 3y = -9$ , $15x - 3y = 9$ , $-15y$

**Ćwiczenie 23**

Wybierz spośród podanych równań z dwiema niewiadomymi dwa równania, tak aby otrzymany układ równań był oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny. Rozważ wszystkie możliwości.

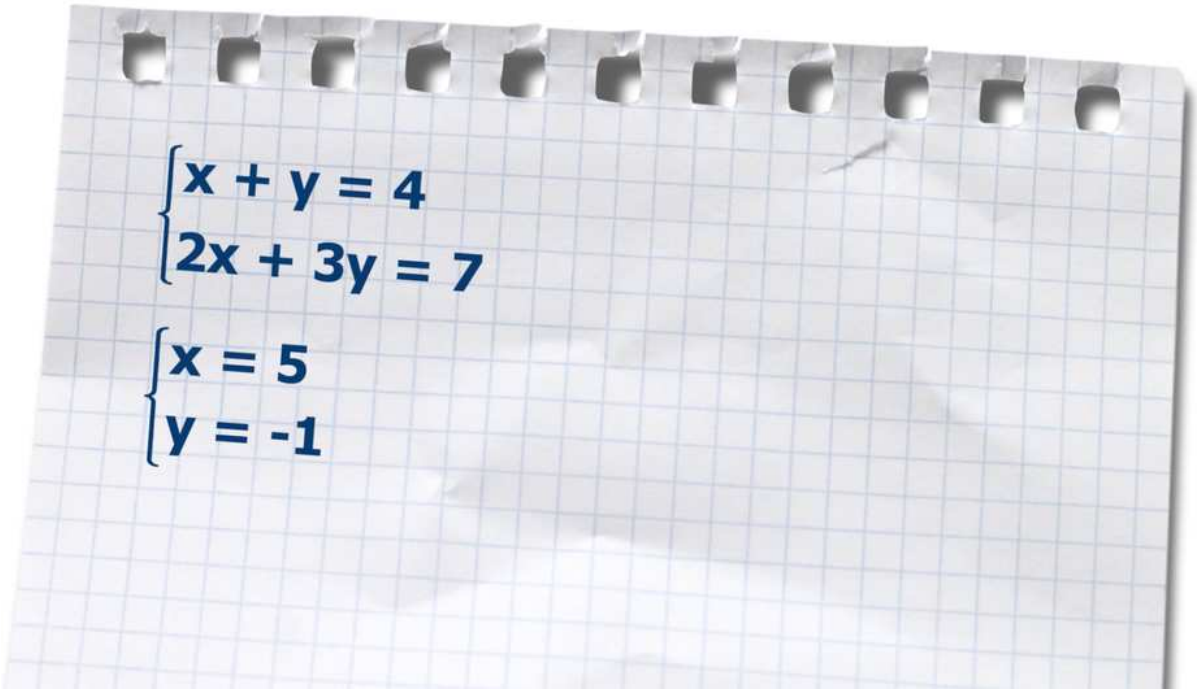
1. $x - 4y = 3$
2. $-x + 4y = -3$
3. $2x + 4y = 6$
4. $2x - 8y = 6$
5. $2x + 4y = -6$

**Ćwiczenie 24**

Zapisz wyrażenie algebraiczne, które należy wpisać w miejsce kropek, aby układ równań $\begin{cases} -2x + 7y = 5 \\ \ldots = -10 \end{cases}$

1. był sprzeczny
2. był nieoznaczony

# Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

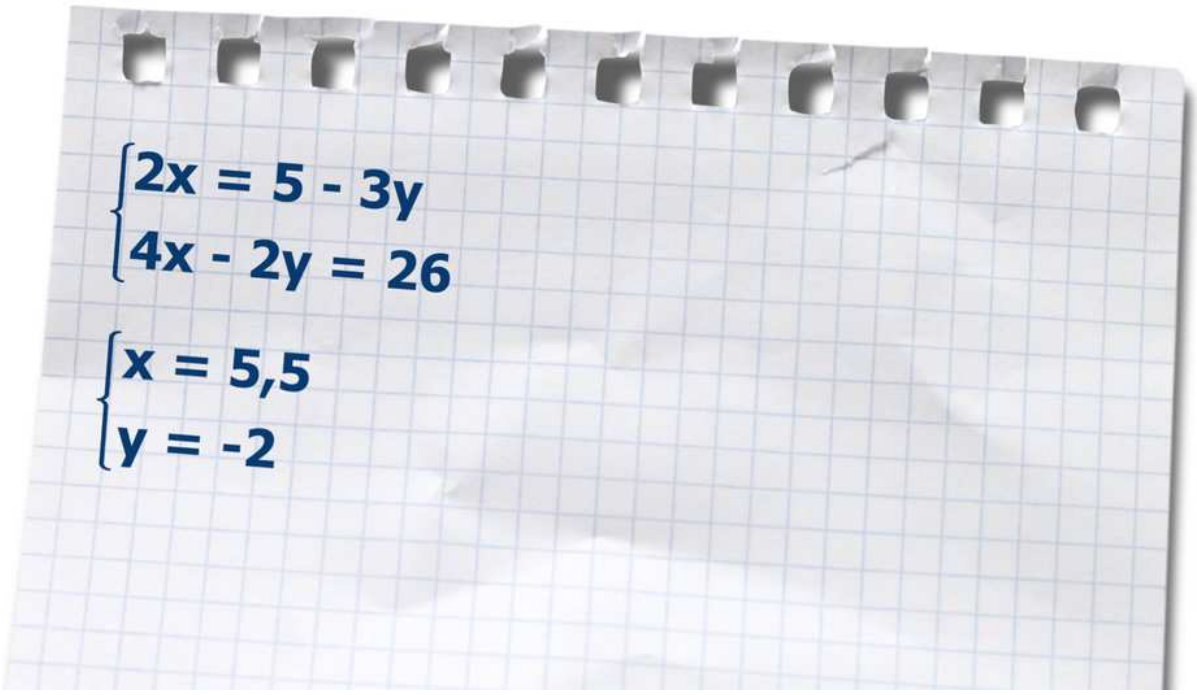
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Przykład 1**

Metoda podstawiania jest łatwiejsza do stosowania, jeżeli przynajmniej w jednym z równań układu, przed jedną z niewiadomych, znajduje się współczynnik liczbowy 1.
Rozwiążemy teraz układ równań, w którym żaden ze współczynników liczbowych występujących przed niewiadomymi nie jest równy 1.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x - 2y = 26 \end{cases}$$




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 2**

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -2x+4y=4 \\ x-2y=\ 3 \end{cases}$ metodą podstawiania.

Wyznaczymy niewiadomą $x$ z drugiego równania układu i podstawimy otrzymane wyrażenie zamiast x do pierwszego równania układu.

$$\begin{cases} x=2y+3 \\ -2(2y+3)+4y=4 \end{cases}$$

Następnie rozwiążemy drugie równanie, przepisując pierwsze bez zmian.

$$\begin{cases} x=2y+3 \\ -4y-6+4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y+3 \\ -4y+4y=4+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y+3 \\ 0\bullet y=10 \\ 0=10 \end{cases}$$

Drugie z równań układu okazało się równaniem sprzecznym, a więc układ równań jest układem sprzecznym.

**Zapamiętaj!**

Jeżeli, rozwiązując układ równań metodą podstawiania, równanie, do którego podstawimy wyrażenie algebraiczne z drugiego równania, okaże się równaniem sprzecznym, to taki układ jest **układem sprzecznym**.

**Przykład 3**

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -4x + 6y = 8 \\ 2x - 3y = \ \ -4 \end{cases}$ metodą podstawiania.
Wyznaczymy niewiadomą $x$ z drugiego równania układu i podstawimy otrzymane wyrażenie zamiast $x$ do pierwszego równania układu.

$$\begin{cases} 2x = \ \ 3y - 4 \ \ | : 2 \\ -4x + 6y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1{,}5\ y - 2 \\ -4(1{,}5y - 2) + 6y = 8 \end{cases}$$

Następnie rozwiążemy drugie równanie, przepisując pierwsze bez zmian.

$$\begin{cases} x = 1{,}5y - 2 \\ -6y + 8 + 6y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1{,}5y - 2 \\ -6y + 6y = 8 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1{,}5y - 2 \\ 0 \bullet y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Drugie z równań układu okazało się równaniem tożsamościowym, czyli takim, którego zbiór rozwiązań tworzą wszystkie liczby rzeczywiste. Rozwiązywany układ równań jest zatem układem nieoznaczonym, czyli takim, który ma nieskończenie wiele rozwiązań.

**Zapamiętaj!**

Jeżeli, rozwiązując układ równań metodą podstawiania, równanie, do którego podstawimy wyrażenie wyznaczone z drugiego równania, okaże się równaniem tożsamościowym, to układ równań ma nieskończenie wiele par liczb spełniających to równanie, czyli jest **układem nieoznaczonym**.

**Ćwiczenie 1**

Podany jest układ równań. Uporządkuj poniższe układy, tak aby utworzyły kolejne etapy rozwiązania danego układu równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

1. $\begin{cases} x = 4 - 2y \\ 8 - 4y + 2y = 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = 4 - 2y \\ y = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = 4 - 2y \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = 4 - 2y \\ -2y = \quad -2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = 4 - 2y \\ 2(4 - 2y) + 2y = 6 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = 4 - 2 \bullet 1 \\ y = 1 \end{cases}$

**Ćwiczenie 2**

Podany jest układ równań. Uporządkuj podane poniżej układy, tak aby utworzyły kolejne etapy rozwiązania danego układu równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} -3x + y = 8 \\ 5x + 3y = 10 \end{cases}$$

1. $\begin{cases} y = 8 + 3x \\ 14x = \ -14 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y = 8 + 3x \\ 5x + 3(8 + 3x) = 10 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = \ -1 \\ y = 8 + 3x \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = \ -1 \\ y = 8 + 3 \bullet (-1) \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = \ -1 \\ y = 5 \end{cases}$
6. $\begin{cases} y = 8 + 3x \\ 5x + 24 + 9x = 10 \end{cases}$
7. $\begin{cases} y = \ 8 + 3x \\ 5x + 3y = 10 \end{cases}$

**Ćwiczenie 3**

Wyznaczając $x$ z pierwszego równania układu $\begin{cases} 5x + 7y = 12 \\ 2x - 5y = 8 \end{cases}$, otrzymamy wyrażenie:

- ○ $2{,}4 - 1{,}4y$
- ○ $-1{,}6 \ + \ 0{,}4y$
- ○ $2{,}5\mathrm{y} \ + \ 4$
- ○ $\frac{12}{7} \ - \ \frac{5}{7}y$

**Ćwiczenie 4**

Wyznaczając $y$ z drugiego równania układu $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 4y = 10 \end{cases}$, otrzymamy wyrażenie

- $10 - 4x$
- $3 + 1{,}5x$
- $2 + \frac{2}{3}x$
- $2{,}5 - 0{,}25x$

**Ćwiczenie 5**

Po wyznaczeniu niewiadomej $x$ z pierwszego równania układu $\begin{cases} -2x + 5y = 12 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$ i podstawieniu otrzymanego wyrażenia w miejsce niewiadomej $x$ do drugiego równania i jego uproszczeniu otrzymamy

- $3{,}6\mathrm{y} = 2{,}6$
- $-4{,}5\mathrm{y} = 9{,}5$
- $-1{,}5\mathrm{y} = 11$
- $3\mathrm{y} = 22$

## Ćwiczenie 6

Po wyznaczeniu niewiadomej $y$ z drugiego równania układu $\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$ i podstawieniu otrzymanego wyrażenia w miejsce niewiadomej $y$ do pierwszego równania i jego uproszczeniu otrzymamy

- $\mathrm{x} = -8$
- $-0{,}5\mathrm{x} = 4$
- $-5\mathrm{x} = 34$
- $1\frac{2}{3}\mathrm{x} = 11$

## Ćwiczenie 7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 11**

Rozwiązując układ równań metodą podstawiania, otrzymujemy równanie $3x - 2 = 3x + 1$. Oznacza to, że układ jest

- oznaczony
- nieoznaczony
- sprzeczny

**Ćwiczenie 12**

Rozwiązując układ równań metodą podstawiania, otrzymujemy równanie $-2x + 3 = 2x + 3$. Oznacza to, że układ jest

- nieoznaczony
- oznaczony
- sprzeczny

**Ćwiczenie 13**

Rozwiązując układ równań metodą podstawiania, otrzymujemy równanie $x - 3 + 2 = 2x - x - 1$. Oznacza to, że układ jest

- nieoznaczony
- oznaczony
- sprzeczny

**Ćwiczenie 14**

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} -3x + 4y = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ jest para liczb

- $x = -11, y = -7$
- $x = -1\frac{2}{3}, y = -2\frac{1}{3}$
- $x = 5{,}8, y = 1{,}4$
- $x = 7\frac{2}{3}, y = 2\frac{1}{3}$

**Ćwiczenie 15**

Rozwiązując układ równań $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ metodą podstawiania, otrzymamy układ postaci

- $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x - 9x - 15 = 7 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x - 9x - 15 = 7 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x + 9x - 15 = 7 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x - 9x + 15 = 7 \end{cases}$

**Ćwiczenie 16**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Jeżeli rozwiązując układ równań metodą podstawiania, otrzymaliśmy równanie $-3x + 3x - 7 = -7$, to rozwiązywany układ jest sprzeczny.

- [ ] Para liczb $x = 9y = -5$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} -4x + 2y = 10 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$.

- [ ] Jeżeli rozwiązując układ równań metodą podstawiania, otrzymaliśmy równanie $8y - 7y + 2 = 2$, to rozwiązywany układ jest nieoznaczony.

- [ ] Wyznaczając $x$ z drugiego równania układu $\begin{cases} 5x - 7y = 12 \\ -4x + 7y = 5 \end{cases}$, otrzymamy $x = 1{,}75y - 1{,}25$.

**Ćwiczenie 17**

Rozwiąż układy równań metodą podstawiania.

1. $\begin{cases} x = 2y + 3 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y = x - 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = 2 - 3y \\ x - y = 10 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = y - 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x = 3y - 5 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

**Ćwiczenie 18**

Rozwiąż układy równań metodą podstawiania.

1. $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -3x + 2y = 8 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} -4x + 8y = 10 \\ 2x - 4y = -5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} -x - 2y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

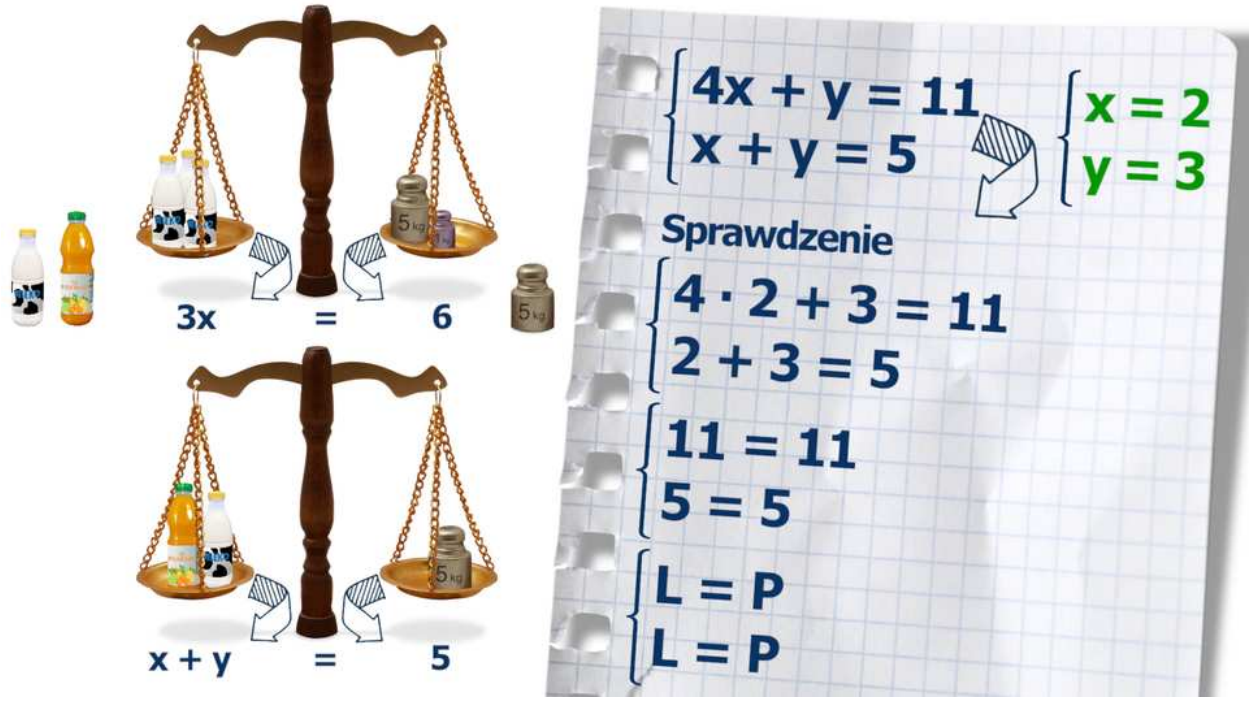
**Ćwiczenie 19**

Rozwiąż układy równań metodą podstawiania.

1. $\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -4x + 5y = 12 \\ 2x + 4y = 0{,}5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} -2y + 5x = 10 \\ -5x + 2y = 6 \end{cases}$
5. $\begin{cases} -3x + 10y = 5 \\ x - 5y = -1 \end{cases}$

# Metoda przeciwnych współczynników rozwiązywania układów równań

Metoda przeciwnych współczynników polega na tym, aby po dodaniu lub odjęciu równań stronami wyeliminować jedną z niewiadomych i otrzymać równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.



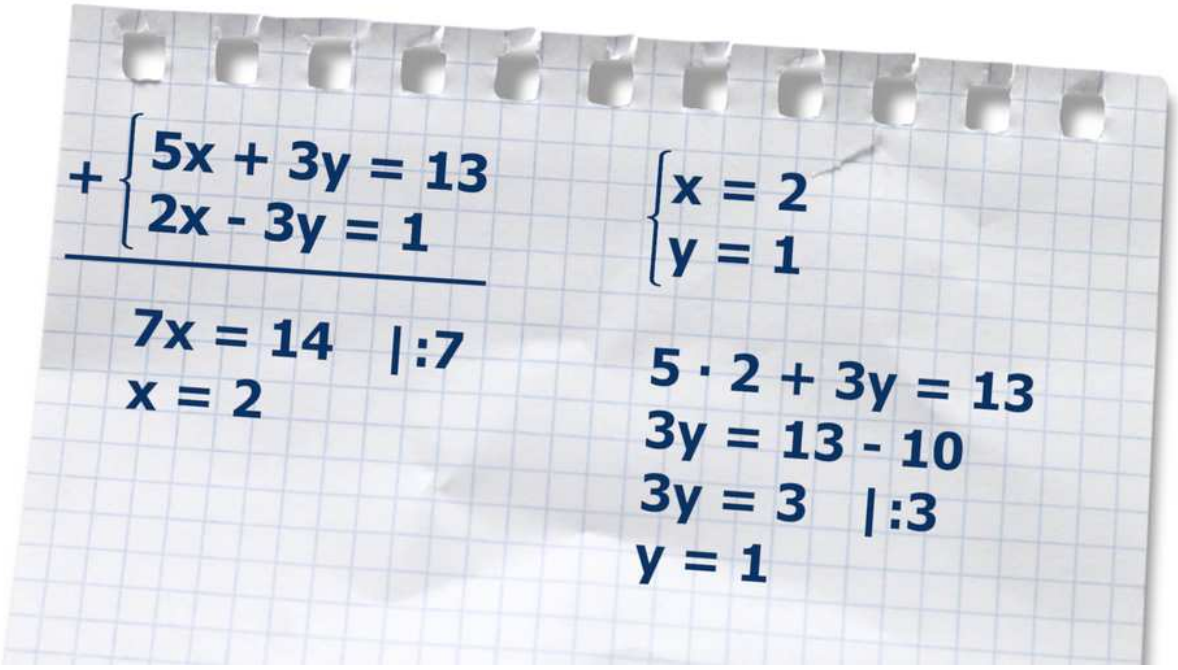

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

Omawiana metoda rozwiązywania układów równań nazywa się metodą przeciwnych współczynników, ponieważ gdy współczynniki przy wybranej niewiadomej są liczbami przeciwnymi, wystarczy dodać równania stronami w celu zredukowania jednej zmiennej i otrzymania równania z jedną niewiadomą.

**Przykład 1**



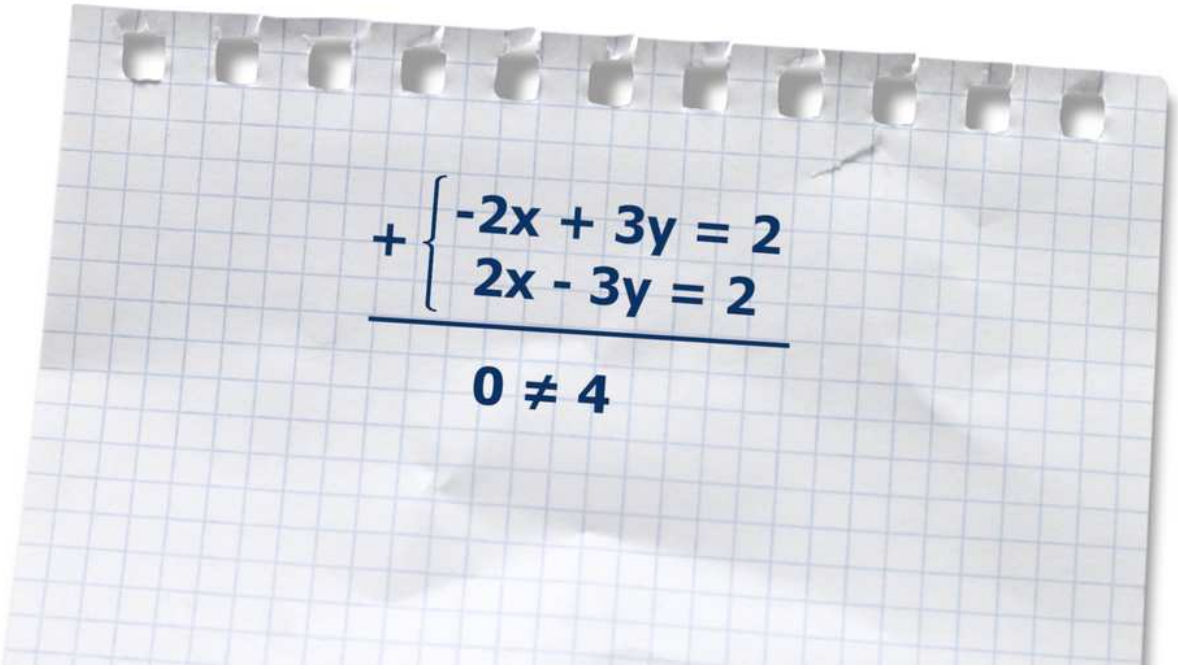

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 2**




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

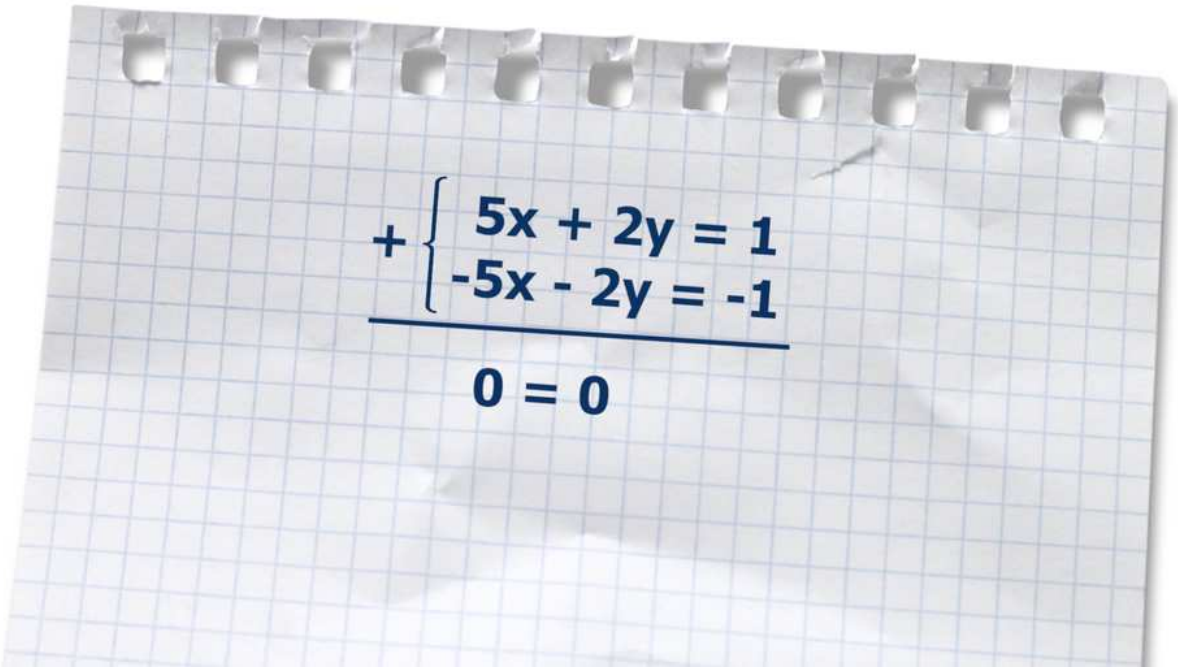
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Zapamiętaj!**

Jeżeli, rozwiązując układ równań metodą przeciwnych współczynników, równanie, które otrzymaliśmy w wyniku dodawania równań stronami, okaże się równaniem sprzecznym, to układ równań nie ma rozwiązania, jest **układem sprzecznym**.

**Przykład 3**




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

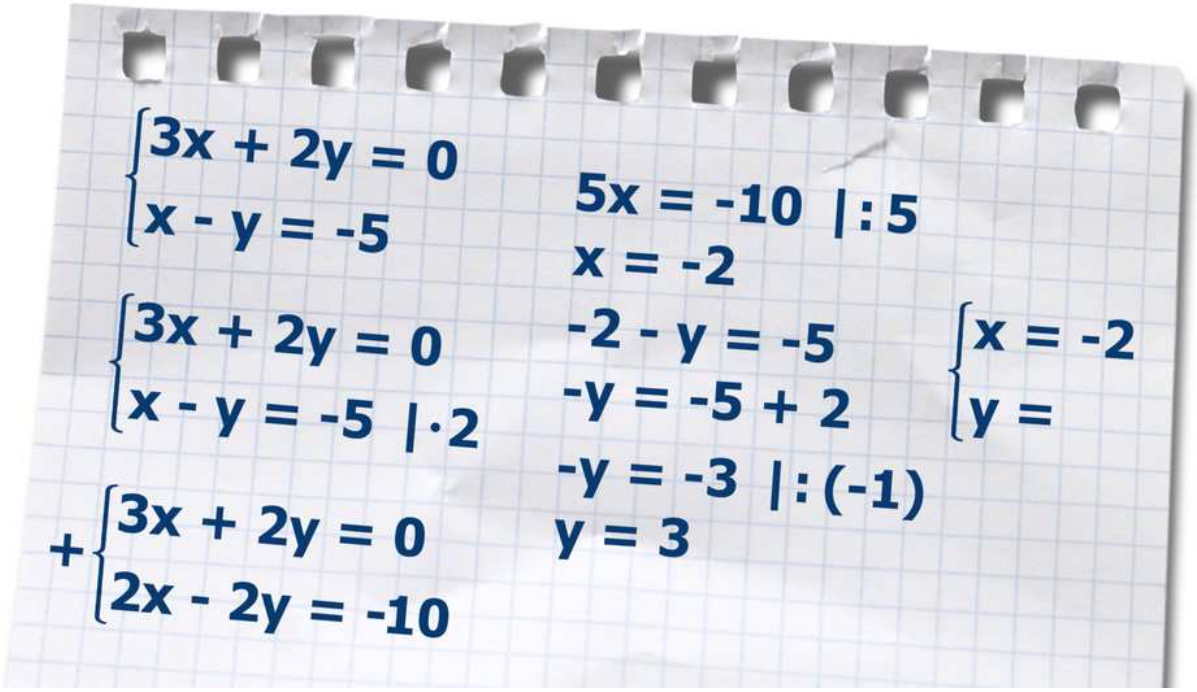
Animacja

**Zapamiętaj!**

Jeżeli, rozwiązując układ równań metodą przeciwnych współczynników, równanie, które otrzymaliśmy w wyniku dodawania równań stronami, okaże się równaniem tożsamościowym, to układ równań ma nieskończenie wiele par liczb spełniających ten układ, czyli jest to **układ nieoznaczony**.

**Przykład 4**

Nie zawsze współczynniki przy niewiadomych $x$ lub $y$ są liczbami przeciwnymi. Czasami trzeba obie strony jednego z równań pomnożyć lub podzielić przez odpowiednią liczbę różną od zera, aby otrzymać przeciwne współczynniki przy wybranej niewiadomej.



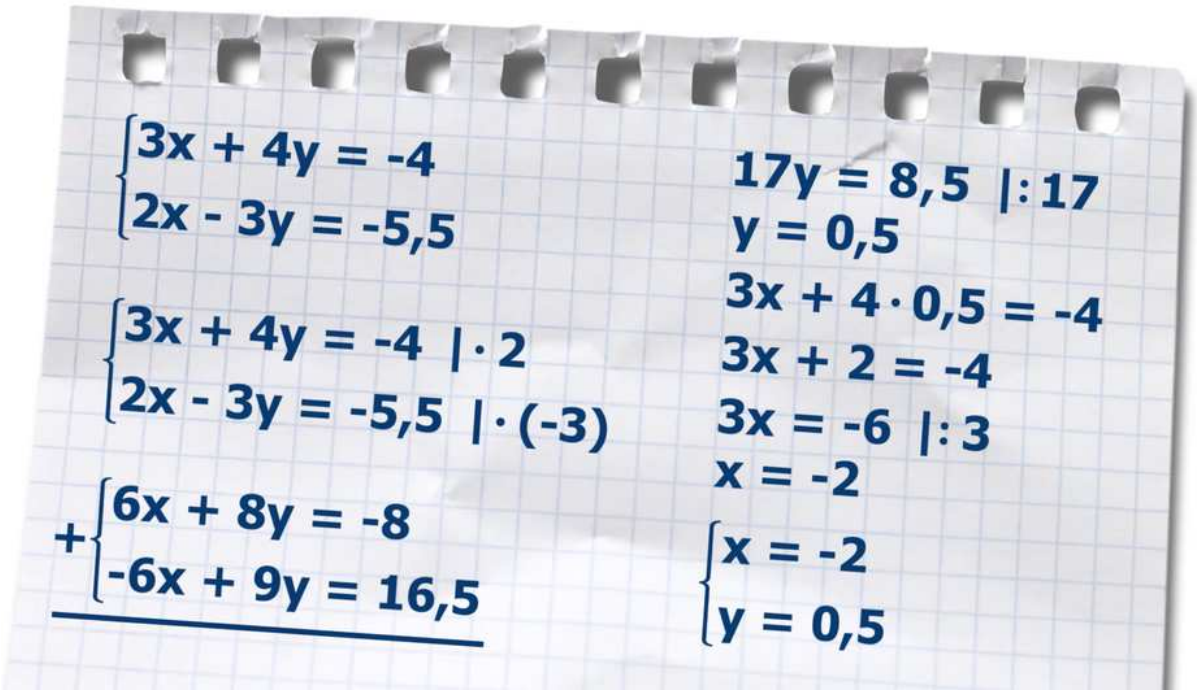

[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl](#)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 5**




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Ćwiczenie 1**

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=-4 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

**Ćwiczenie 2**

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

1. $\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ x - y = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = -5 \end{cases}$

**Ćwiczenie 3**

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

1. $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 4x + 3y = -4 \\ 3x - 5y = -3 \end{cases}$

**Ćwiczenie 4**

Dodając stronami równania układu $\begin{cases} 5x + 7y = 12 \\ 2x - 7y = 2 \end{cases}$, otrzymamy równość

- ◯ $x = 2$
- ◯ $7y = 14$
- ◯ $7x = 14$
- ◯ $7x = 10$

**Ćwiczenie 5**

Aby zredukować zmienną $x$ z układu równań $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$, należy drugie równanie pomnożyć przez

- $2$
- $-3$
- $3$
- $2$

**Ćwiczenie 6**

Aby zredukować zmienną $x$ z układu równań $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$, należy pierwsze i drugie równanie pomnożyć odpowiednio przez

- $5$ i $2$
- $2$ i $-3$
- $2$ i $3$
- $5$ i $2$

## Ćwiczenie 7

Przeciągnij i upuść tak, aby utworzyć kolejne etapy rozwiązania układu równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = -9 \end{cases}$$

2x+3y=134x-y=-9

**1. Etap**

$2x + 3y = 13 | \cdot (-2)$

$4x - y = -9$

**2. Etap**

$\{-4x$

$-2$ $5$ $7$ $4x$ $-26$ $-7$ $15$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8

Przeciągnij i upuść tak, aby utworzyć kolejne etapy rozwiązania układu równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} -3x + 5y = -16 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

-3x+5y=-162x-y=6

**1. Etap**

$-3x + 5y = -16 | \cdot 2$

$2x - y = 6 | \cdot \{3$

$-32$ $-3$ $2$ $-2$ $6x$ $-6$ $-6x$ $-10$ $7y$ $-3y$ $-3x$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 11

Dodając równania stronami w metodzie przeciwnych współczynników, otrzymujemy równanie $2x = 0$. Oznacza to, że układ jest

- oznaczony
- nieoznaczony
- sprzeczny

## Ćwiczenie 12

Dodając równania stronami w metodzie przeciwnych współczynników, otrzymujemy równanie $0x = 5$. Oznacza to, że układ jest

- sprzeczny
- nieoznaczony
- oznaczony

## Ćwiczenie 13

Dodając równania stronami w metodzie przeciwnych współczynników, otrzymujemy równanie $0x = 0$. Oznacza to, że układ jest

- oznaczony
- sprzeczny
- nieoznaczony

## Ćwiczenie 14

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x - y = 4\frac{1}{2} \\ -x + y = -3\frac{1}{2} \end{cases}$ jest para liczb:

- ○ $x = -1y = -2$
- ○ $x = 1y = -4\frac{1}{2}$
- ○ $x = 1y = -2\frac{1}{2}$
- ○ $x = 4\frac{1}{2}y = 1$

## Ćwiczenie 15

Zaznacz zdanie prawdziwe.

- ☐ Jeżeli rozwiązując układ równań metodą przeciwnych współczynników, otrzymaliśmy równanie postaci: -$7\mathrm{x} + 7\mathrm{x} - 7 = -7$, to rozwiązywany układ jest sprzeczny.
- ☐ Jeżeli rozwiązując układ równań metodą przeciwnych współczynników, otrzymaliśmy równanie postaci: $2\mathrm{y} - 2\mathrm{y} + 3 = 2$, to rozwiązywany układ jest nieoznaczony.
- ☐ Mnożąc drugie równanie układu równań $\begin{cases} 5x - 3y = 12 \\ -4x + y = 5 \end{cases}$ przez $3$ i dodając równania stronami, otrzymamy równanie $-7x = 27$.
- ☐ Para liczb $\mathrm{x} = 4, \mathrm{y} = 3$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

# Rozwiązywanie układów równań

**Ćwiczenie 1**

Rozwiąż układy równań dowolną metodą.

1. $\begin{cases} y = 5 - x \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = 4y - 2 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - 1{,}2y = 2 \\ 4x - 5y = 10 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2{,}3x - y = 4 \\ 2x + 4y = 6{,}4 \end{cases}$
5. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 10 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}y = 4 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$

**Ćwiczenie 2**

Rozwiąż układy równań dowolną metodą.

1. $\begin{cases} x - y = -1\frac{1}{2} \\ 2x + y = -1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - 2y = 1,5 \\ x - 2y = -1,5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ x - \frac{1}{2}y = 2\frac{1}{2} \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3x - y = -1\frac{4}{7} \\ 7x + \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 1 = y \\ x - 3y = 3 \end{cases}$

**Ćwiczenie 3**

Rozwiąż układy równań dowolną metodą.

1. $\begin{cases} \frac{2x+y}{3} + y = 4 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -(x-3y) + 2(x-y) = 2x+3 \\ x - 2(3x-4y) = 12 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \frac{2x-y}{2} - \frac{x+2y}{4} = x - y \\ 2(x+y) - 3(2x-y) = 12 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{2x-y}{2} - (2x-y) = 4 \\ 2x - \frac{x-3y}{2} = y - 4 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2(x-2) - (x+2y) = 4x+2 \\ 3x + 3y - (-2x+y) = 3 - x \end{cases}$
6. $\begin{cases} \frac{1-2x}{2} - \frac{-x-2y}{4} = \frac{x+y}{8} \\ \frac{x-2}{2} - \frac{y-1}{5} = \frac{x-y}{10} \end{cases}$

**Ćwiczenie 4**

Rozwiąż układy równań dowolną metodą.

1. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3y}{5} = 3\frac{1}{2} \\ x - 2y = -9 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \frac{2x-y}{3} + 2x = -6\frac{1}{3} \\ 3(x-2) + 4(1-y) = -20 \end{cases}$
3. $\begin{cases} -3(x+2) + 2(x-y) = -1 \\ \frac{x+1}{2} - \frac{y}{3} = 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{y-2}{2} = -2 \\ x + 3(y+2) = -1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} -2(1-x) + 3y = x + \frac{2}{3} \\ x + 3(x-y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{3} \end{cases}$
6. $\begin{cases} \frac{x+2y}{2} - \frac{x-2y}{3} = \frac{x+y}{2} - \frac{2}{3} \\ 2(3-y) - (2+x) = \frac{1}{2}\left(2x-16\right) \end{cases}$

# Opisywanie i rozwiązywanie za pomocą układów równań zadań z kontekstem praktycznym

Zadania tekstowe z wykorzystaniem układów równań będziemy rozwiązywać w następujących etapach:

- analiza zadania,
- układ równań i jego rozwiązanie,
- sprawdzenie rozwiązania układu równań z warunkami zadania,
- zapisanie odpowiedzi.

**Przykład 1**

W nadmorskim pensjonacie znajdują się pokoje dwuosobowe, trzyosobowe i czteroosobowe. Razem wszystkich pokoi jest 90. Pensjonat może przyjąć 236 wczasowiczów. Ile jest pokoi trzyosobowych, a ile czteroosobowych, jeżeli pokoi dwuosobowych jest 44?
Analiza zadania.
Oznaczmy przez $x$ liczbę pokoi trzyosobowych, a przez $y$ liczbę pokoi czteroosobowych.

Tabela. Dane

| | |
|---|---|
| Liczba wszystkich pokoi | 90 |
| Liczba pokoi dwuosobowych | 44 |
| Liczba pokoi trzyosobowych | $x$ |
| Liczba pokoi czteroosobowych | $y$ |

Tabela. Dane

| | |
|---|---|
| Liczba miejsc we wszystkich pokojach | 236 |
| Liczba miejsc w pokojach dwuosobowych | $2 \bullet 44$ |
| Liczba miejsc w pokojach trzyosobowych | $3 \bullet x$ |

| | |
|---|---|
| Liczba miejsc w pokojach czteroosobowych | $4 \bullet y$ |

**Przykład 2**

Suma cyfr w pewnej liczbie dwucyfrowej jest równa $10$. Znajdź tę liczbę, wiedząc, że jeżeli przestawimy w niej cyfry, to otrzymamy liczbę o $18$ mniejszą.
Analiza zadania.

Tabela. Dane

| | Cyfra dziesiątek | Cyfra jedności | Liczba |
|---|---|---|---|
| Pierwsza liczba dwucyfrowa | $x$ | $y$ | $10x + y$ |
| Druga liczba dwucyfrowa | $y$ | $x$ | $10y + x$ |

Oznaczmy przez $x$ cyfrę dziesiątek szukanej liczby dwucyfrowej, a przez $y$ cyfrę jedności szukanej liczby dwucyfrowej, a następnie zapiszmy tę liczbę w systemie dziesiątkowym.

**Ćwiczenie 1**
Suma licznika i mianownika pewnego ułamka wynosi $22$. Mianownik ułamka jest o $1$ większy od dwukrotności jego licznika. Znajdź ten ułamek.

**Ćwiczenie 2**
Suma dwóch liczb wynosi $100$. Znajdź te liczby, wiedząc, że jeżeli większą z nich zmniejszymy o $3$, a mniejszą zwiększymy o $3$, to otrzymamy liczby równe.

**Ćwiczenie 3**
Różnica dwóch liczb wynosi $20$. Znajdź te liczby, wiedząc, że jeżeli większą z nich zwiększymy o $10$, a mniejszą zwiększymy trzykrotnie, to otrzymamy liczby równe.

**Ćwiczenie 4**
Połowa pewnej liczby dwucyfrowej jest równa sumie jej cyfr. Znajdź tę liczbę, wiedząc, że cyfra dziesiątek jest o $7$ mniejsza od cyfry jedności.

**Ćwiczenie 5**

Suma cyfr w pewnej liczbie dwucyfrowej wynosi $15$. Znajdź tę liczbę, wiedząc, że jeżeli przestawimy w niej cyfry, to otrzymamy liczbę o $9$ większą.

**Ćwiczenie 6**

Dwa lata temu Ania była $3$ razy młodsza od Bartka. Za osiem lat będzie od niego $2$ razy młodsza. Ile lat ma Ania, a ile Bartek?

**Ćwiczenie 7**

Gdy urodził się Adam, jego mama miała $26$ lat. Ile lat miał Adam, gdy był młodszy od swojej mamy $3$ razy?

**Ćwiczenie 8**

Siostra jest $4$ razy starsza od brata. Sześć lat temu była od niego $7$ razy starsza.

1. Ile lat ma siostra, a ile brat?
2. Za ile lat siostra będzie $3$ razy starsza od brata?

**Ćwiczenie 9**

Na obóz harcerski wyjechało $176$ osób. Stosunek liczby harcerek do liczby harcerzy jest równy $4:7$. Ile dziewcząt i ilu chłopców wyjechało na ten obóz?

**Ćwiczenie 10**

Marek i Ala dostają co miesiąc kieszonkowe od swoich rodziców. W ciągu roku rodzeństwo otrzymało $660$ złotych. Ile złotych kieszonkowego miesięcznie dostaje od rodziców Marek, jeżeli kieszonkowe Ali jest o $15$ złotych wyższe od kieszonkowego Marka?

**Ćwiczenie 11**

Marysia, kupując w księgarni ołówek i długopis, zapłaciła $5,20$ zł. Justyna, kupując $4$ takie same ołówki i taki sam długopis, zapłaciła $8{,}80$ zł. Ile kosztował długopis, a ile ołówek?

**Ćwiczenie 12**

Klasy pierwsze zaplanowały wyjazd integracyjny do pewnego gospodarstwa agroturystycznego, które dysponuje tylko pokojami dwuosobowymi i trzyosobowymi. W wyjeździe będzie uczestniczyć $97$ uczniów, dla których zarezerwowano $36$ pokoi. Ile pokoi dwuosobowych, a ile trzyosobowych zarezerwowano, jeżeli w każdym pokoju będzie mieszkać maksymalna liczba osób?

**Ćwiczenie 13**

Mama i córka ważą razem $80\ \mathrm{kg}$. Jeżeli córka schudnie $1\ \mathrm{kg}$, a mama przytyje $1\ \mathrm{kg}$, to córka będzie trzy razy lżejsza od mamy. Ile waży mama, a ile córka?

**Ćwiczenie 14**

Na zajęcia tańca towarzyskiego uczęszczają dziewczęta i chłopcy, przy czym dziewcząt jest o $12$ więcej niż chłopców. Gdyby ośmiu chłopców zrezygnowało z zajęć, to dziewcząt byłoby dwa razy więcej niż chłopców. Ile dziewcząt, a ile chłopców uczęszcza na zajęcia taneczne?

**Ćwiczenie 15**

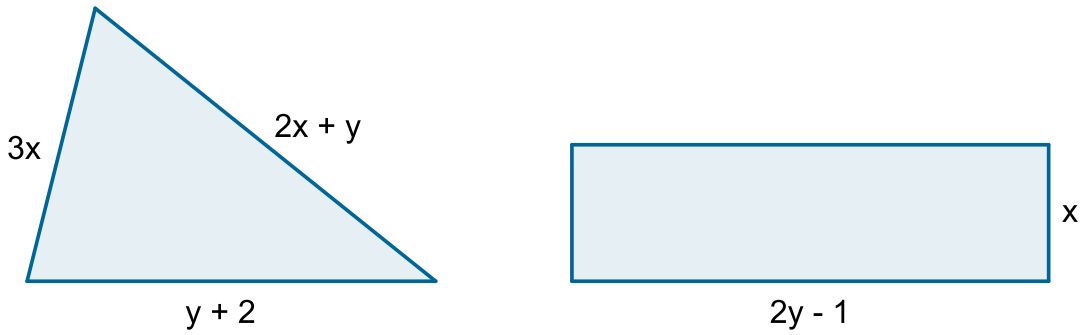
Do przewiezienia żwiru potrzeba $28$ samochodów ciężarowych. Ile potrzeba samochodów o ładowności $4$ ton i $7$ ton, jeżeli łączna masa załadunku to $163$ tony?

**Ćwiczenie 16**

W dwóch pudełkach znajduje się pewna liczba jednakowych cukierków, razem $138$ sztuk. Jeżeli z jednego pudełka przełożymy $4$ cukierki do drugiego, to w obu pudełkach będzie tyle samo cukierków. Ile cukierków znajduje się w każdym z pudełek?

**Ćwiczenie 17**

Prostokąt i trójkąt mają równe obwody, które wynoszą $22$. Znajdź długości boków tych figur.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 18**

Suma cyfr pewnej liczby trzycyfrowej wynosi $14$. Znajdź tę liczbę, wiedząc, że jej cyfra setek jest dwukrotnie większa od cyfry jedności, a cyfra dziesiątek jest o $1$ mniejsza od cyfry setek.

**Ćwiczenie 19**

Średnia arytmetyczna trzech liczb wynosi $34$. Znajdź te liczby, wiedząc, że największa z nich jest $2$ razy większa od najmniejszej, a najmniejsza jest o $6$ mniejsza od środkowej liczby.

# Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem układów równań

Układy równań wykorzystujemy do rozwiązywania zadań związanych ze stężeniem procentowym roztworów.

### Ćwiczenie 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 3

Ala przygotowuje na urodziny sałatkę owocową, składającą się z owoców i jogurtu. Do przygotowania sałatki Ala użyła jogurtu truskawkowego o zawartości tłuszczu $2\%$ i jogurtu malinowego o zawartości tłuszczu $4\%$. Po zmieszaniu jogurtów otrzymała $500\ \mathrm{g}$ jogurtu o zawartości tłuszczu $3{,}5\%$. Ile gramów każdego z jogurtów użyła Ala do przygotowania sałatki?

### Ćwiczenie 4

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 5**

Czy wystarczy $100\ \mathrm{g}$ solanki o stężeniu $20\,\%$ i $75\ \mathrm{g}$ solanki o stężeniu $30\,\%$, aby otrzymać $150\ \mathrm{g}$ solanki o stężeniu $28\,\%$? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych poniżej.

- ◯ Nie, zabraknie solanki dwudziestoprocentowej.
- ◯ Nie, zabraknie obu solanek.
- ◯ Tak.
- ◯ Nie, zabraknie solanki trzydziestoprocentowej.

## Ćwiczenie 6

Podczas lekcji chemii uczniowie, pracując w sześciu dwuosobowych grupach, mieli dobrać odpowiednie ilości wodnych roztworów kwasu solnego o stężeniach dwuprocentowym i siedemnastoprocentowym, tak aby uzyskać $100\mathrm{g}$ roztworu o podanym stężeniu. Każda grupa miała do dyspozycji $100\mathrm{g}$ roztworu dwuprocentowego i $50\mathrm{g}$ roztworu siedemnastoprocentowego. Stężenia procentowe otrzymanych roztworów miały wynosić odpowiednio:
Grupa $\mathrm{I} - 5\%$
Grupa $\mathrm{II} - 7\%$
Grupa $\mathrm{III} - 10\%$
Grupa $\mathrm{IV} - 8\%$
Grupa $\mathrm{V} - 12\%$
Grupa $\mathrm{VI} - 6\%$

Przeciągnij i upuść numery grup do obszarów A i B, tak aby w obszarze A znalazły się te, którym udało się wykonać ćwiczenie, a w obszarze B te, którym, z powodów od nich niezależnych, nie udało się wykonać ćwiczenia.

A

B

Grupa $\mathrm{II}$ | Grupa $\mathrm{VI}$ | Grupa $\mathrm{I}$ | Grupa $\mathrm{V}$ | Grupa $\mathrm{IV}$ | Grupa $\mathrm{III}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7

Iga kupiła dwie bluzki i spódnicę, za które zapłaciła $150$ zł. Aneta kupiła takie same dwie bluzki i spódnicę po obniżce cen na wyprzedaży. Bluzka kosztowała wówczas o $20\%$ mniej, a spódnica o $10\%$ mniej. Za te zakupy Aneta zapłaciła $127$ zł. Ile kosztowała przed wyprzedażą bluzka, a ile spódnica?

**Ćwiczenie 8**

Podczas aukcji wystawiono na sprzedaż $600$ obrazów należących do dwóch galerii „Art” i „Modern”. Sprzedano $60\%$ obrazów należących do galerii „Art” i $90\%$ obrazów należących do galerii „Modern”. Sprzedane podczas aukcji obrazy stanowiły $70\%$ wszystkich obrazów wystawionych na sprzedaż przez obie galerie. Ile obrazów wystawiła na sprzedaż każda z galerii?

**Ćwiczenie 9**

Podczas wakacji Ela wraz z rodzicami brała udział w rejsie statkiem po Wiśle. Część rejsu, która odbywała się w górę rzeki (statek płynął pod prąd) trwała $4$ godziny, a powrót w dół rzeki (statek płynął z prądem) trwała $3{,}5$ godziny. Port, z którego rozpoczyna się rejs i port, do którego dopływa statek, kończąc pierwszą część rejsu, są oddalone od siebie o $35\ \mathrm{km}$. Jaka jest prędkość prądu rzeki, a jaka prędkość własna statku? Prędkość własna statku, to prędkość statku płynącego po wodzie stojącej (np. jeziorze).

**Ćwiczenie 10**

Kasia i Karol trenują bieganie na bieżni wokół stadionu. Jeżeli oboje biegną w tę samą stronę, spotykają się (Karol „dubluje” Kasię) po $25$ minutach, a jeżeli rozpoczynają bieg w przeciwne strony, spotykają się po $10$ minutach. Z jaką prędkością biegnie Karol, a z jaką Kasia, jeżeli bieżnia wokół stadionu ma $500\ \mathrm{m}$ długości?

**Ćwiczenie 11**

Idąc ze stacji kolejowej w Szklarskiej Porębie Górnej do Wodospadu Kamieńczyka, turysta poruszał się ze średnią prędkością $4{,}5\ \mathrm{km}/h$. Następnie turysta wszedł na Szrenicę, poruszając się ze średnią prędkością $1{,}8\ \mathrm{km}/h$. Długość całej trasy, którą pokonał, wynosiła $6{,}15\ \mathrm{km}$, a łączny czas jego wyprawy (pomijając odpoczynki i czas na podziwianie widoków) wyniósł $2$ godziny i $25$ minut. Ile czasu turysta szedł ze stacji do wodospadu, a ile wchodził na Szrenicę?

**Ćwiczenie 12**

Firmy $A$ i $B$ zainwestowały pewne sumy pieniędzy, łącznie $200\ \mathrm{mln}$ zł. Firma $A$ zakładała, że z inwestycji osiągnie $12\%$ zysku, a firma $B$, że osiągnie $8\%$ zysku. Gdyby firma $B$ zainwestowała o $50\ \mathrm{mln}$ zł więcej, to zysk osiągnięty przez obie firmy byłby taki sam. Jaką kwotę zainwestowała każda z firm?

**Ćwiczenie 13**

W ogródku babci Marysi rosną róże i tulipany, razem $50$ kwiatów. W kolorze czerwonym jest $20\,\%$ róż i $40\,\%$ tulipanów. Ile róż i ile tulipanów rośnie w ogródku babci Marysi, jeżeli czerwonych kwiatów jest $12$?

**Ćwiczenie 14**

Obwód prostokąta wynosi $20\ \mathrm{cm}$. Jeżeli jeden z jego boków wydłużymy o $20\,\%$, a drugi bok skrócimy o $20\,\%$, to otrzymamy kwadrat. Jakie długości mają boki prostokąta?

**Ćwiczenie 15**

Tabliczka czekolady z bakaliami ważąca $100\ \mathrm{g}$ kosztuje $4$ zł. Ile waży czekolada zawarta w tej tabliczce, jeżeli $100\ \mathrm{g}$ tej czekolady kosztuje $5$ zł, a $100\ \mathrm{g}$ bakalii kosztuje $2{,}50$ zł?

# Przyporządkowanie

W praktyce często korzystamy z  zależności między różnymi wielkościami.

**Przykład 1**

Przeprowadź symulację kosztów tankowania. Obserwuj, jak zmienia się kwota należności w zależności od ilości zatankowanego paliwa.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DVSbWZq6g

Symulacja kosztów tankowania paliwa jest przykładem modelowania matematycznego. Tworzenie modelu rozpoczyna się od opisu zjawiska, a następnie określamy zależności między danymi wielkościami.

**Przykład 2**

Droga $s$, jaką pokonuje samochód jadący ze stałą prędkością $v$, zależy od czasu $t$. Zależność tę możemy opisać za pomocą równości

$$s = \mathrm{vt}$$

Obserwuj, jak zmienia się długość drogi pokonywanej przez samochód jadący ze stałą prędkością $v = 80$ km/h.

- W ciągu 1 godziny samochód pokonuje drogę długości 80 km.
- W ciągu 2 godzin samochód pokonuje drogę długości 160 km.
- W ciągu pół godziny samochód pokonuje drogę długości 40 km.
- W ciągu 15 minut samochód pokonuje drogę długości 20 km.
- W ciągu 3 godzin 45 minut samochód pokonuje drogę długości 300 km.

Samochód porusza się ze stałą prędkością 80 km/h.

| czas [t] w h | 0.25 | 0.50 | 0.75 | 1.00 | 1.25 | 1.50 | 1.75 | 2.00 | 2.25 | 2.50 | 2.75 | 3.00 | 3.25 | 3.50 | 3.75 | 4.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| droga [s] w km | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 | 180 | 200 | 220 | 240 | 260 | 280 | 300 | 320 |

Zasób interaktywny dostępny pod adresem
https://zpe.gov.pl/a/DVSbWZq6g

**Przykład 3**

- Energia kinetyczna $E_k$ ciała poruszającego się z prędkością $v$ zależy od tej prędkości i masy danego ciała $m$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Energia kinetyczna jest równa pracy, jaką należy wykonać, by ciało o masie $m$ rozpędzić od prędkości 0 (względem przyjętego układu odniesienia) do danej prędkości $v$.
Dla ciał poruszających się z prędkościami bliskimi prędkości światła energia kinetyczna obliczana jest według innego wzoru. Energia kinetyczna jest różnicą pomiędzy energią całkowitą i energią spoczynkową.

- Energia potencjalna grawitacji ziemskiej ciała o masie $m$, znajdującego się na wysokości $h$ ponad poziomem ziemi, jest równa iloczynowi $m$, $h$ i przyspieszenia ziemskiego $g$

$$E_p = \mathrm{mgh}$$

**Ćwiczenie 1**

Każdą osobę, zameldowaną w Polsce na pobyt stały dłuższy niż $3$ miesiące, rejestruje się w Powszechnym Elektronicznym Systemie Ewidencji Ludności, nadając jej unikatowy symbol, nazywany numerem PESEL – jest to $11$-cyfrowy, stały symbol numeryczny. Jednoznaczne przyporządkowanie numeru PESEL do osoby jest przydatne przy tworzeniu osobowych baz danych. Co roku do każdej ze szkół przesyłane są zestawienia, w których wyniki egzaminów zewnętrznych przypisane są do numerów PESEL uczniów, którzy w danej szkole zdawali te egzaminy. W ten sposób jednoznacznie identyfikuje się wynik egzaminu z konkretnym uczniem.
Wpisz swój numer PESEL i sprawdź, jakie informacje o tobie są tam zakodowane.

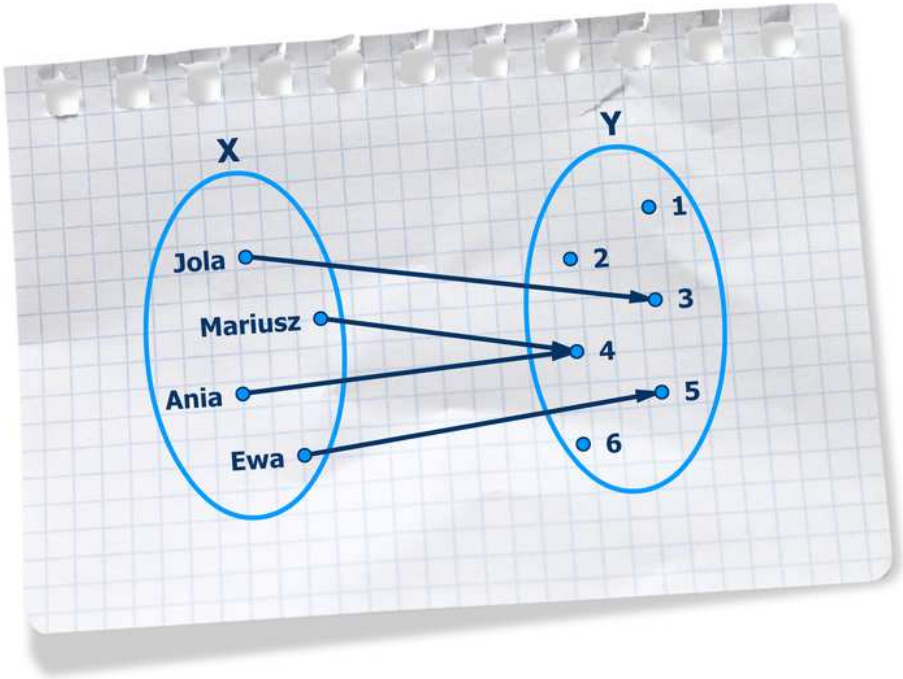



Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DVSbWZq6g

Zależności między wielkościami możemy także opisywać za pomocą grafów.

**Przykład 4**

Graf opisuje sytuację, w której każdej z osób: Mariuszowi, Joli, Ewie i Ani została przyporządkowana ocena z matematyki, jaką otrzymała na koniec roku szkolnego.




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Animacja.

# Pojęcie funkcji. Zależności funkcyjne.

**Definicja: Funkcja**

- Funkcją $f$ ze zbioru $X$ w zbiór $Y$ nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru $X$ przyporządkowany jest dokładnie jeden element zbioru $Y$.

**Definicja: Dziedzina funkcji**

Zbiór $X$ nazywamy dziedziną funkcji, a jego elementy argumentami funkcji.

**Definicja: Przeciwdziedzina funkcji**

Zbiór $Y$ nazywamy przeciwdziedziną funkcji, a każdy element $y$ tego zbioru, który został przyporządkowany co najmniej jednemu argumentowi $x$, nazywamy wartością funkcji f dla argumentu $x$, co zapisujemy symbolicznie $y = f(x)$. Symbolicznie funkcję $f$ określoną w zbiorze $X$ o wartościach w zbiorze $Y$ zapisujemy w postaci

$$f : X \to Y$$

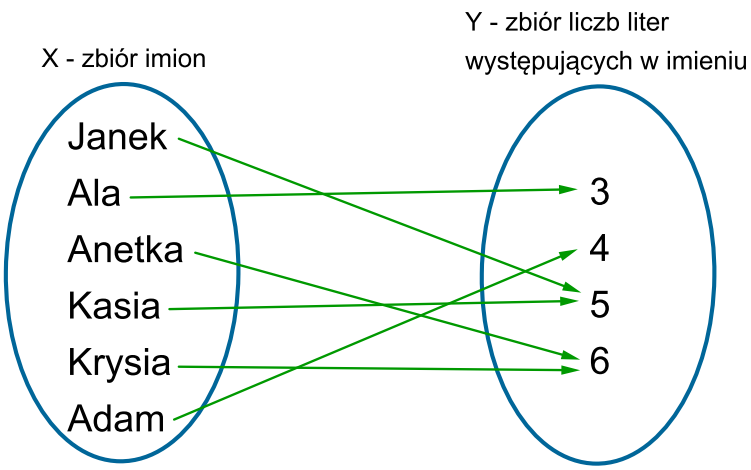
**Definicja: Zbiór wartości funkcji**

Zbiór złożony ze wszystkich elementów, które są wartościami funkcji $f$ dla wszystkich argumentów dziedziny, nazywamy zbiorem wartości funkcji $f$ i oznaczamy ZW.

Funkcjami są przyporządkowania opisane jedynie w przykładzie 1.

**Przykład 1**

Wyznaczmy dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f : X \to Y$.

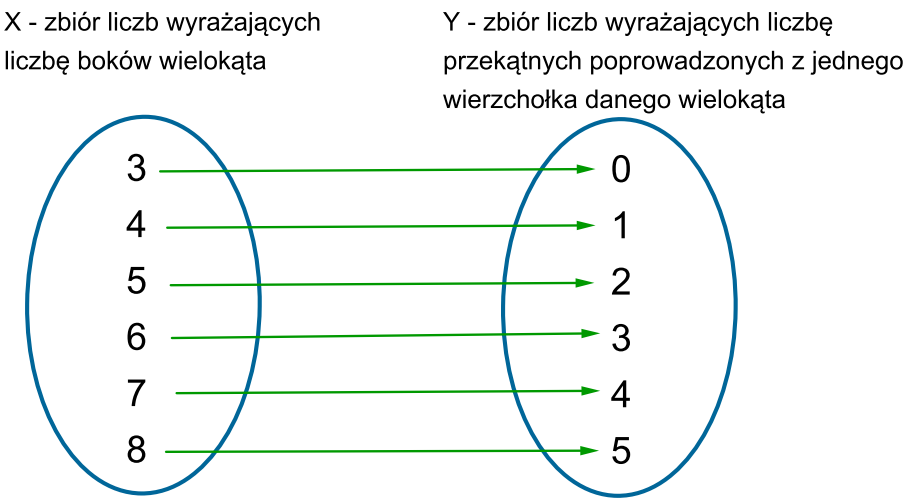



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy przez $X$ zbiór imion dzieci oraz przez $Y$ zbiór liczb liter występujących w danym imieniu.
Dziedziną funkcji $f$ jest zbiór $X = \{\text{Janek, Ala, Anetka, Kasia, Krysia, Adam}\}$. Jest to zbiór 6 elementowy. Zbiorem wartości funkcji $f$ jest zbiór $Y = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Jest to zbiór 4 - elementowy.

**Przykład 2**

Wyznaczmy dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f : X \to Y$.

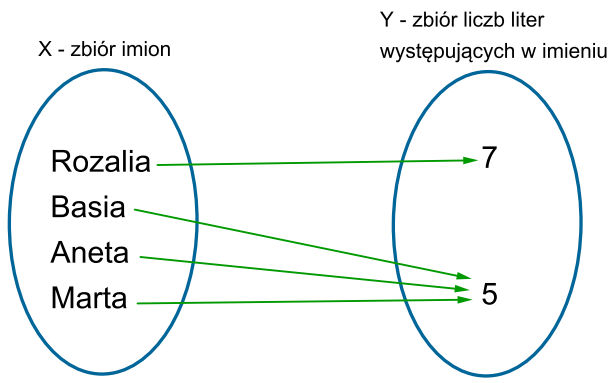


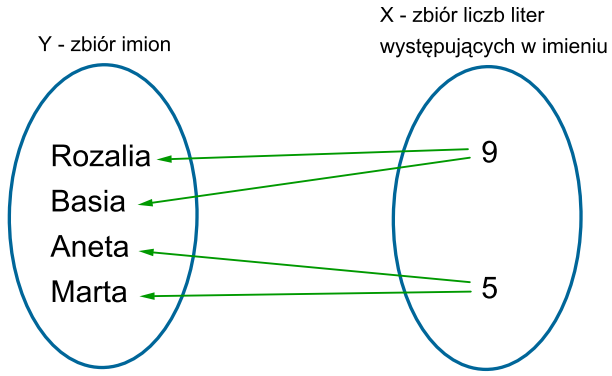

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

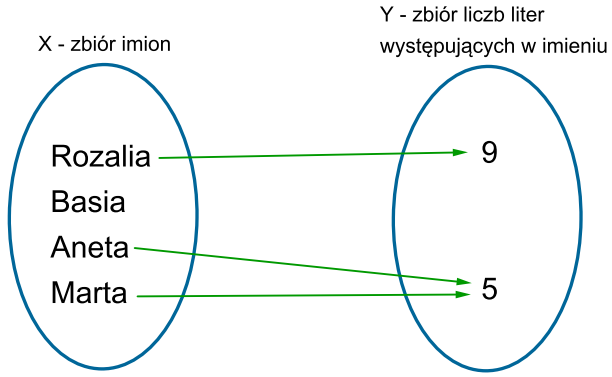
Oznaczmy przez $X-$ zbiór liczb wyrażających liczbę boków wielokąta oraz przez $Y-$ zbiór liczb wyrażających liczbę przekątnych poprowadzonych z jednego wierzchołka danego wielokąta.
Dziedziną funkcji $f$ jest zbiór $X = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$. Jest to zbiór $6-$ elementowy.
Zbiorem wartości funkcji $f$ jest zbiór $Y = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Jest to zbiór $6-$ elementowy.

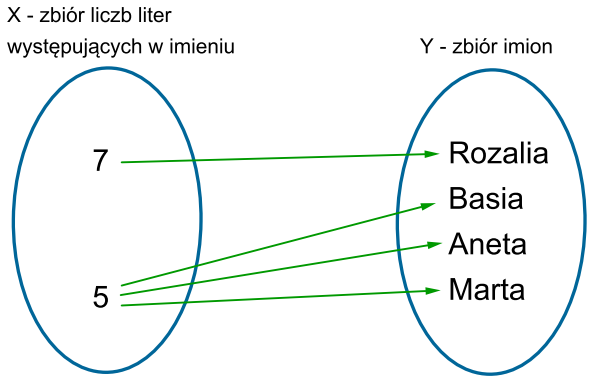
## Ćwiczenie 1

Który z poniższych grafów przedstawia funkcję $f : X \to Y$.



**Ćwiczenie 2**

Która z poniższych tabeli przedstawia funkcję $f : X \to Y$.

**Ćwiczenie 3**

Rozstrzygnij, czy opisane przyporządkowanie jest funkcją, czy nie.

- [ ] Każdemu samochodowi jest przyporządkowany numer podwozia.
- [ ] Każdemu nauczycielowi przyporządkowujemy klasy, w których uczy.
- [ ] Każdej klasie jest przyporządkowany nauczyciel, pełniący funkcję głównego wychowawcy.
- [ ] Każdej osobie jest przyporządkowany numer PESEL.
- [ ] Każdemu imieniu przyporządkowujemy ucznia mojej klasy.
- [ ] Każdemu człowiekowi jest przyporządkowana grupa krwi
- [ ] Każdemu dziecku jest przyporządkowane rodzeństwo.

**Ćwiczenie 4**

Rozstrzygnij, czy opisane przyporządkowanie jest funkcją, czy nie.

- [ ] Każdy osobie jest przyporządkowany numer telefonu.
- [ ] Każdej z ocen przyporządkowujemy osoby, które otrzymały daną ocenę z ostatniego sprawdzianu.
- [ ] Każdej mamie jest przyporządkowane tylko jedno dziecko.
- [ ] Każdej osobie jest przyporządkowana masa jej ciała.
- [ ] Każdemu z miast Wilnu, Rzymowi, Pradze, Helsinkom jest przyporządkowana nazwa państwa, którego to miasto jest stolicą.
- [ ] Każdej roślinie jest przyporządkowana nazwa rodziny, do której należy.

**Ćwiczenie 5**

Podaj przykład przyporządkowania, będącego funkcją, które można utworzyć, wykorzystując dane zawarte w:

1. dowodzie osobistym,
2. paszporcie.

## Ćwiczenie 6

Wybierz zbiory $X$ oraz $Y$ tak, aby przyporządkowanie $f : X \to Y$ określało funkcję.

a) $X =$ ____

$Y =$ ____

b) $X =$ ____

$Y =$ ____

c) $X =$ ____

$Y =$ ____

d) $X =$ ____

$Y =$ ____

e) $X =$ ____

$Y =$ ____

f) $X =$ ____

$Y =$ ____

zbiór liczb wyrażających liczbę kończyn zwierząt | zbiór zwierząt | zbiór dat urodzenia | zbiór liczb liter występujących w imieniu | zbiór książek | zbiór liczb wyrażających ilość stron książek | zbiór liczb wyrażających powierzchnię miast | zbiór liczb wyrażających numer buta danej osoby | zbiór liczb wyrażających liczbę kończyn zwierząt | zbiór imion | zbiór dat urodzenia | zbiór liczb wyrażających numer buta danej osoby | zbiór miast | zbiór imion | zbiór osób | zbiór zwierząt | zbiór osób | zbiór liczb wyrażających ilość stron książek | zbiór osób | zbiór książek | zbiór miast | zbiór liczb wyrażających powierzchnię miast | zbiór osób | zbiór liczb liter występujących w imieniu

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 7**

Podaj przykład takich dwóch przyporządkowań, które są funkcjami. Określ w każdym przypadku dziedzinę i zbiór wartości funkcji.

**Ćwiczenie 8**

Podaj przykład takich dwóch przyporządkowań, które nie są funkcjami.

**Ćwiczenie 9**

Wybierz tak, aby zdanie opisywało funkcję.

a) Każdemu trójkątowi przyporządkowujemy _____

b) Każdemu czworokątowi przyporządkowujemy _____

b) Każdemu wielokątowi przyporządkowujemy _____

jego przekątną. | jego wierzchołek. | liczbę jego boków. | jego kąt prosty.

jego boki. | jego kąty ostre. | sumę jego kątów wewnętrznych. | jego przekątną.

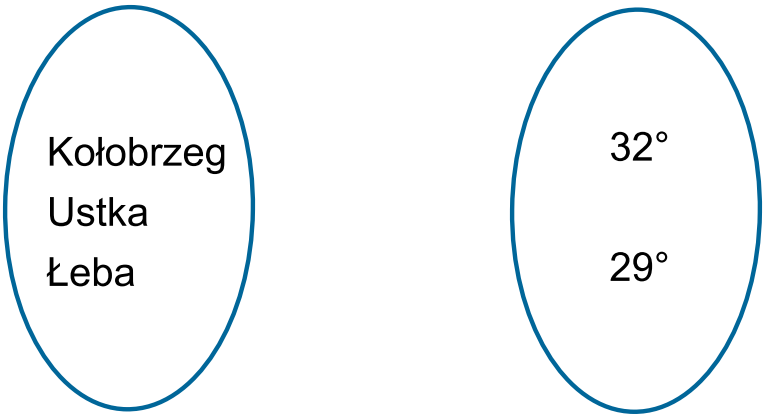
ilość jego kątów rozwartych.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 10**

W okresie wakacyjnym dokonano pomiarów temperatur powietrza w wybranych miejscowościach nadmorskich. W wyniku utworzonego zestawienia okazało się, że w miastach takich jak: Kołobrzeg, Ustka i Łeba temperatura powietrza osiągnęła tylko jedną z dwóch następujących wartości: $32^\circ C$ oraz $29^\circ C$.

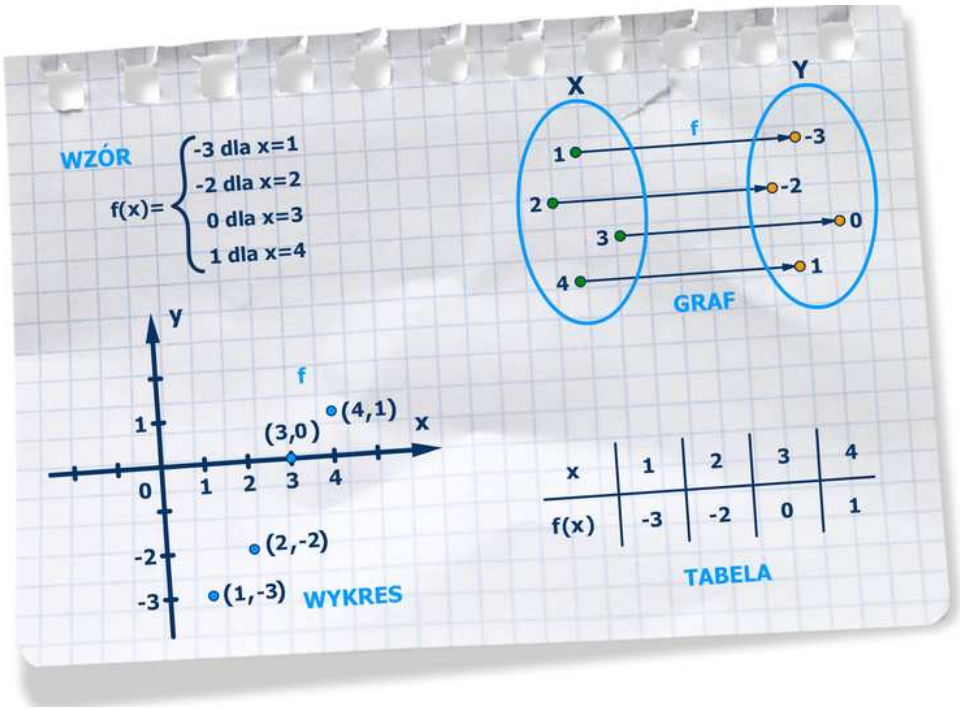
Ile można utworzyć różnych przyporządkowań $f : X \to Y$ będących funkcjami. Czy ich liczba ulegnie zmianie, jeśli rozważymy przyporządkowania $g : Y \to X$? Odpowiedź uzasadnij.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

# Sposoby opisywania funkcji

### Przykład 1




Film dostępny pod adresem /preview/resource/Rvuj0KKv9X5hQ

Pojecie funkcji_atrapa_animacja_251

Animacja

---

### Ćwiczenie 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 2

Narysuj wykresy funkcji przedstawionych za pomocą tabelki.

**Ćwiczenie 3**

Dany jest zbiór $X = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$. Każdemu elementowi tego zbioru przyporządkowujemy resztę z dzielenia tego elementu przez $4$.

1. Oblicz $f(2),\ \mathrm{f}(3),\ \mathrm{f}(4),\ \mathrm{f}(5),\ \mathrm{f}(6),\ \mathrm{f}(7),\ \mathrm{f}(8)$.
2. Sporządź tabelkę tego przyporządkowania.
3. Narysuj graf tego przyporządkowania.
4. Czy to przyporządkowanie jest funkcją? Jeśli jest, to narysuj wykres tej funkcji.

**Ćwiczenie 4**

Opisz za pomocą wzoru podane zależności funkcyjne:

1. pole kwadratu o boku długości $x$,
2. długość okręgu o promieniu długości $r$,
3. obwód prostokąta, którego boki są kolejnymi parzystymi liczbami naturalnymi,
4. pole trójkąta prostokątnego, równoramiennego o przyprostokątnej długości $x$,
5. pole powierzchni sześcianu o krawędzi długości $x$,
6. objętość prostopadłościanu, którego boki są kolejnymi liczbami naturalnymi.

## Ćwiczenie 5

Oceń, czy opisane przyporządkowanie jest funkcją.

- [ ] Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy jej pierwiastek kwadratowy.
- [ ] Każdej liczbie naturalnej jest przyporządkowana liczba do niej odwrotna.
- [ ] Każdemu czworokątowi przyporządkowujemy liczbę jego kątów.
- [ ] Każdemu Polakowi jest przyporządkowany jego numer PESEL.
- [ ] Każdej osobie przyporządkowane jest pierwsze imię.
- [ ] Każdemu uczniowi przyporządkowana jest szkoła, do której uczęszcza

## Ćwiczenie 6

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7

Odgadnij wzory funkcji opisanych za pomocą tabelek, wiedząc, że każdy wzór jest postaci $f(x) = \mathrm{ax} + b$, gdzie $a$ i $b$ są dowolnymi liczbami.

1. $f(x) = \ldots x + \ldots$
2. $f(x) = \ldots x + \ldots$
3. $f(x) = \ldots x + \ldots$
4. $f(x) = \ldots x + \ldots$

## Ćwiczenie 8

Połącz w pary opis funkcji z odpowiednim wzorem.

| | |
|---|---|
| Liczbie $x$ przyporządkowano średnią arytmetyczną $x$ i liczby $2$. | $f(x) = x^3$ |
| Liczbie $x$ przyporządkowano liczbę do niej przeciwną powiększoną o $2$. | $f(x) = 2x$ |
| Liczbie $x$ przyporządkowano sumę połowy liczby $x$ i liczby $2$. | $f(x) = \frac{x+2}{2}$ |
| Liczbie $x$ ($x \neq 0$) przyporządkowano liczbę do niej odwrotną. | $f(x) = \frac{1}{x}$ |
| Liczbie $x$ przyporządkowano jej pierwiastek sześcienny. | $f(x) = -x + 2$ |
| Liczbie $x$ przyporządkowano jej sześcian. | $f(x) = \frac{x}{2} + 2$ |
| Liczbie $x$ przyporządkowano jej iloczyn przez $2$. | $f(x) = \sqrt[3]{x}$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9

1. Firma przewozowa proponuje Tomkowi następujący cennik swoich usług: opłata stała $5$ zł oraz $1{,}80$ zł za każdy przejechany kilometr. Zapisz za pomocą wzoru koszt przejazdu $(y)$ Tomka do dowolnego miejsca jako funkcję przejechanych kilometrów $(x)$.
2. Konkurencyjna firma „TAXI” proponuje Tomkowi swój cennik usług: opłata za pierwszy przejechany kilometr to $5$ zł oraz $1{,}80$ zł za każdy następny kilometr. Zapisz za pomocą wzoru koszt przejazdu $(y)$ Tomka do dowolnego miejsca jako funkcję przejechanych kilometrów $(x)$.
3. Podaj zależność długości drogi $(s)$ przebytej przez Tomka, który jechał ze średnią prędkością $40\,\mathrm{km}/h$, jako funkcję czasu $(t)$.

**Ćwiczenie 10**

Który wzór funkcji odpowiada tabelce?

tabela

| $x$ | $-3$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $7$ | $-1$ | $-2$ | $2$ | $7$ |

- $f(x) = (-2x)^2$
- $f(x) = -x^2 + 2$
- $f(x) = x^2 - 2$
- $f(x) = -2x^2$

**Ćwiczenie 11**

Dane są dwa odwzorowania

1. Dowolnemu trójkątowi przyporządkowujemy jego pole wyrażone w centymetrach kwadratowych. 2. Dowolnej liczbie dodatniej przyporządkowujemy trójkąt, którego pole wyrażone w centymetrach kwadratowych jest równe tej liczbie dodatniej.

Które odwzorowanie jest funkcją?

- tylko pierwsze
- tylko drugie
- żadne
- obydwa

**Ćwiczenie 12**

Która tabelka nie przedstawia funkcji?

- ○
- ○
- ○
- ○

**Ćwiczenie 13**

Oblicz wartości funkcji $f(x) = 2x - 1$, której dziedziną jest zbiór $D = \{ -2, 0, 2, 3, 4, 5\}$.

Narysuj wykres funkcji $f$.

**Ćwiczenie 14**

Podaj dziedzinę funkcji opisanej wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x$ , jeżeli jej zbiorem wartości jest zbiór $\mathrm{Zw} = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Sporządź tabelę i wykres funkcji $f(x)$.

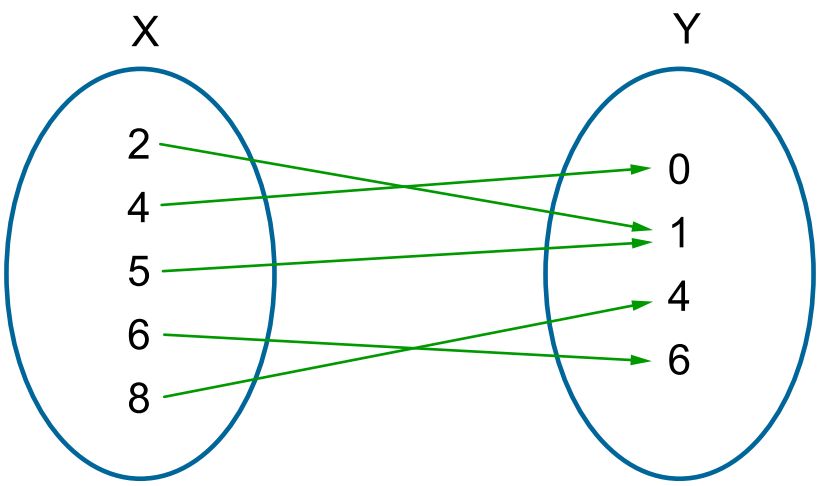
**Ćwiczenie 15**

Narysuj wykres funkcji $f(x) = 2x - 2$, której argumenty $x$ spełniają warunek

1. $x \leq 5$ i $x$ jest liczbą naturalną,
2. $x \leq 2$ i $x$ jest liczbą rzeczywistą,
3. $-3 \leq x \leq 2$ i $x$ jest liczbą całkowitą,
4. $-3 \leq x \leq 2$ i jest liczbą rzeczywistą,
5. $x \in C$,
6. $x \in R$.

**Ćwiczenie 16**

Funkcję $f : X \to Y$ przedstawiono za pomocą grafu.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozstrzygnij, czy podane równości są prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] $f(4) + f(5) = f(2)$
- [ ] $f(4) = f(8)$
- [ ] $f(2) = f(5)$
- [ ] $f(6) = 6$
- [ ] $f(8) = 4f(5)$
- [ ] $f(4) = 8$

## Ćwiczenie 17

Połącz w pary opis funkcji z odpowiadającym zbiorem wartości.

| | |
|---|---|
| Każdej liczbie parzystej dwucyfrowej mniejszej od $18$ przyporządkowano jej kwadrat pomniejszony o $2$. | $\{83,86,88,90\}$ |
| Każdej liczbie nieparzystej dwucyfrowej większej od $14$ i mniejszej od $22$ przyporządkowano iloczyn jej cyfr powiększony o $81$. | $\{82,85,87,89\}$ |
| Każdej liczbie parzystej dwucyfrowej większej od $12$ i mniejszej lub równej $20$ przyporządkowano sumę jej cyfr powiększoną o $80$. | $\{98,142,194,254\}$ |
| Każdej liczbie dwucyfrowej mniejszej od $14$ przyporządkowano sumę jej cyfr pomnożoną przez $50$. | $\{50,100,150,200\}$ |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 18

Przeciągnij i upuść.

Dana jest funkcja przedstawiona za pomocą wzoru $g(x) = x + 2$, której zbiór wartości stanowią liczby naturalne mniejsze lub równe $3$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D =$ [ ], [ ], [ ], [ ].

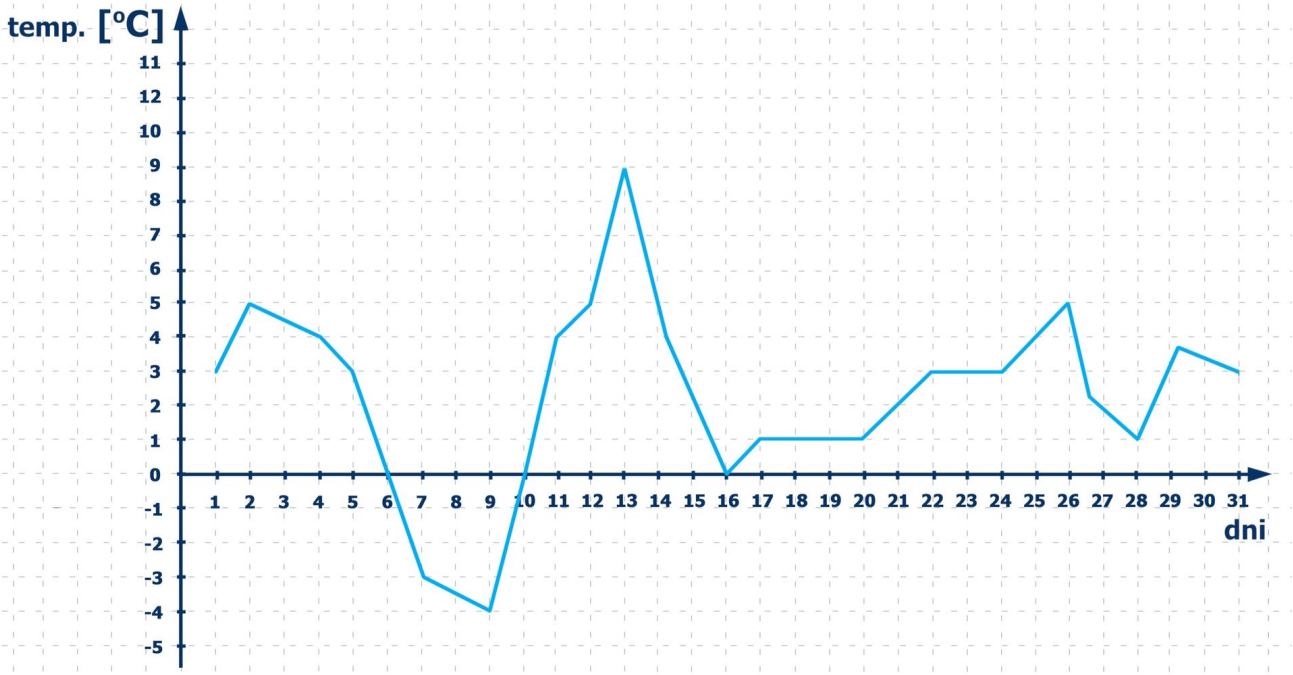
- 1 | 4 | - 4 | 0 | 3 | - 3 | 2 | 1 | - 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

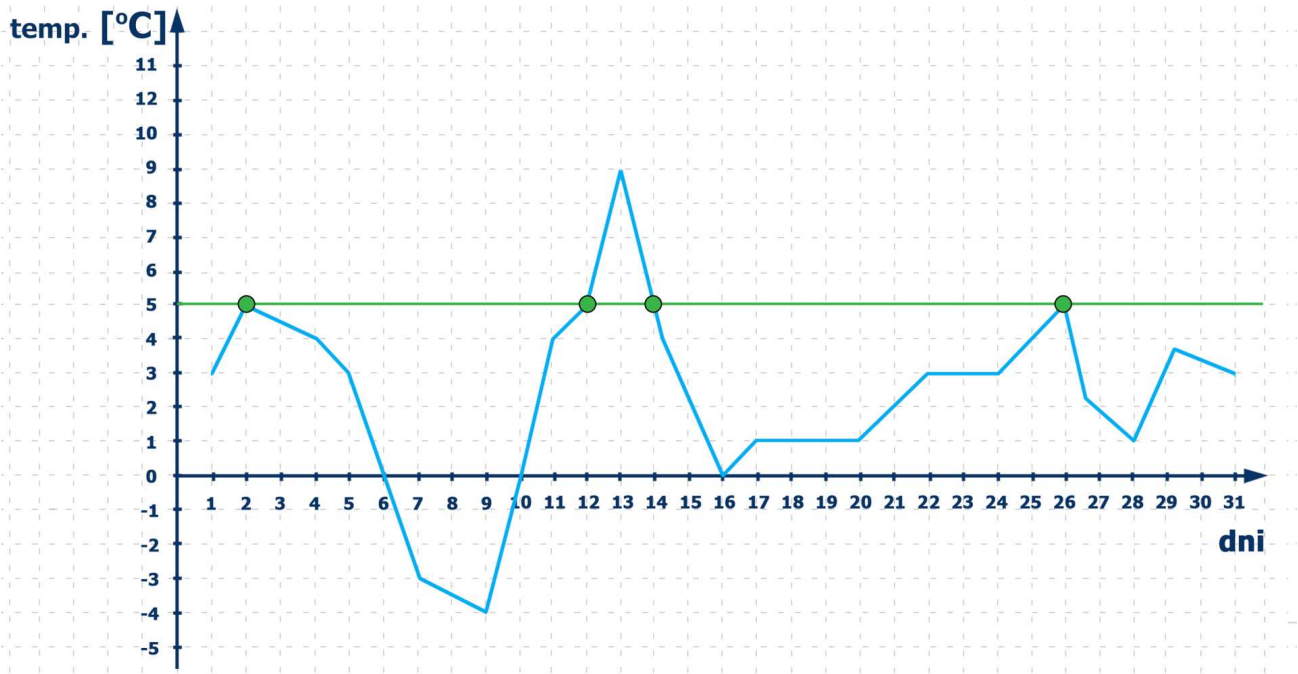
# Miejsce zerowe funkcji

**Przykład 1**

Przyjrzyjmy się wykresowi zmian temperatury powietrza w pewnej miejscowości w marcu.




Z wykresu możemy odczytać, że temperatura powietrza w dniu 5 marca była równa 3 ℃,natomiast 11 marca wynosiła 4 ℃. Możemy też z wykresu dowiedzieć się, że temperaturę 5 ℃ odnotowano czterokrotnie: 2, 12, 14, 26 marca.




Szczególną wartością temperatury powietrza jest 0 ℃. W tej temperaturze woda przechodzi ze stanu stałego w ciekły lub na odwrót. W których dniach marca, w tej miejscowości odnotowano temperaturę 0 ℃? Z wykresu odczytujemy: 6, 10, 16 marca. Możemy przyjąć, że rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji. Wtedy dla $x = 6,\ \mathrm{x} = 10,\ \mathrm{x} = 16$ wartości tej funkcji są równe 0.

**Definicja: Miejsce zerowe funkcji**

Miejscem zerowym funkcji nazywamy każdy argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0.

**Definicja: Zbiór miejsc zerowych funkcji**

Zbiorem miejsc zerowych nazywamy zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartość 0.

**Ćwiczenie 1**

Sprawdź, która liczba jest miejscem zerowym funkcji.

$y = 2x - 2, x_0 = \ldots$

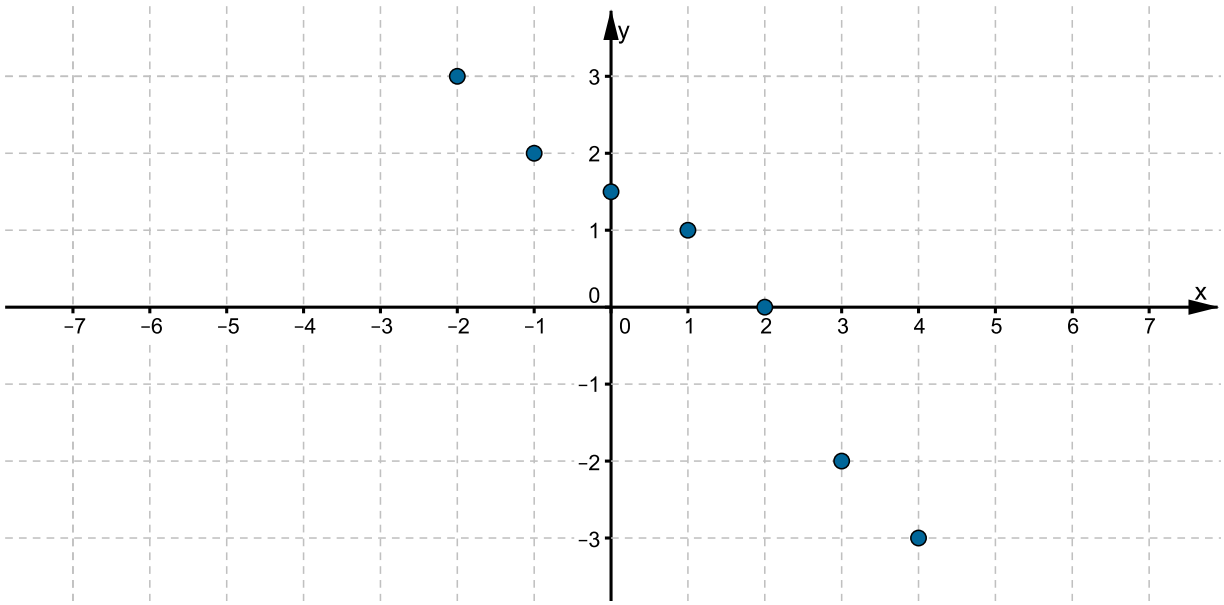
$y = x^3 - 1, x_0 = \ldots$

$y = x^2 - 1, x_0 = \ldots$

## Ćwiczenie 2

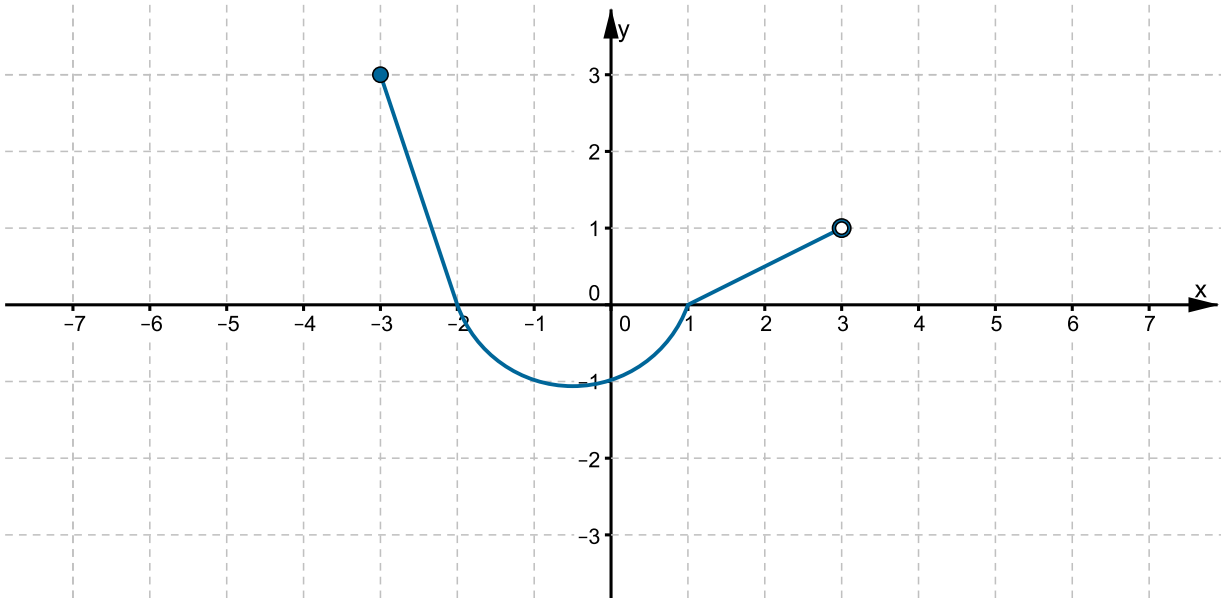
Odczytaj z wykresów miejsca zerowe funkcji.

1.



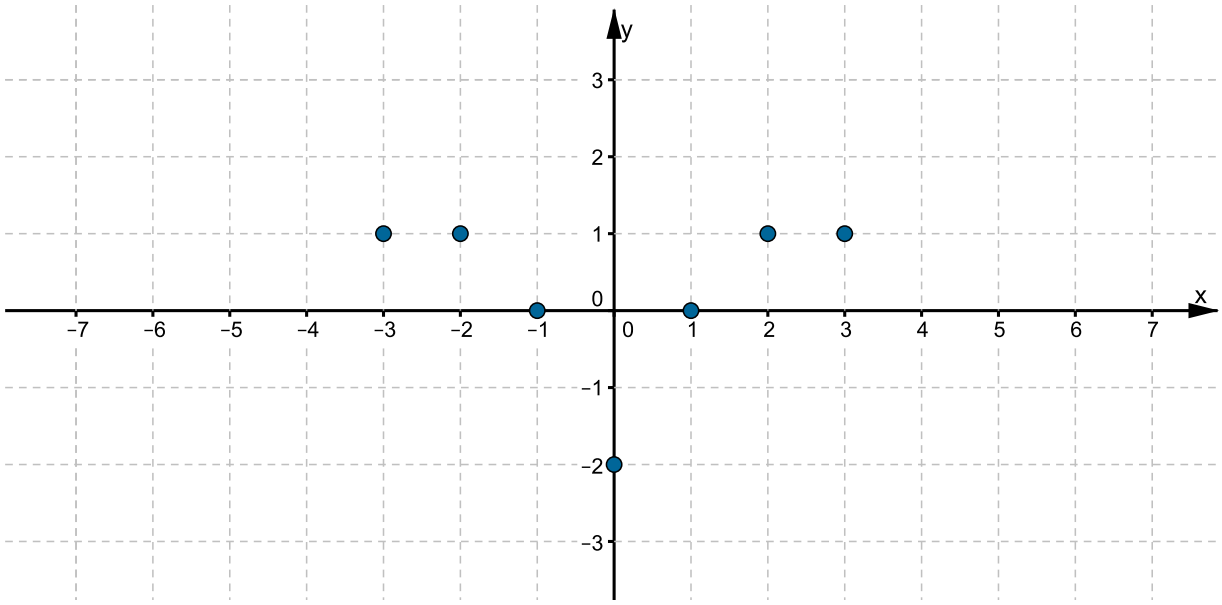

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2.



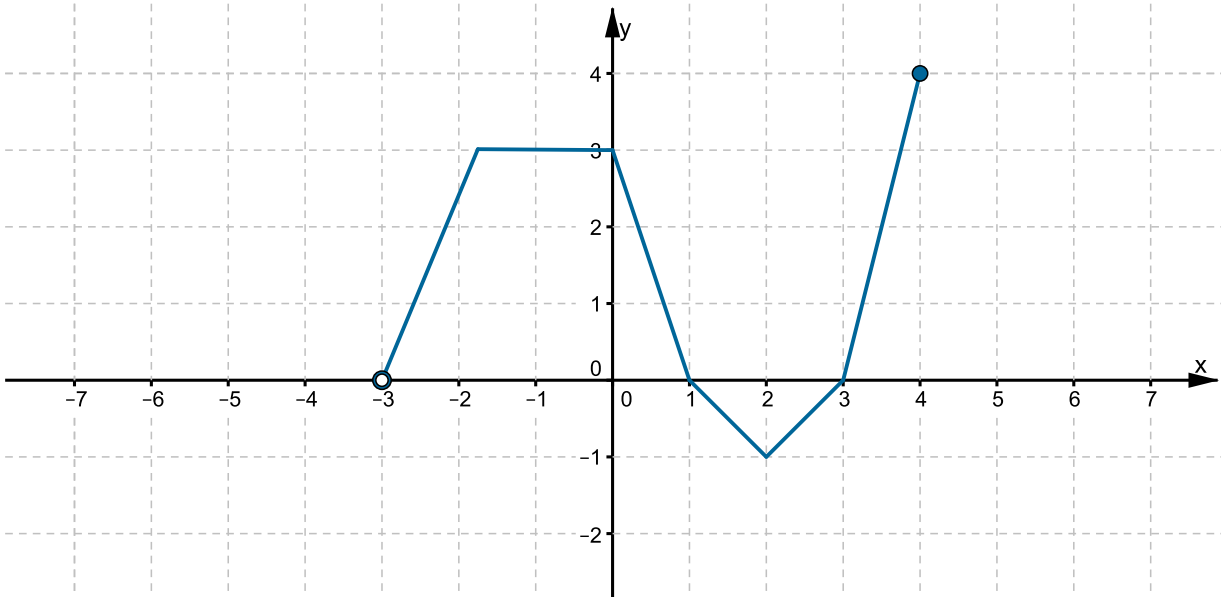

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

4.

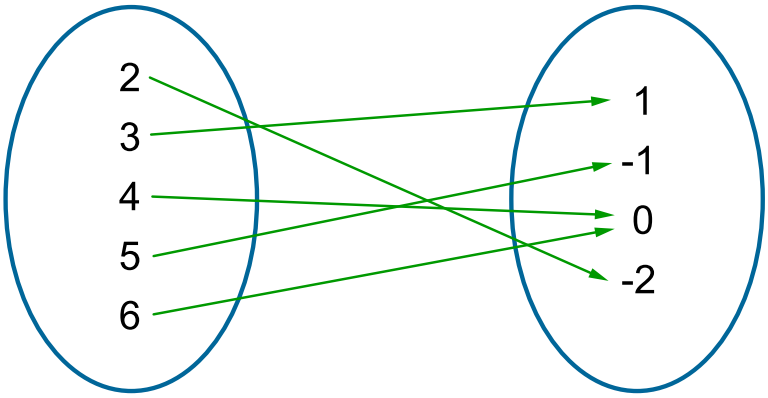



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 3**

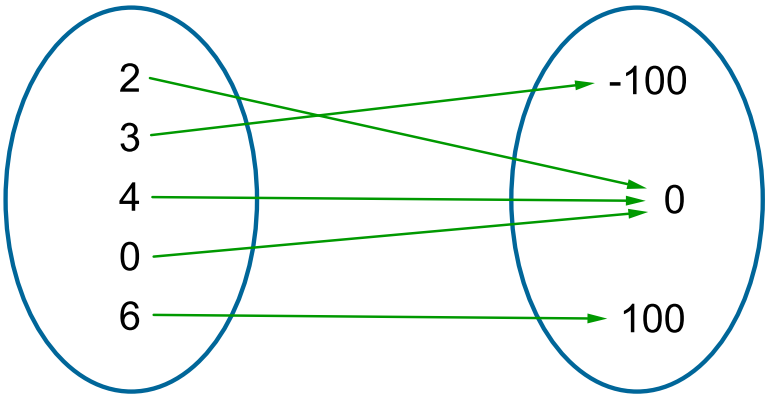
Na podstawie grafu odczytaj miejsca zerowe.

1.



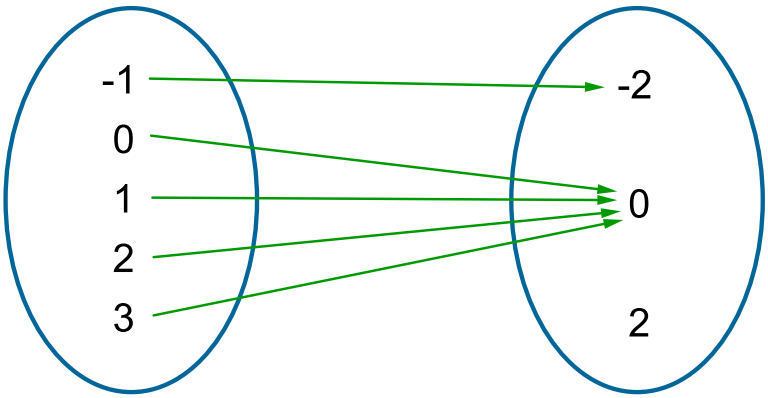

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 4**

Funkcja $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ określona jest za pomocą tabelki.

Tabela. Dane

| $x$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $3$ | $4$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $3$ | $0$ | $1$ | $2$ | $0$ |

Miejsce zerowe funkcji $f$ to:

- ◯ $1$ i $7$
- ◯ tylko $1$
- ◯ tylko $7$
- ◯ $3$

**Ćwiczenie 5**

Która funkcja ma dwa miejsca zerowe $-2$ i $2$?

- ◯ $y = -x^2 - 4$
- ◯ $y = x^2 + 4$
- ◯ $y = x - 4$
- ◯ $y = -x^2 + 4$

**Ćwiczenie 6**

Jeżeli liczba $-2$ jest miejscem zerowym funkcji $y = (m+1)x - 2$, to

- ○ $m = -1$
- ○ $m = -2$
- ○ $m = 4$
- ○ $m = -4$

**Ćwiczenie 7**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ☐ Liczba $\sqrt{2}$ jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = 2x - 2\sqrt{2}$.
- ☐ Funkcja $f(x) = 0$ posiada nieskończenie wiele miejsc zerowych.
- ☐ Liczba $2$ jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = 2x + 2$.
- ☐ Liczba $\sqrt{2}$ jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = x + 2\sqrt{2}$.
- ☐ Funkcja $f(x) = 0$ nie posiada miejsc zerowych.
- ☐ Liczba $2$ jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = 2x - 2$.

**Ćwiczenie 8**

Liczba $2$ jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = (m+1)x - 2$, gdzie $x$ jest dowolną liczbą rzeczywistą.

1. Oblicz wartość m i podaj wzór funkcji $f(x)$.
2. Oblicz wartość funkcji dla argumentu $3$.
3. Dla jakiego argumentu wartość funkcji wynosi $1$?

**Ćwiczenie 9**

Narysuj graf, tabelkę i wykres funkcji, której dziedziną jest zbiór składający się z $8$ elementów, jeżeli

1. funkcja ma dokładnie jedno miejsce zerowe
2. funkcja ma $6$ miejsc zerowych
3. funkcja nie ma miejsca zerowego

# Funkcja i jej własności. Część I

**Przykład 1**

W tabeli przedstawione zostały średnie wyniki pomiarów temperatury powietrza w Warszawie w okresie od 5 do 11 stycznia.

TAB

| Dzień miesiąca | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatura w $^\circ C$ | $-3$ | 2 | 0 | 1 | $-4$ | $-1$ | 2 |

Sporządźmy wykres tej funkcji.
Odczytajmy miejsce zerowe tej funkcji.
Wskażmy argumenty, dla których funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie oraz wartości ujemne.

**Przykład 2**

Temperatura powietrza w Warszawie była równa $0^\circ C$ w dniu 7 stycznia, czyli miejscem zerowym tej funkcji jest ten jeden argument.
Ponieważ dodatnia temperatura powietrza w Warszawie była 6 stycznia, 8 stycznia oraz 11 stycznia, to funkcja przyjmuje dla tych trzech argumentów wartości dodatnie.
Ponieważ ujemna temperatura powietrza w Warszawie była 5 stycznia, 9 stycznia, 10 stycznia, to funkcja przyjmuje dla tych trzech argumentów wartości ujemne.

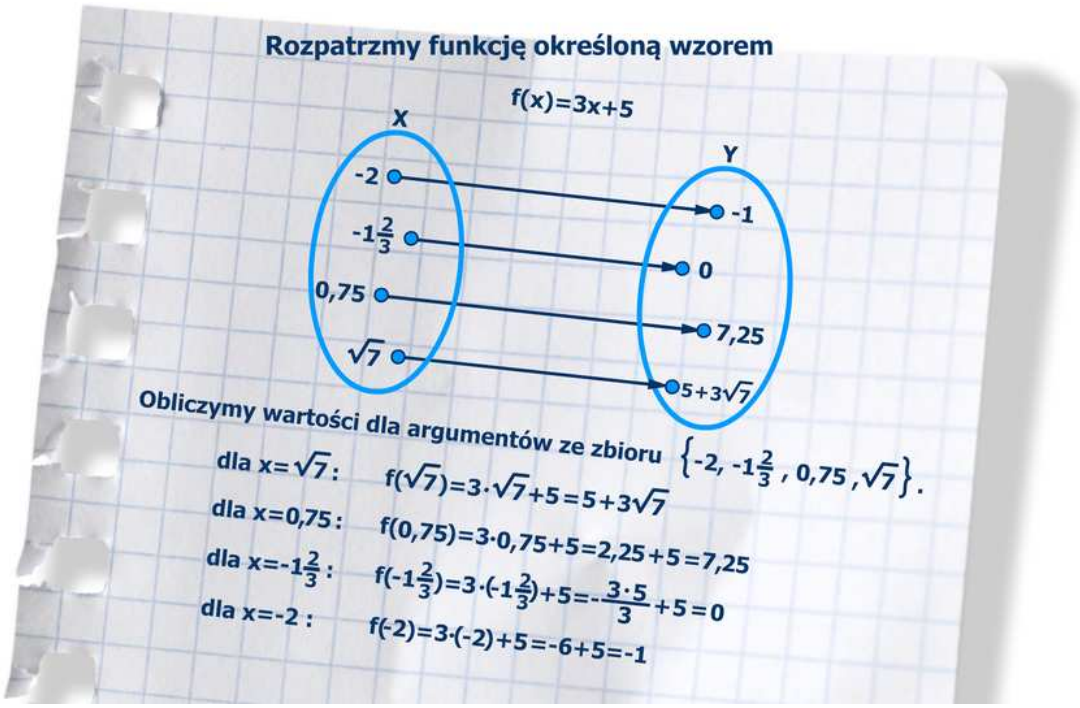
**Zapamiętaj!**

- Oś Ox dzieli wykres funkcji tak, że każdy punkt wykresu, który leży powyżej osi Ox, ma współrzędne, z których druga jest dodatnia. Mówimy wtedy, że funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
- Podobnie każdy punkt wykresu, który leży poniżej osi Ox, ma współrzędne, z których druga jest ujemna. Mówimy wtedy, że funkcja przyjmuje wartości

ujemne.

**Przykład 3**

Rozpatrzmy funkcję $f$ określoną wzorem $f(x) = 3x + 5$. Obliczymy wartości tej funkcji dla argumentów ze zbioru $\left\{-2,\ -1\frac{2}{3},\ 0{,}75,\ \sqrt{7}\right\}$.




Film dostępny pod adresem /preview/resource/RRutcaOcbNdLG

Argument i wartosc funkcji. Miejsca zerowe funkcji liczbowej_atrapa_animacja_253
Animacja

---

**Przykład 4**

Aby odczytać z wykresu funkcji, jaką wartość przyjmuje ona dla danego argumentu $a$, wystarczy narysować prostą równoległą do osi Oy, na której leżą wszystkie punkty, których pierwsza współrzędna jest równa $a$ (o takiej prostej mówimy, że ma równanie $x = a$). Otrzymamy wtedy dokładnie jeden punkt przecięcia tej prostej z wykresem funkcji. Druga współrzędna tego punktu jest szukaną wartością.

Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1T4O4wsFiTX0

Argument i wartosc funkcji. Miejsca zerowe funkcji liczbowej_atrapa_animacja_254
Animacja

---

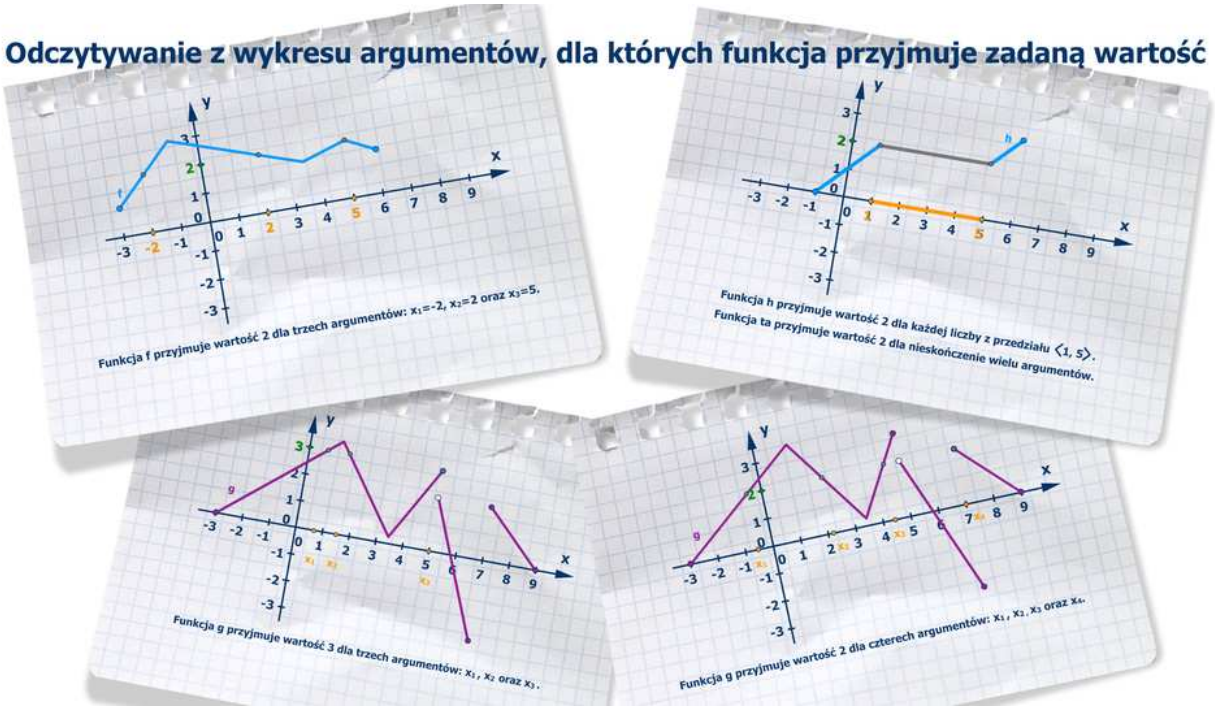
**Przykład 5**

W praktyce często analizujemy wykresy, szukając na nich argumentów, dla których funkcja osiąga pewne szczególne wartości (co było szerzej skomentowane w przykładach wstępnych). Istotną umiejętnością jest odczytanie z wykresu funkcji jej wartości najmniejszej i wartości największej, o ile da się takie wartości wyznaczyć.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DVgffn6ko

**Przykład 6**

Aby odczytać z wykresu, czy i dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość $w$, wystarczy dorysować prostą równoległą do osi Ox, na której leżą wszystkie punkty, których druga współrzędna jest równa $w$ (o takiej prostej mówimy, że ma równanie $y = w$). Jeżeli taka prosta przecina wykres danej funkcji, to odczytując pierwszą współrzędną każdego z punktów przecięcia, wyznaczymy argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość $w$.




Film dostępny pod adresem /preview/resource/RuJYMFY5jBFLz

Argument i wartosc funkcji. Miejsca zerowe funkcji liczbowej_atrapa_animacja_460

Animacja.

---

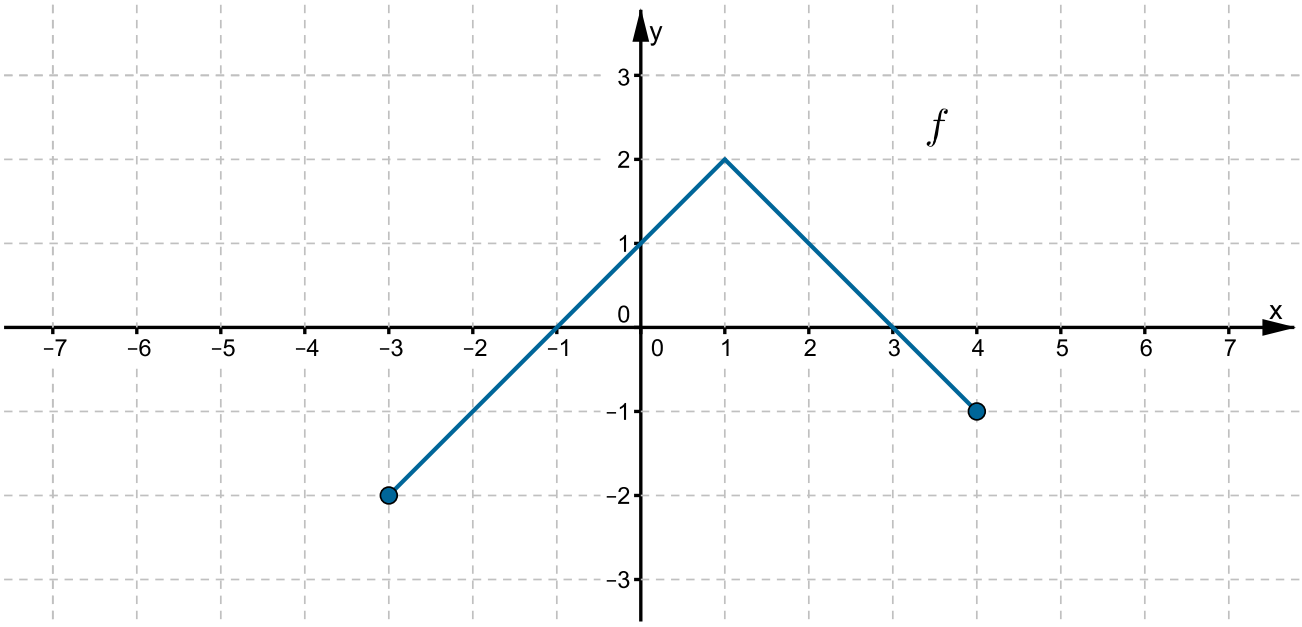
**Przykład 7**

Odczytaj z wykresu funkcji $f$ liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DVgffn6ko

**Przykład 8**

Dany jest wykres funkcji $f$.



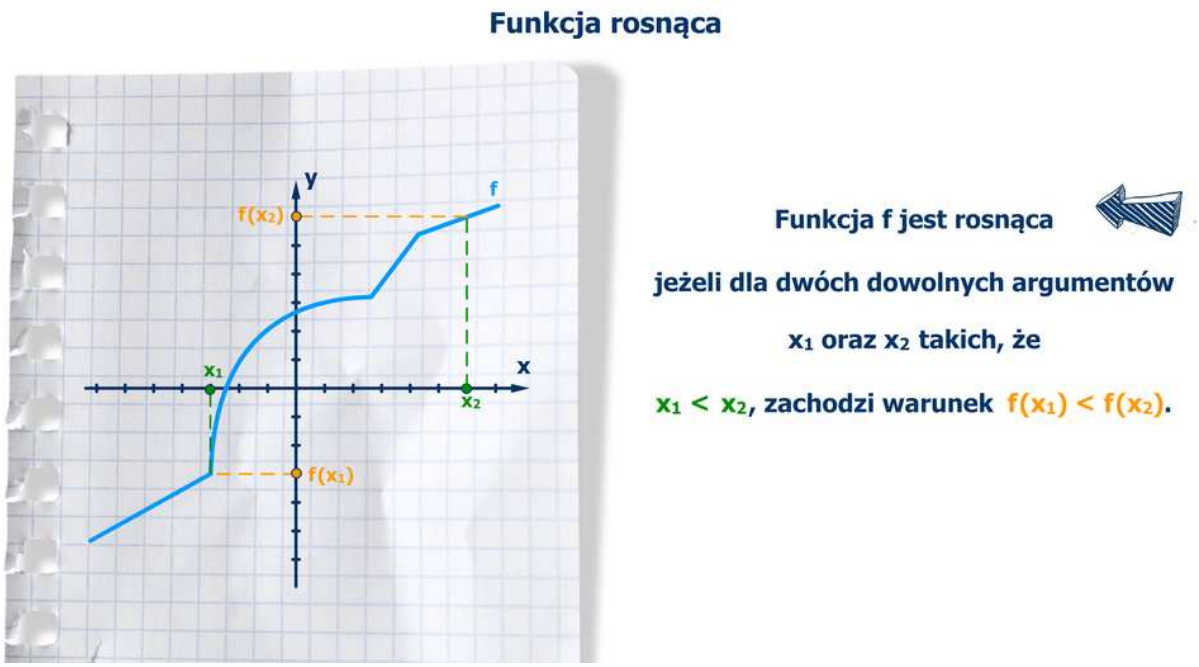

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

1. Odczytajmy miejsca zerowe, dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.
2. Wskażmy argumenty, dla których funkcja $f$ przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.

**Przykład 9**

Dany jest wykres funkcji $f$.
Obserwujmy, jak przy zmianie położenia punktu na wykresie zmieniają się wartości tej funkcji dla poszczególnych argumentów.

1.



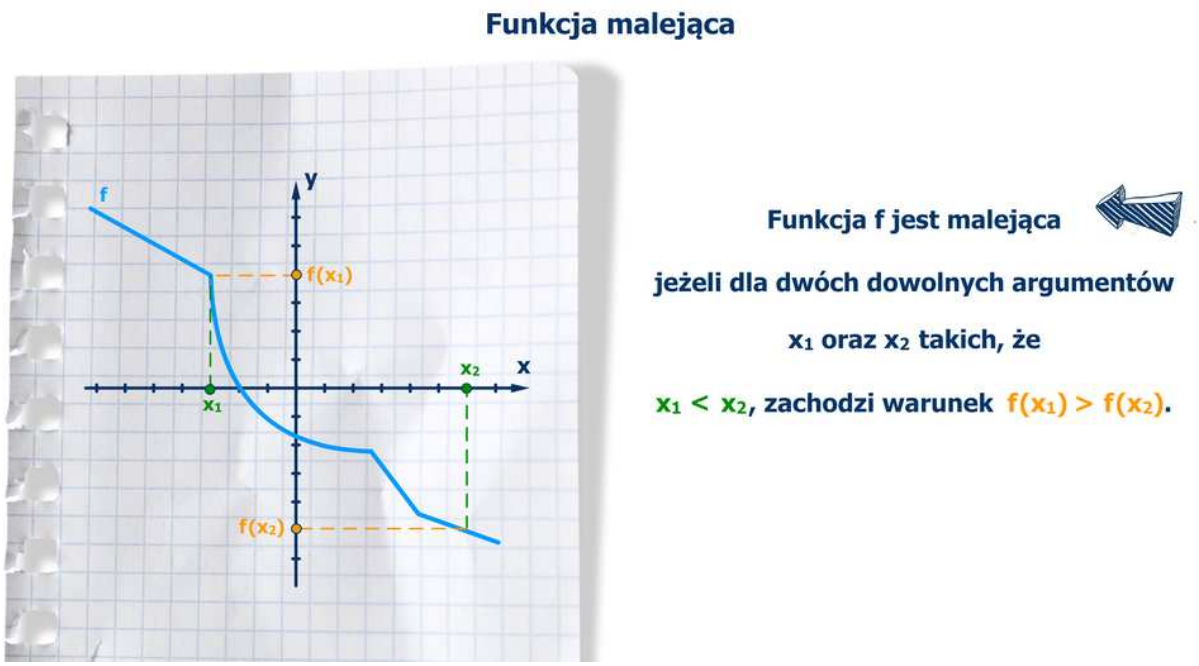

Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1STiOWTa68n2

Odczytywanie wlasnosci funkcji na podstawie jej wykresu czII_atrapa_animacja_259
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje wykres funkcji rosnącej.

---

2.



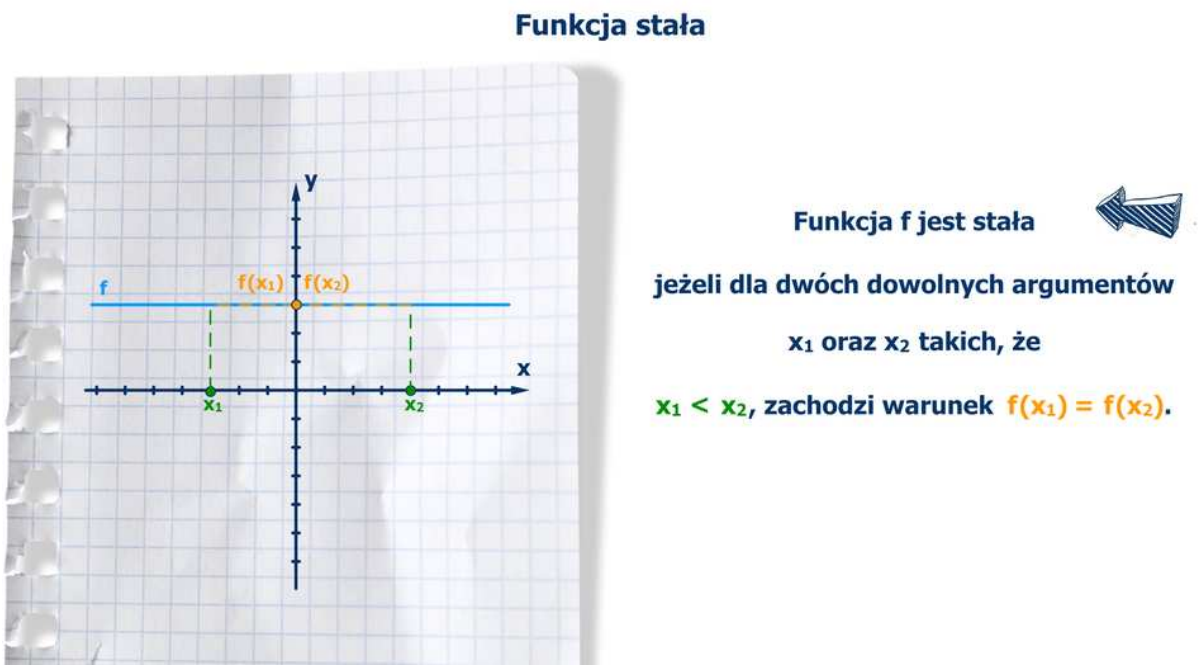

Film dostępny pod adresem /preview/resource/R1JnFIXVvkgJp

Odczytywanie wlasnosci funkcji na podstawie jej wykresu czII_atrapa_animacja_260

Animacja pokazuje wykres funkcji malejącej.

---

3.




Film dostępny pod adresem /preview/resource/RfC9W1bQ7Ip3m

Odczytywanie wlasnosci funkcji na podstawie jej wykresu czII_atrapa_animacja_261

Animacja pokazuje wykres funkcji stałej.

---

**Definicja: Funkcja rosnąca**

Funkcję nazywamy rosnącą, jeżeli wraz ze wzrostem argumentów rosną wartości funkcji.

**Definicja: Funkcja malejąca**

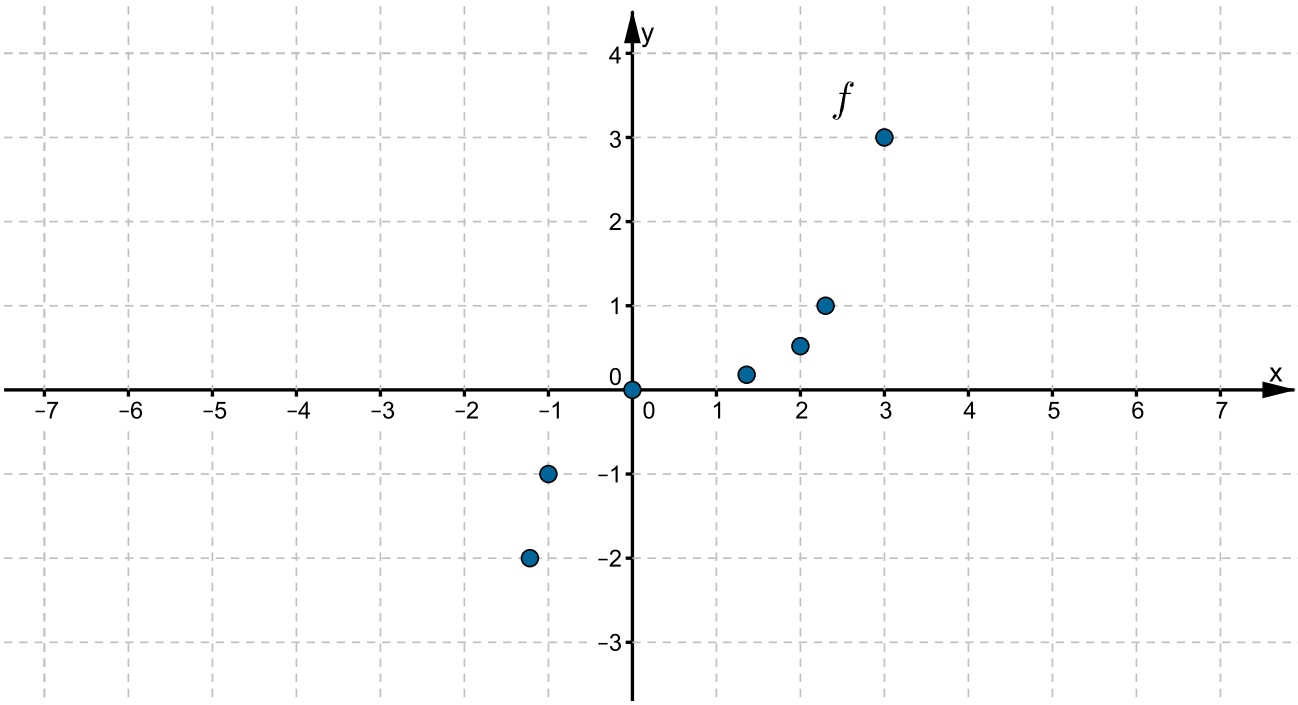
Funkcję nazywamy malejącą, jeżeli wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji.

**Definicja: Funkcja stała**

Funkcję nazywamy stałą, jeżeli wraz ze wzrostem argumentów wartość funkcji pozostaje stała.

**Ćwiczenie 1**

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f$.



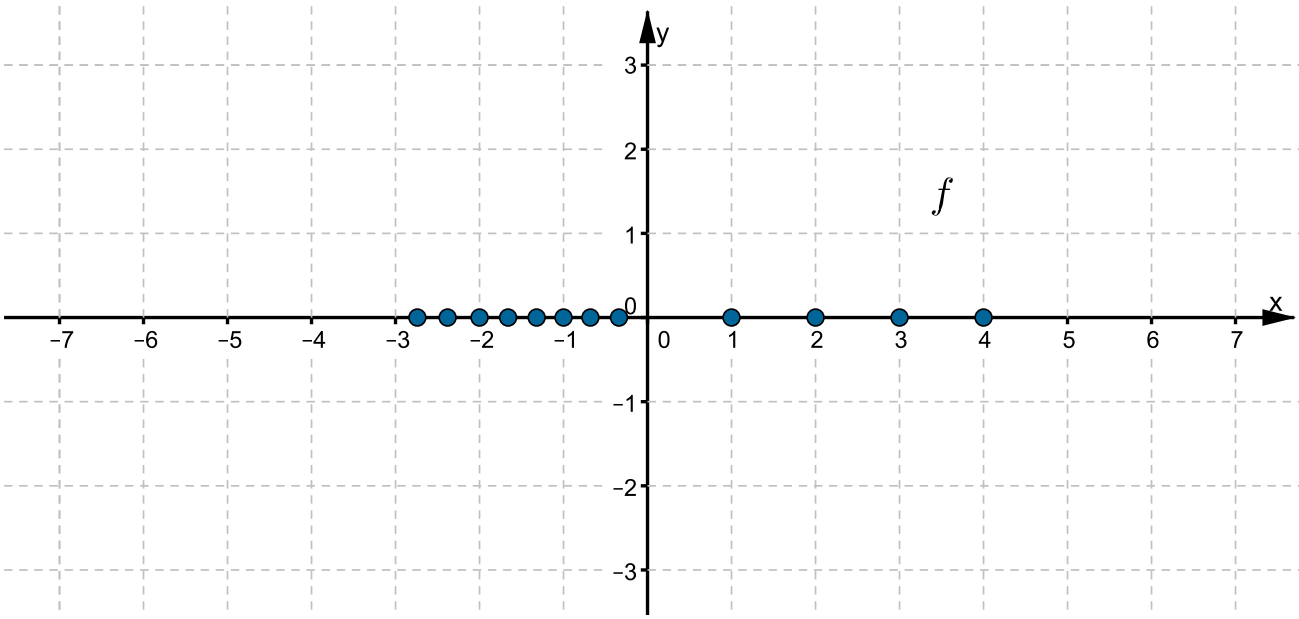

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jest to funkcja:

- stała
- rosnąca
- malejąca

**Ćwiczenie 2**

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f$.



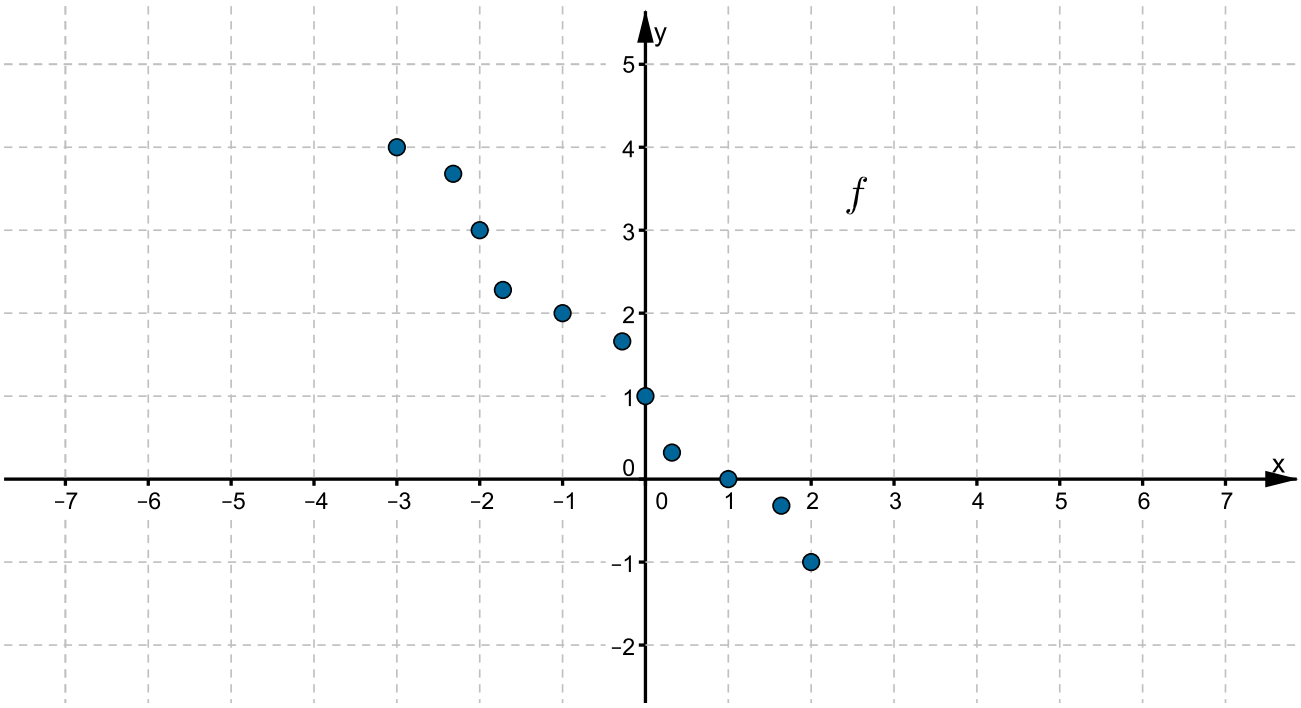

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jest to funkcja:

- malejąca
- rosnąca
- stała

**Ćwiczenie 3**

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f$.



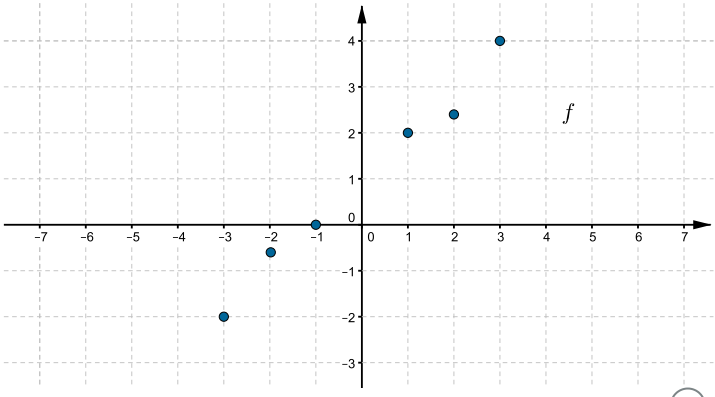

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

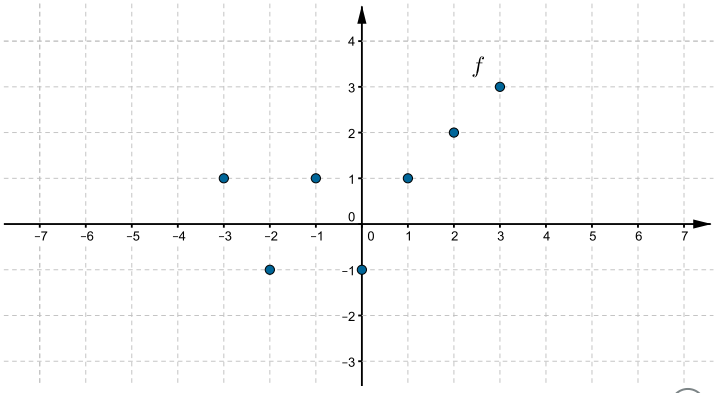
Jest to funkcja

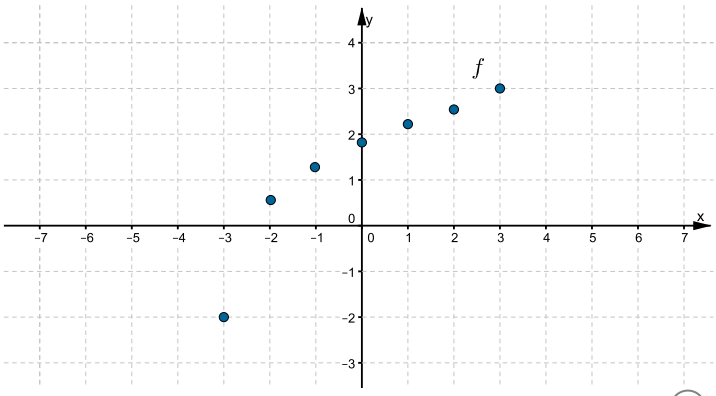
- rosnąca
- malejąca
- stała

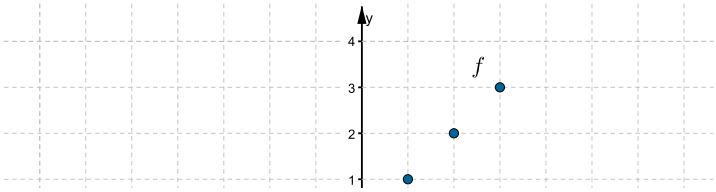
**Ćwiczenie 4**

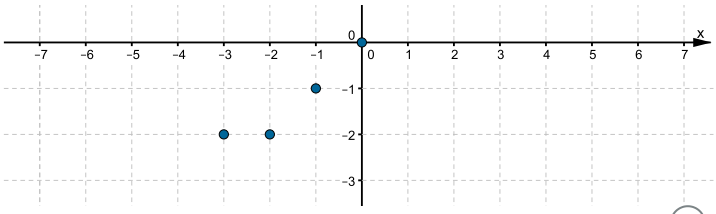
Wskaż wykres funkcji rosnącej, której dziedziną jest zbiór $\{-3, \ -2, \ -1, 0, 1, 2, 3\}$.



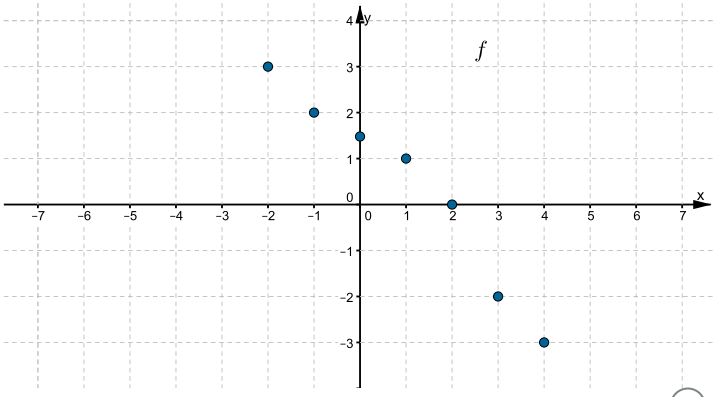



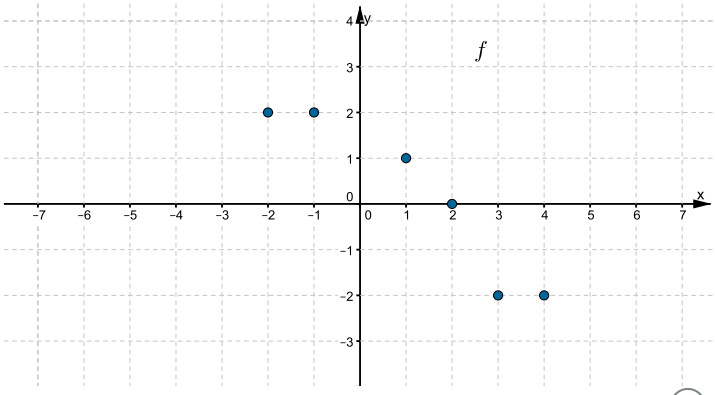



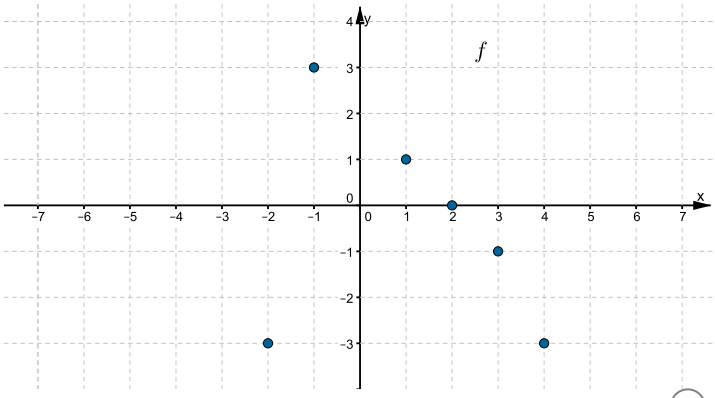

x
0
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
−1
−2
−3

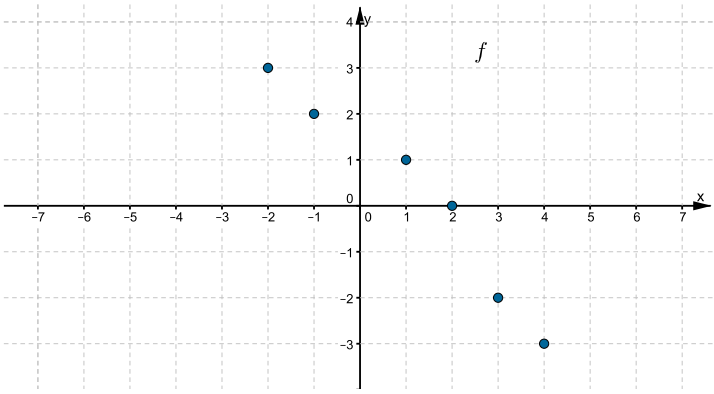
## Ćwiczenie 5

Wskaż wykres funkcji malejącej, której dziedziną jest zbiór $\{-2, \ -1, 1, 2, 3, 4\}$.



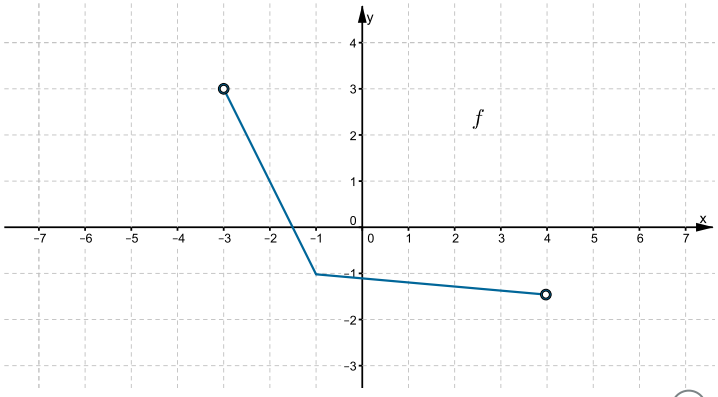



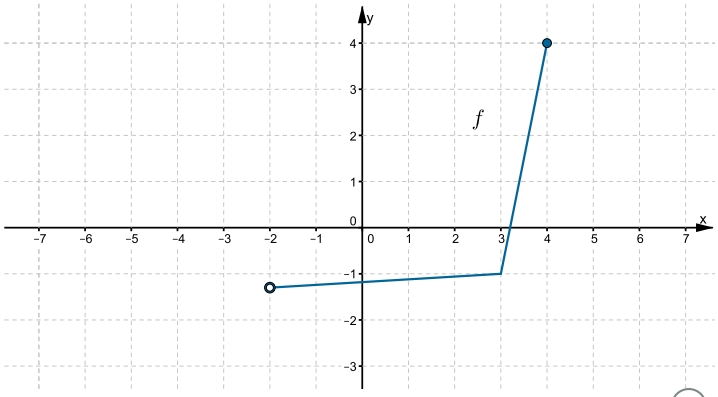



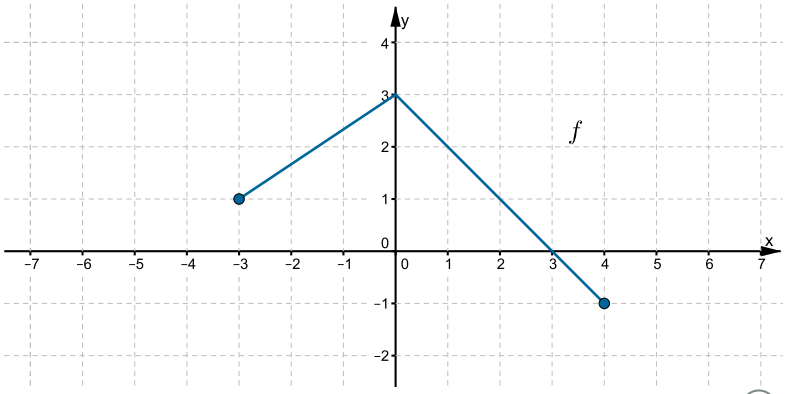



## Ćwiczenie 6

Wskaż wykres funkcji rosnącej.

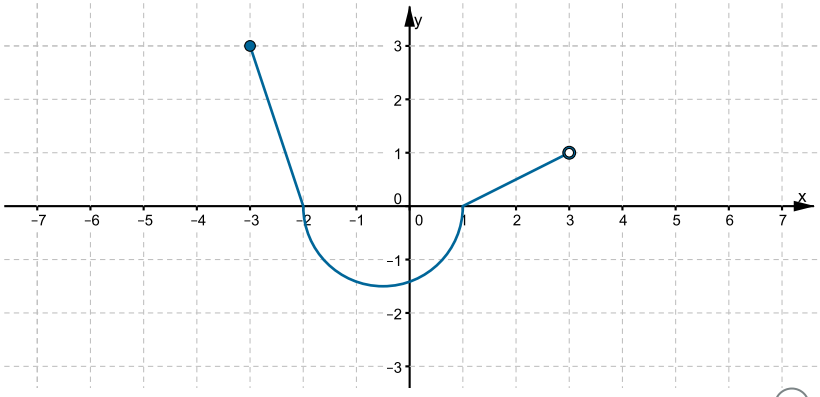


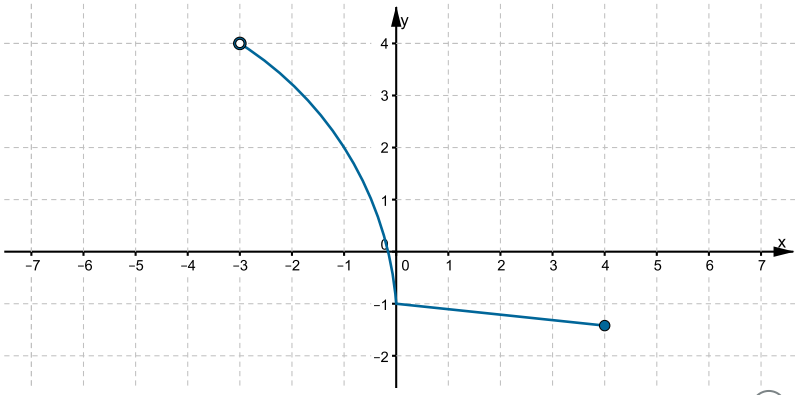



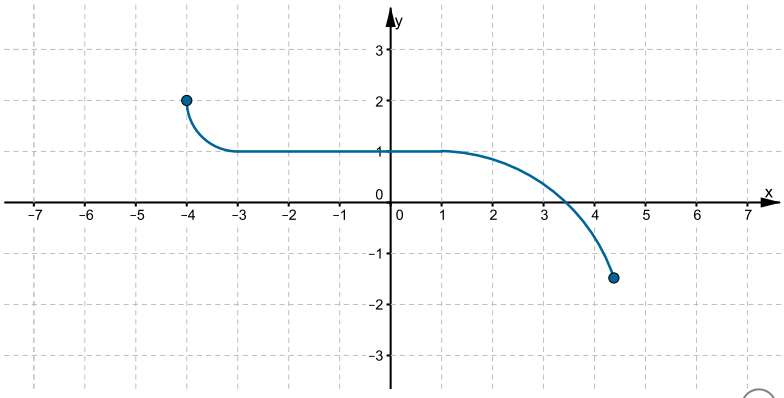



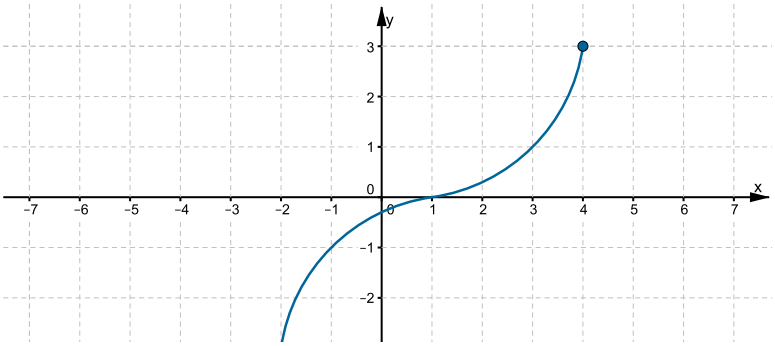
## Ćwiczenie 7

Wskaż wykres funkcji malejącej.



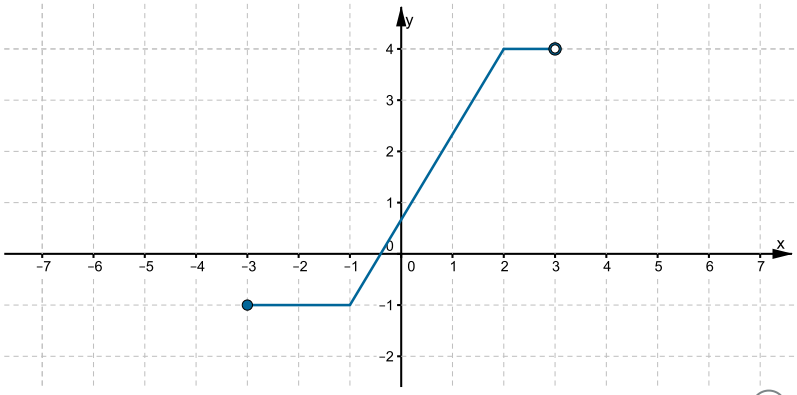



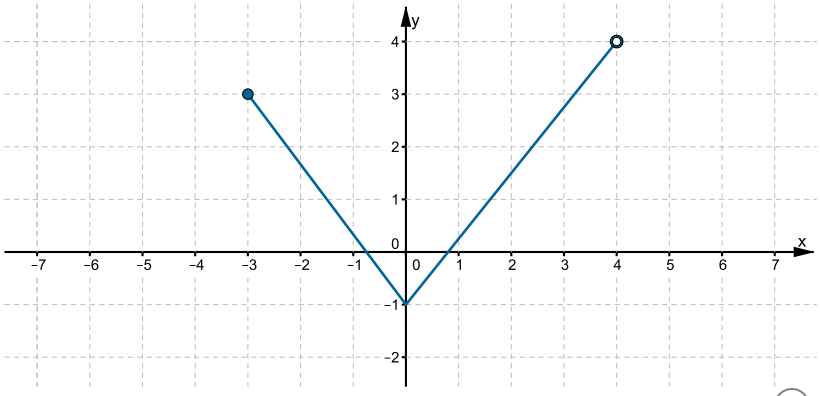



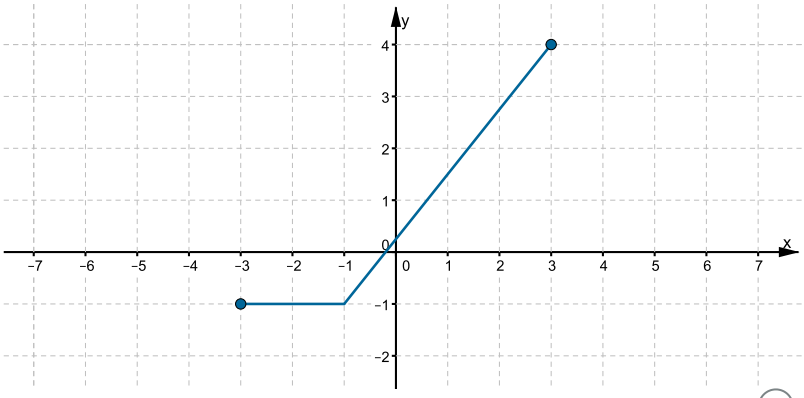



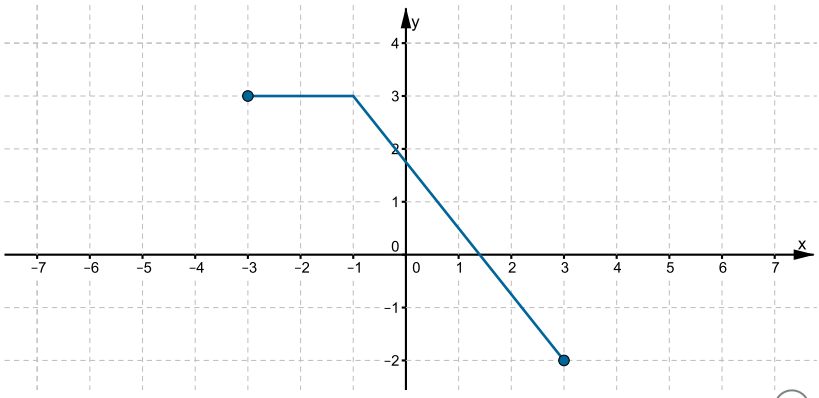
**Ćwiczenie 8**

Wskaż wykres funkcji, która jest rosnąca w zbiorze argumentów $x$ spełniających warunek $-1 \leq x \leq 3$.



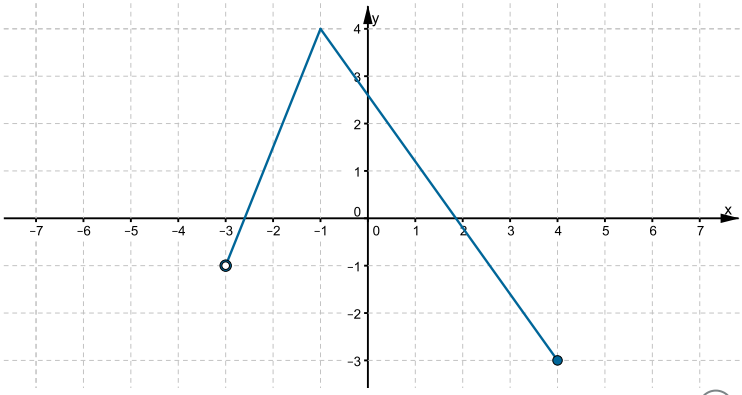



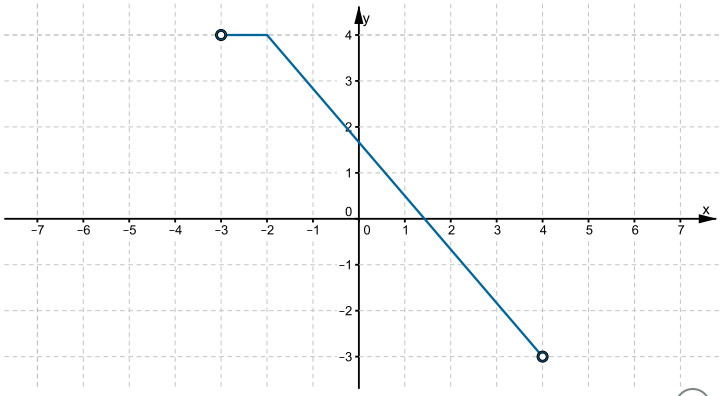



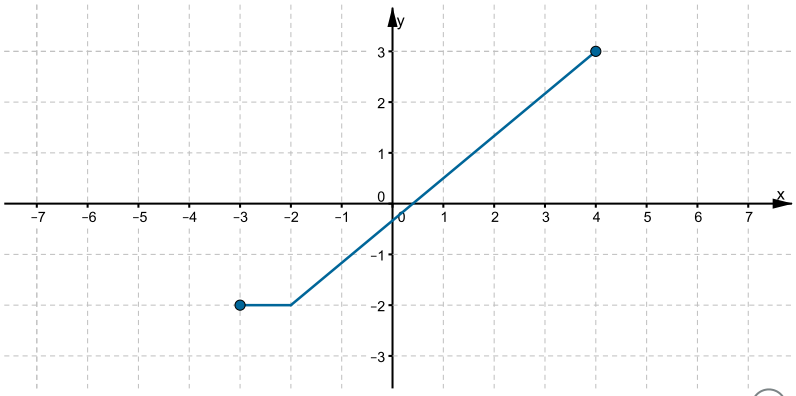

y
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

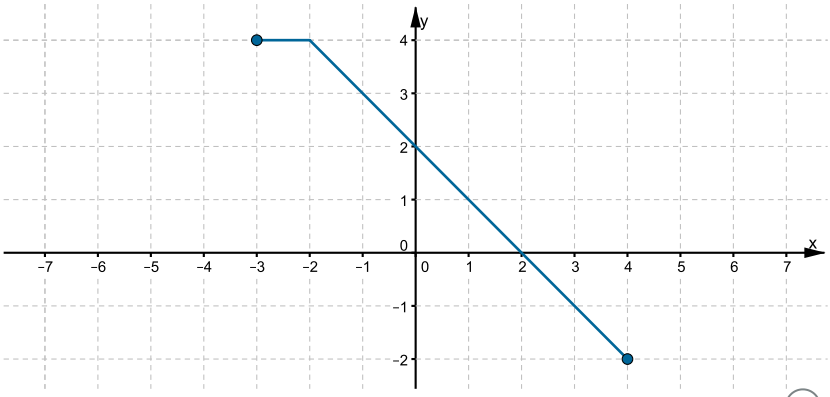
**Ćwiczenie 9**

Wskaż wykres funkcji, która jest malejąca tylko dla argumentów $x$ spełniających warunek $-2 \leq x < 4$.



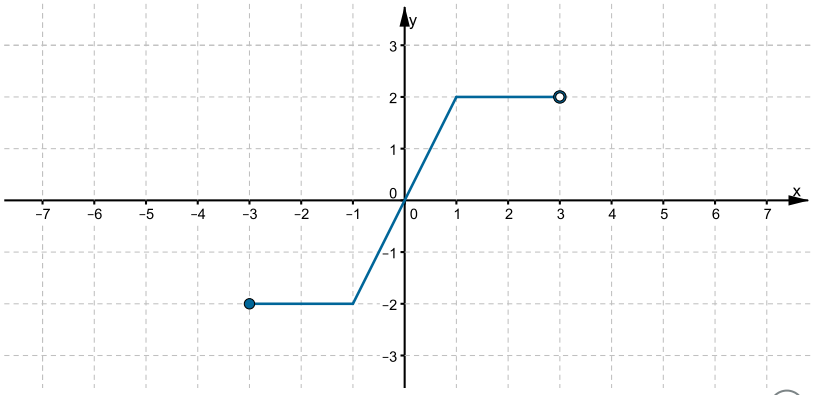



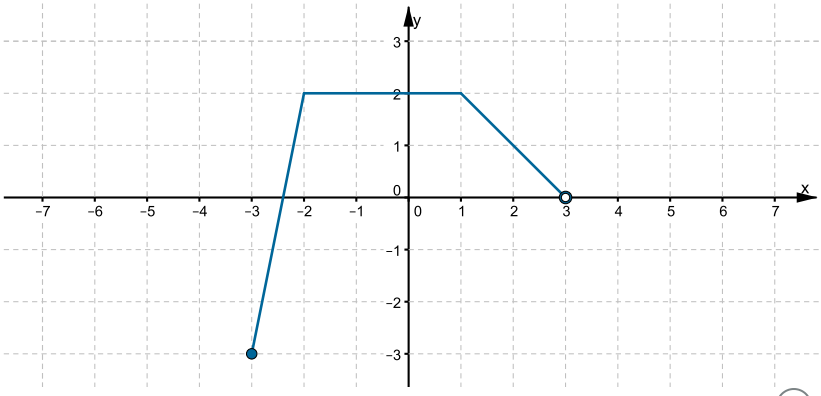



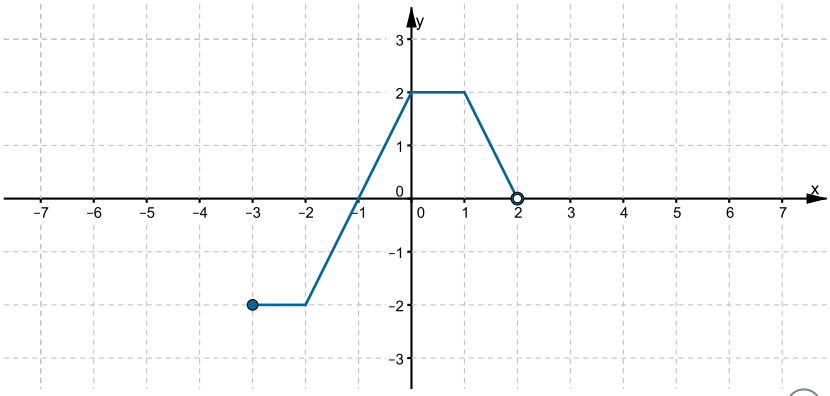

y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

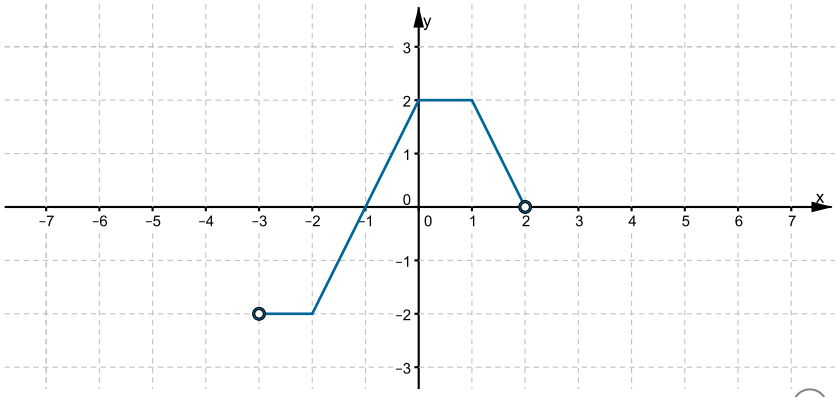
**Ćwiczenie 10**

Wskaż wykres funkcji, która jest stała w zbiorach argumentów $x$ spełniających warunki $-3 \leq x \leq -2$ oraz $0 \leq x \leq 1$.



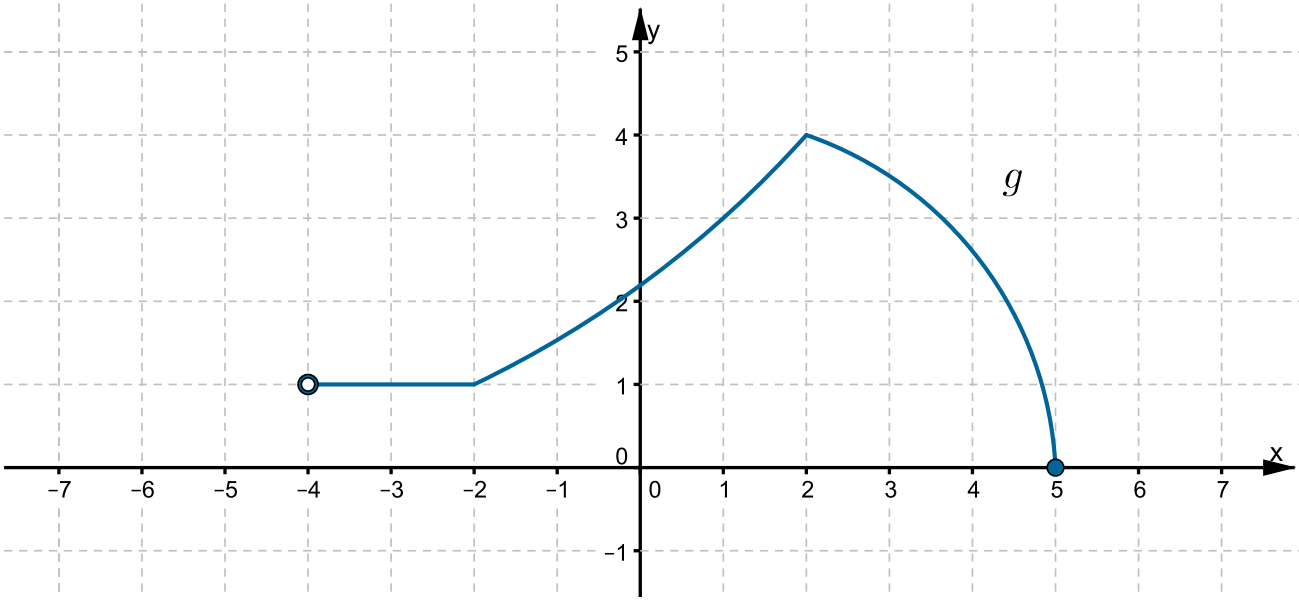






## Ćwiczenie 11

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $g$.



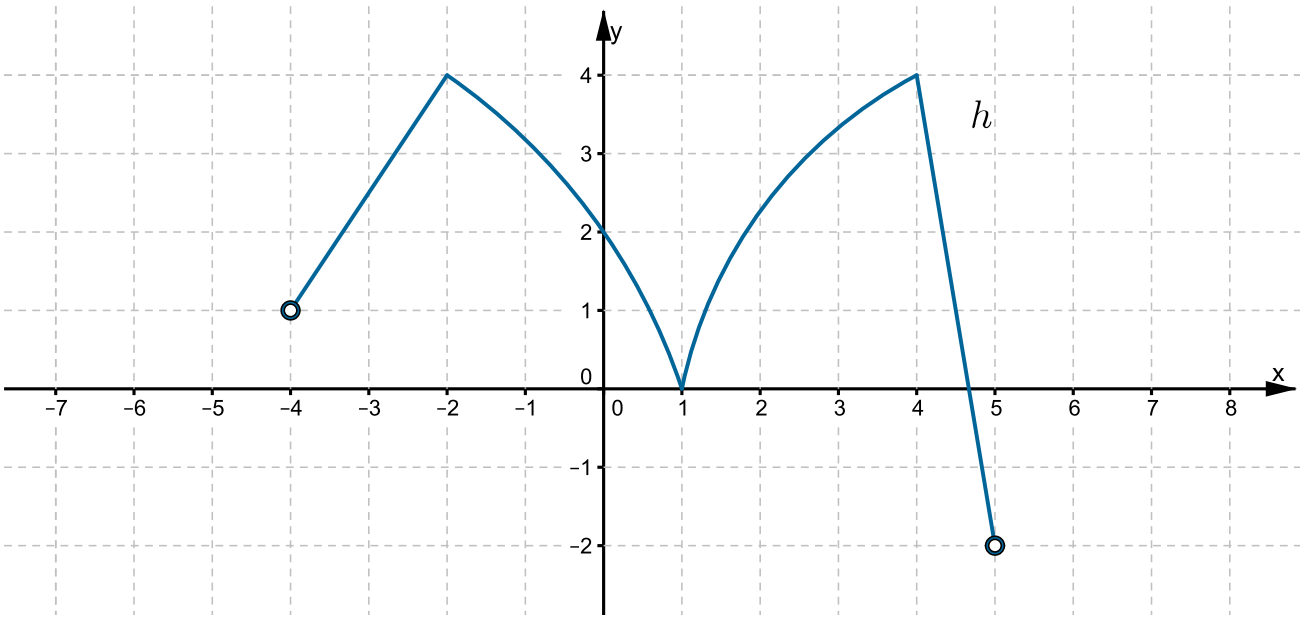

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Funkcja $g$ jest malejąca w zbiorze argumentów $x$ spełniających warunek:

- $-2 \leq x \leq 2$
- $2 \leq x \leq 5$
- $-4 \leq x \leq 5$
- $-4 \leq x \leq -2$

**Ćwiczenie 12**

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $h$.



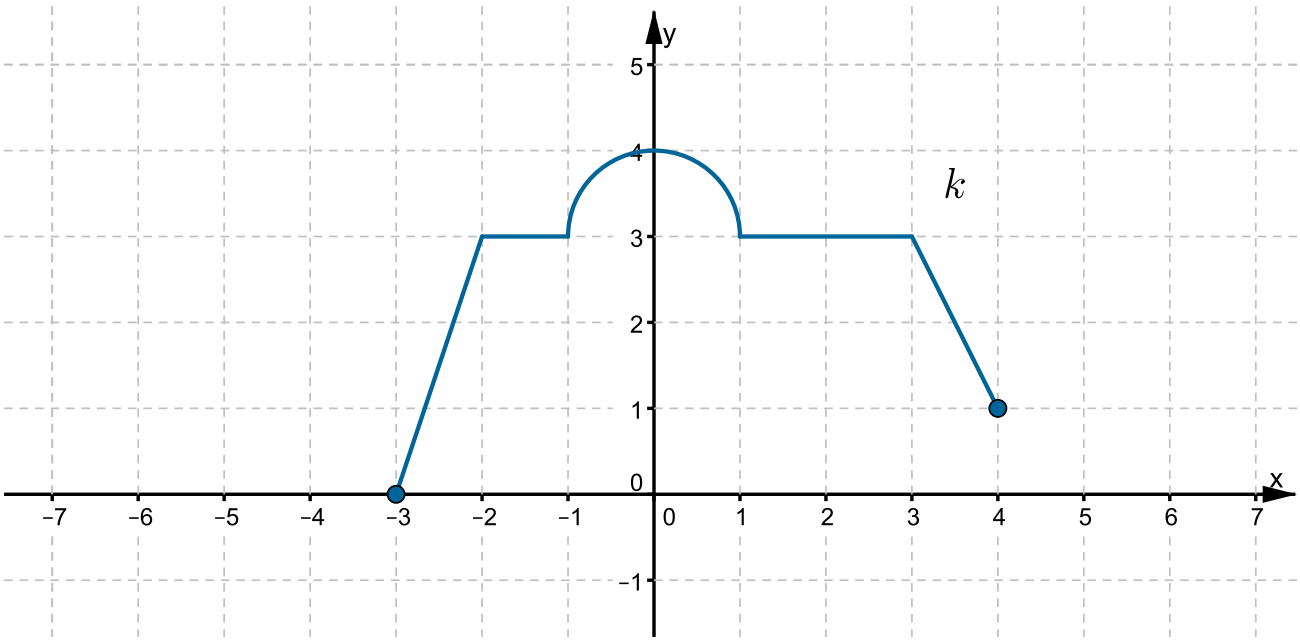

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Funkcja $h$ jest rosnąca w zbiorach argumentów $x$ spełniających warunki:

- $-2 \leq x \leq 4$
- $-2 \leq x \leq 1$ oraz $4 \leq x < 5$
- $-4 < x \leq -2$ oraz $1 \leq x \leq 4$
- $4 \leq x \leq 2$ oraz $1 \leq x \leq 4$

**Ćwiczenie 13**

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $k$.



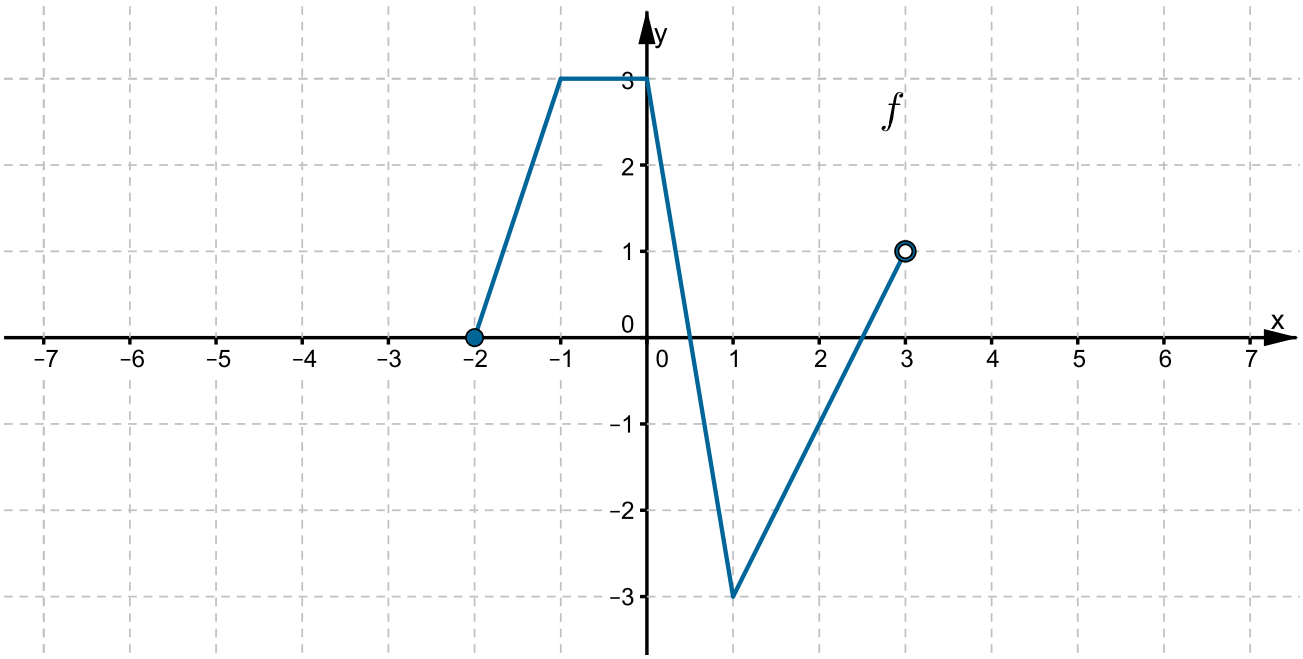

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Funkcja $k$ jest stała w zbiorach argumentów $x$ spełniających warunki:

- $-2 \leq x \leq 3$
- $-2 \leq x \leq 0$ oraz $1 \leq x \leq 3$
- $-2 \leq x \leq -1$ oraz $1 \leq x \leq 2$
- $-2 \leq x \leq -1$ oraz $1 \leq x \leq 3$

**Ćwiczenie 14**

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

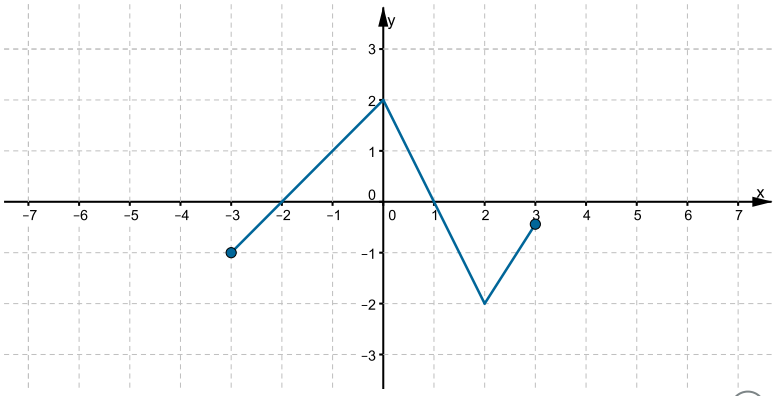
Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

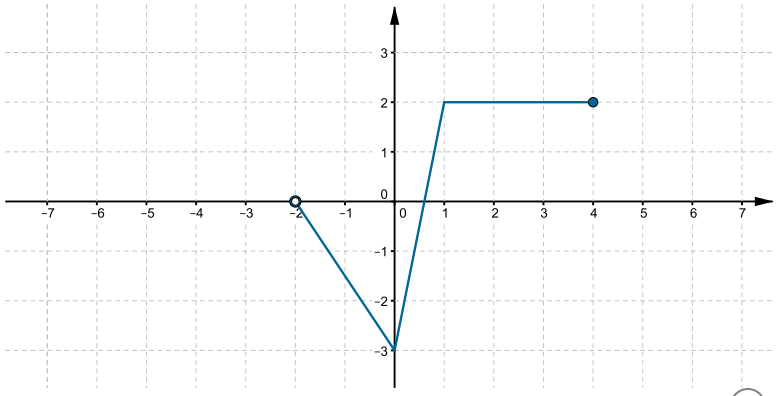
- [ ] Funkcja $f$ jest rosnąca w zbiorach argumentów $x$, takich, że $-2 \leq x \leq -1$ oraz $1 \leq x \leq 3$.
- [ ] Funkcja $f$ jest określona dla argumentów $-2 \leq x \leq 3$
- [ ] Funkcja f jest stała w zbiorze argumentów $x$, takich, że $-1 \leq x \leq 3$.
- [ ] Funkcja $f$ jest stała w zbiorze argumentów $x$, takich, że $-1 \leq x \leq 0$
- [ ] Funkcja $f$ jest malejąca w zbiorze argumentów $x$, takich, że $-3 \leq x \leq 3$
- [ ] Funkcja $f$ jest określona dla argumentów $-2 \leq x < 3$.
- [ ] Funkcja $f$ jest malejąca w zbiorze argumentów $x$, takich, że $0 \leq x \leq 1$.
- [ ] Funkcja $f$ jest rosnąca w zbiorach argumentów $x$, takich, że $-2 \leq x \leq -1$ oraz

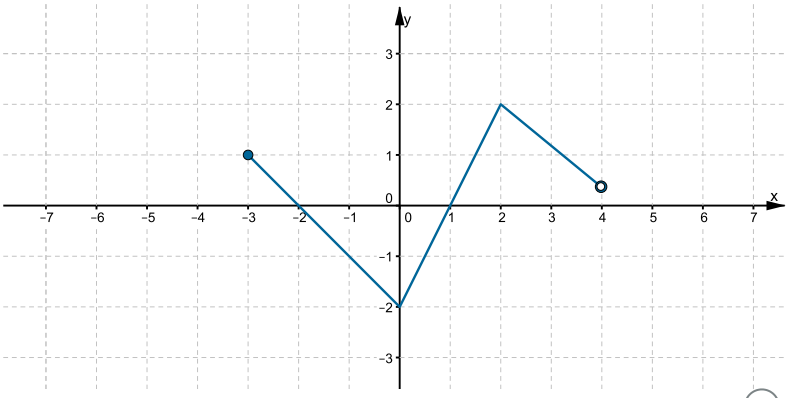
$$1 \leq x < 3.$$

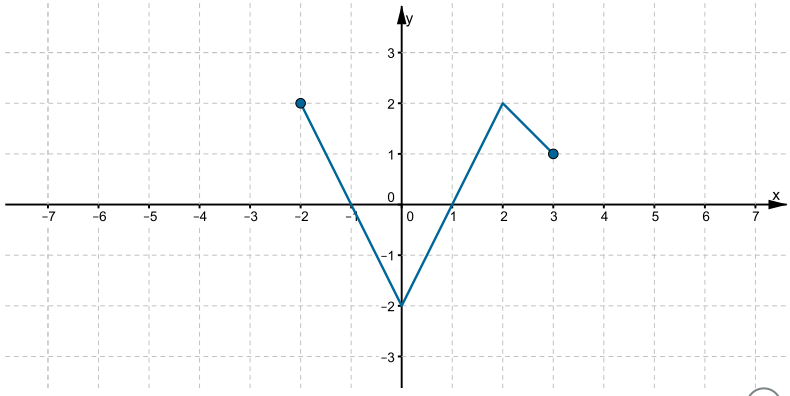
**Ćwiczenie 15**

Wskaż wykres funkcji, która dla każdego argumentu $-2 < x < 1$ przyjmuje wartości ujemne.



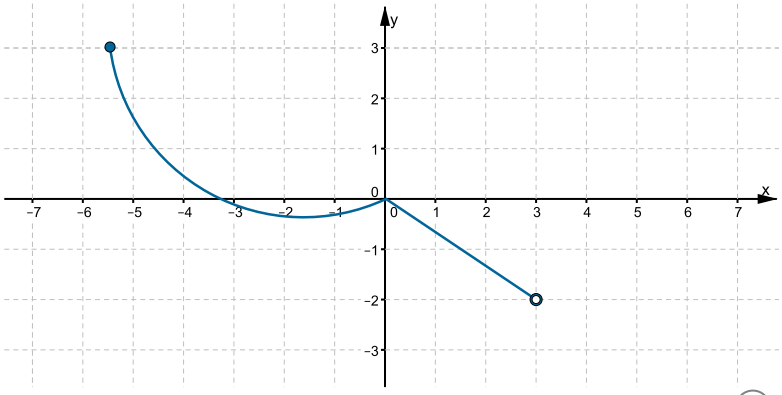



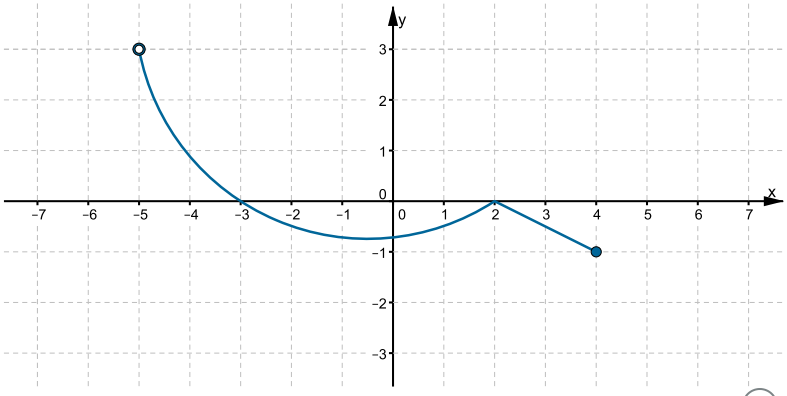



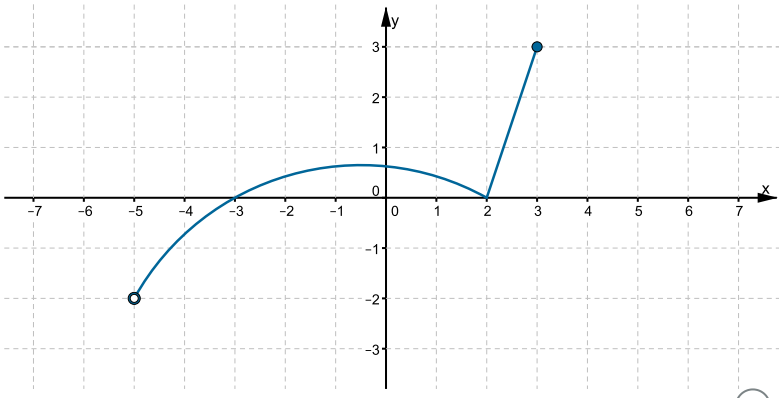

y
x
3
2
1
0
−1
−2
−3
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7

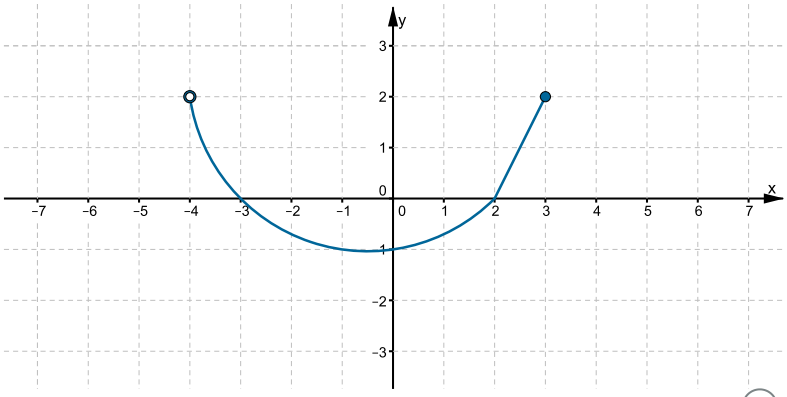
**Ćwiczenie 16**

Wskaż wykres funkcji, która dla każdego argumentu $-5 < x < -3$ przyjmuje wartości dodatnie.



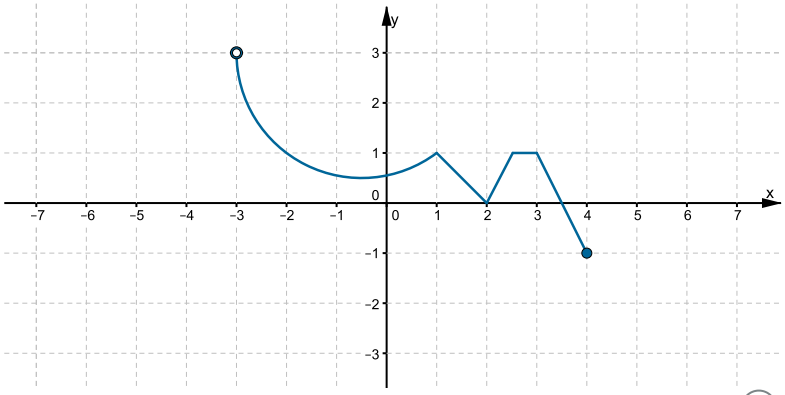



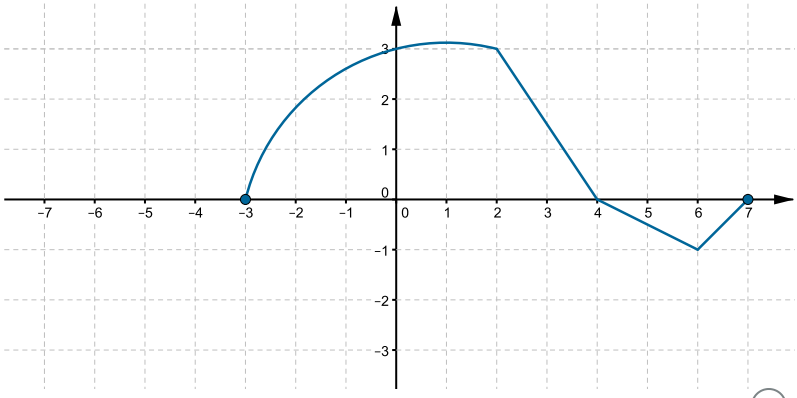



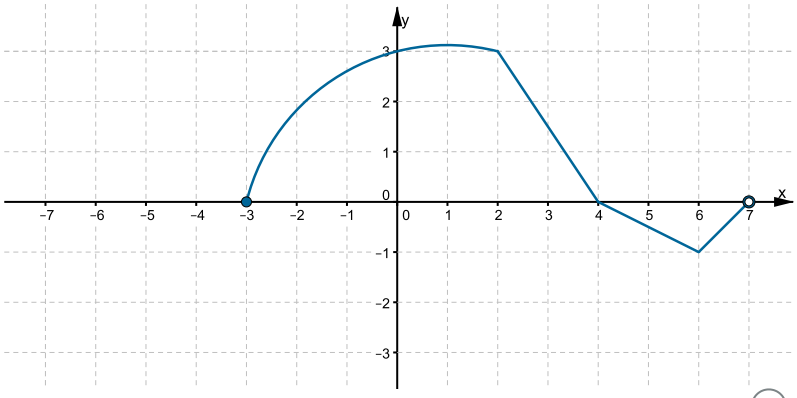

y
x
3
2
1
0
-1
-2
-3
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

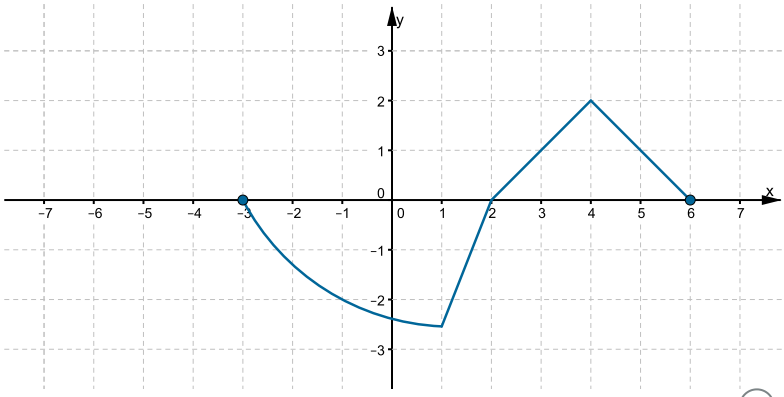
**Ćwiczenie 17**

Wskaż wykres funkcji, która dla każdego argumentu $-3 \leq x \leq 4$ przyjmuje wartości nieujemne.



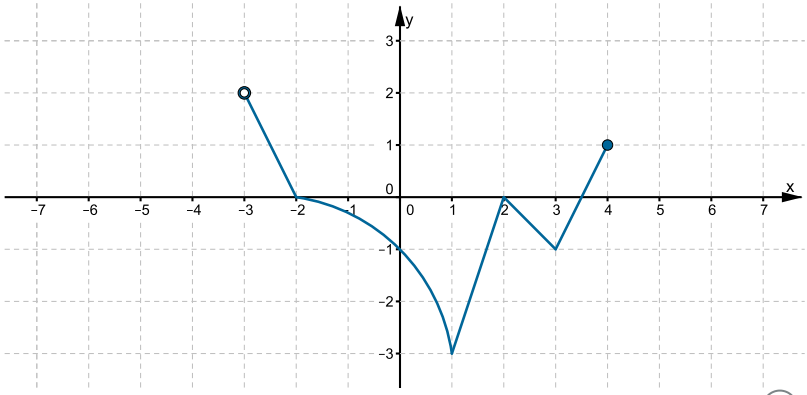



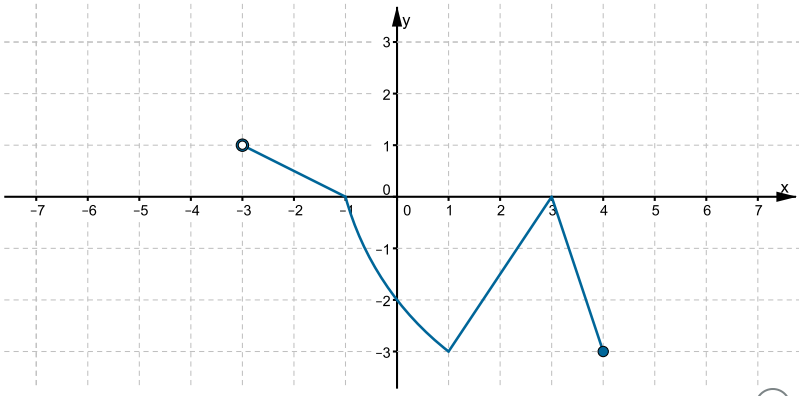



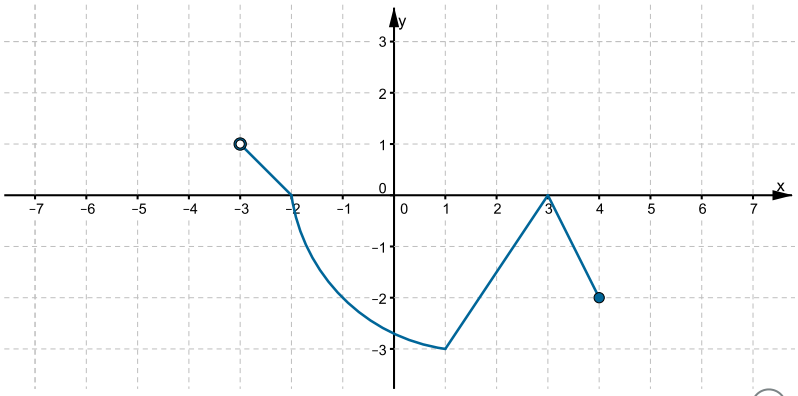

y
x
3
2
1
0
-1
-2
-3
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

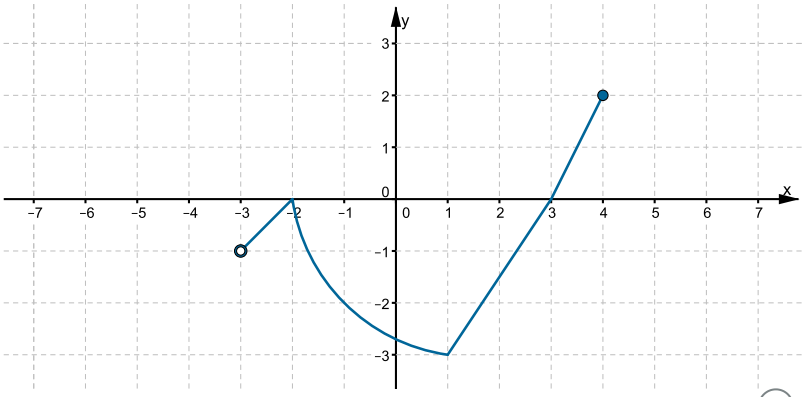
**Ćwiczenie 18**

Wskaż wykres funkcji, która dla każdego argumentu $-2 \leq x \leq 4$ przyjmuje wartości niedodatnie.



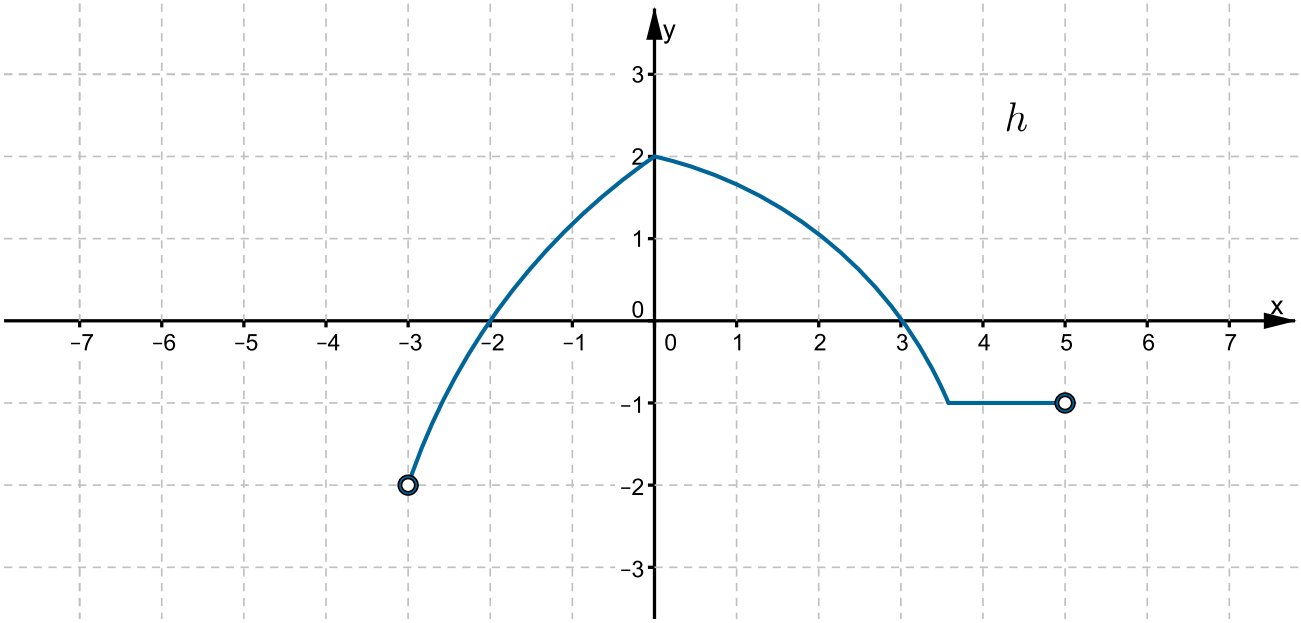






## Ćwiczenie 19

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $h$.



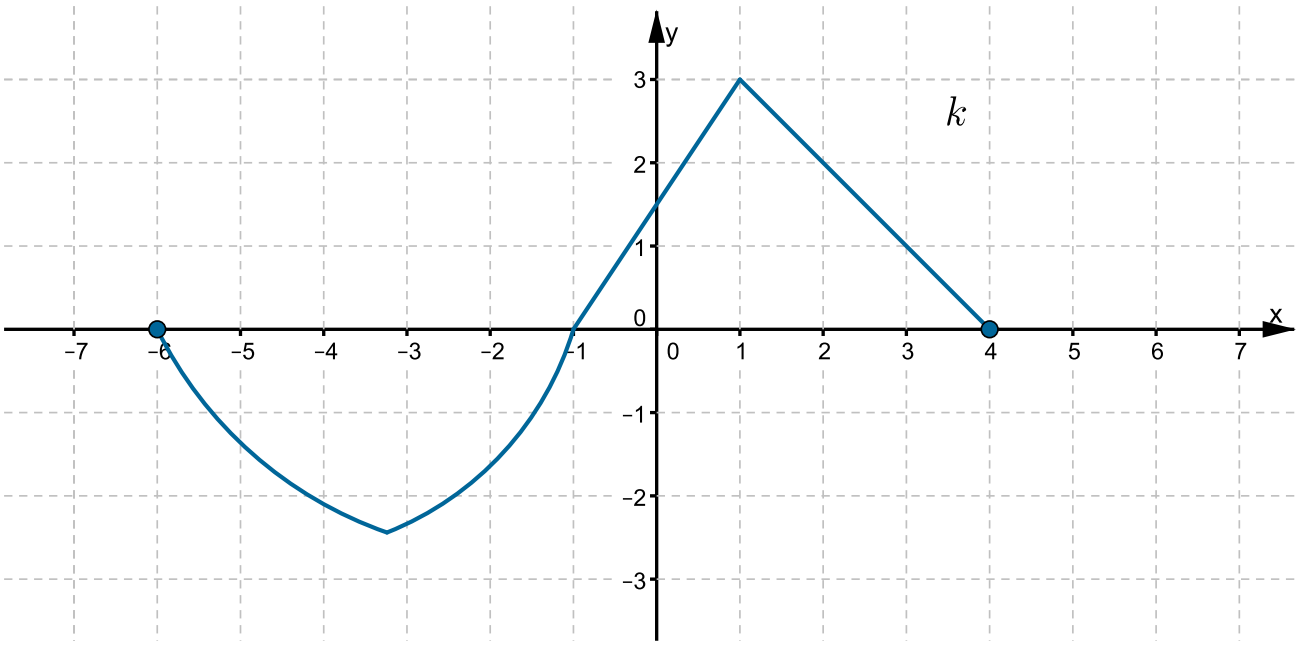

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Funkcja $h$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego argumentu $x$, takiego że:

- $-3 < x < -2$
- $-2 < x < 3$
- $3 < x < 5$
- $-2 \leq x \leq 3$

## Ćwiczenie 20

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $k$.



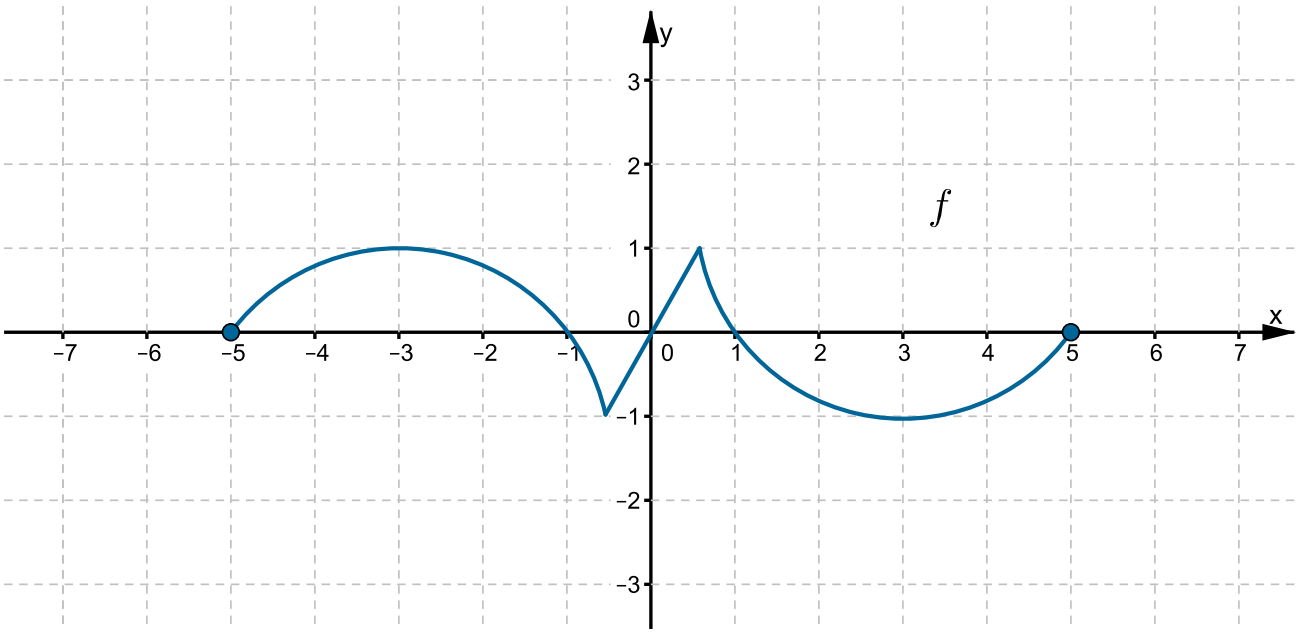

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Funkcja $k$ przyjmuje wartości ujemne dla każdego argumentu $x$ spełniającego warunek:

- $-1 < x \leq 4$
- $-6 < x < -1$
- $-6 \leq x \leq -1$
- $-1 < x < 4$

## Ćwiczenie 21

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oceń, czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Funkcja $f$ ma $5$ miejsc zerowych.
- [ ] Funkcja $f$ przyjmuje wartość najmniejszą $-1$ dla argumentu $-1$.
- [ ] Funkcja $f$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego argumentu $x$ spełniającego warunki $-5 \leq x < -1$ oraz $0 < x < 1$.
- [ ] Funkcja $f$ przyjmuje wartości ujemne dla każdego argumentu $x$ spełniającego warunki $-1 < x < 0$ oraz $1 < x \leq 5$.
- [ ] Funkcja $f$ jest określona dla argumentów $-5 \leq x \leq 5$.
- [ ] Funkcja $f$ przyjmuje wartości niedodatnie dla każdego argumentu $x$ spełniającego warunki $-1 \leq x < 0$ oraz $1 \leq x \leq 5$.
- [ ] Funkcja $f$ przyjmuje wartości ujemne dla każdego argumentu $x$, takiego że $-1 < x < 0$ oraz $1 < x < 5$.

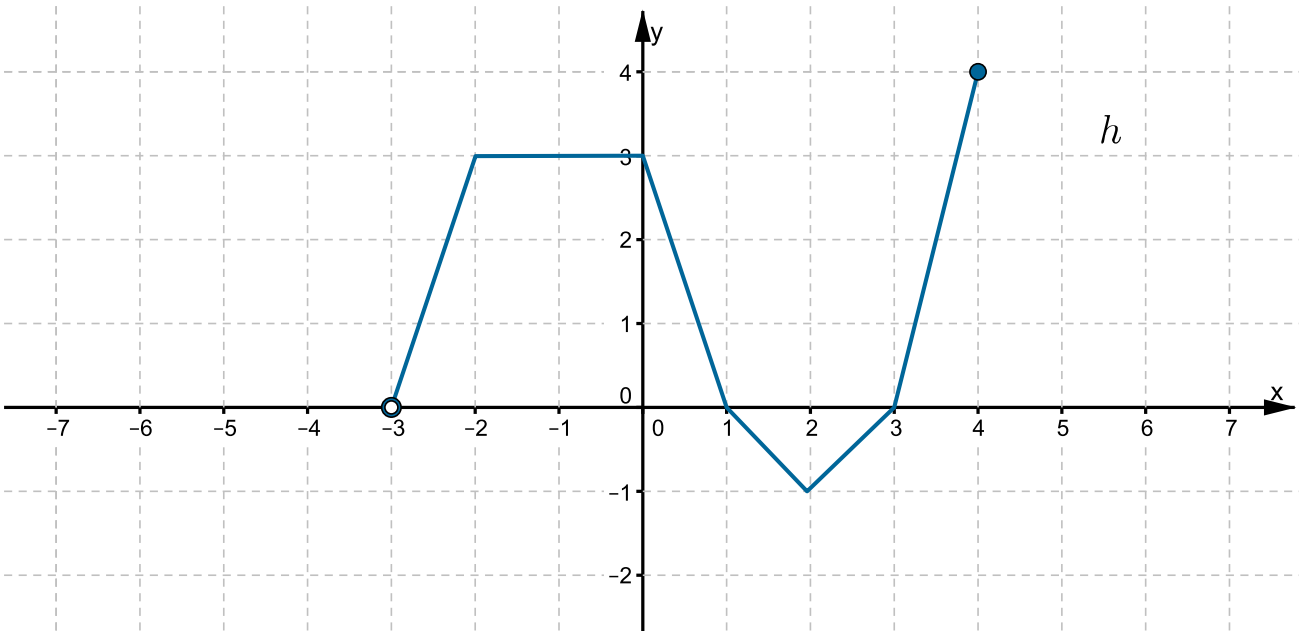
- [ ] Funkcja $f$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego argumentu $x$, takiego że $-5 < x < -1$ oraz $0 < x < 1$.

- [ ] Największa wartość funkcji $f$ wynosi $1$.

- [ ] Funkcja $f$ przyjmuje wartości nieujemne dla każdego argumentu $\mathrm{x}$ spełniającego warunki $-5 \leq x \leq -1$ oraz $0 < x$
$\leq 1$.

**Ćwiczenie 22**

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $h$.



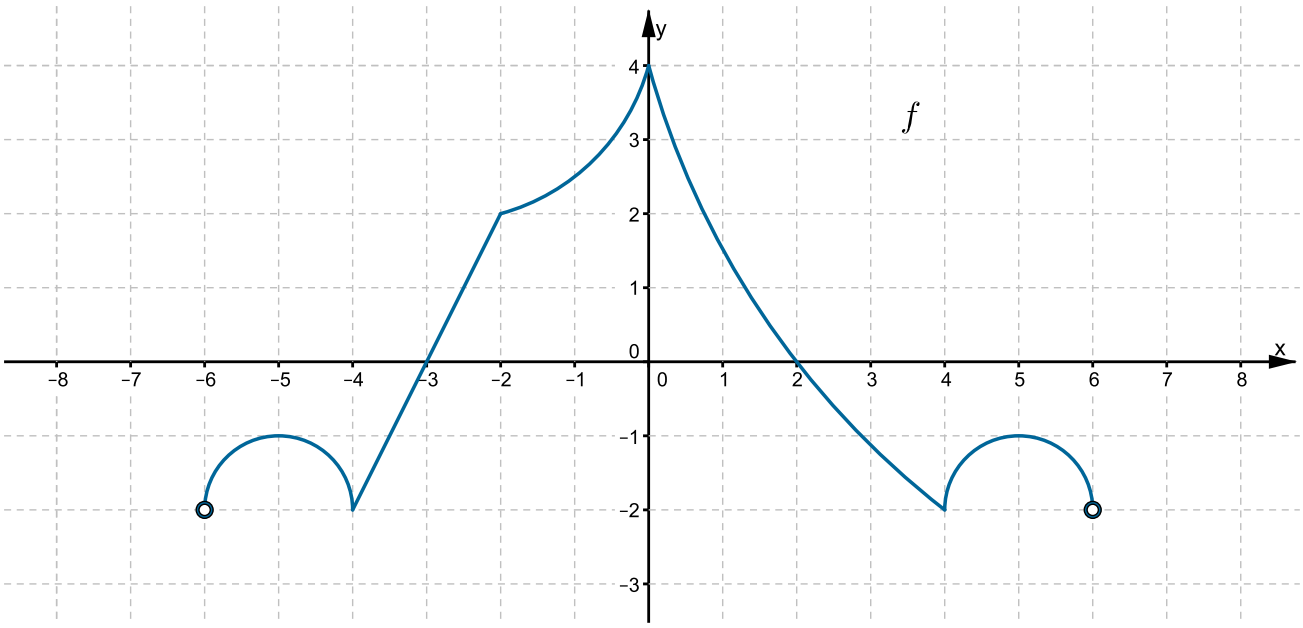

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odczytaj z wykresu i zapisz:

1. dziedzinę funkcji $h$,
2. zbiór wartości funkcji $h$,
3. miejsca zerowe funkcji $h$,
4. zbiór argumentów, w którym funkcja $h$ jest rosnąca,
5. zbiór argumentów, w którym funkcja $h$ jest malejąca,
6. dla jakich argumentów funkcja $h$ jest stała,
7. dla jakich argumentów funkcja $h$ przyjmuje wartości dodatnie,
8. dla jakich argumentów funkcja $h$ przyjmuje wartości ujemne,
9. największą i najmniejszą wartość funkcji $h$.

**Ćwiczenie 23**

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odczytaj z wykresu i zapisz:

1. dziedzinę funkcji $f$,
2. zbiór wartości funkcji $f$,
3. miejsca zerowe funkcji $f$,
4. zbiór argumentów, w którym funkcja $f$ jest rosnąca,
5. zbiór argumentów, w którym funkcja $f$ jest malejąca,
6. dla jakich argumentów funkcja $f$ przyjmuje wartości dodatnie,
7. dla jakich argumentów funkcja $f$ przyjmuje wartości ujemne,
8. największą i najmniejszą wartość funkcji $f$.

**Ćwiczenie 24**

Narysuj wykres funkcji określonej w zbiorze liczb naturalnych mniejszych od $7$, wiedząc, że:

1. funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów większych od $4$,
2. funkcja jest rosnąca,
3. funkcja ma jedno miejsce zerowe,
4. największa wartość funkcji wynosi $3$.

**Ćwiczenie 25**

Narysuj wykres funkcji określonej w zbiorze $\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, wiedząc, że:

1. funkcja przyjmuje wartość ujemną dla jednego argumentu,
2. funkcja ma dwa miejsca zerowe,
3. najmniejsza wartość funkcji wynosi $-2$.

**Ćwiczenie 26**

Narysuj wykres funkcji określonej dla każdego argumentu $-4 < x \leq 5$, wiedząc, że:

1. funkcja jest rosnąca w zbiorze argumentów $x$, takich że $1 \leq x \leq 5$,
2. funkcja jest malejąca w zbiorze argumentów $x$, takich że$-4 < x \leq 1$,
3. punkt $(1,\ -3)$ należy do wykresu funkcji.

**Ćwiczenie 27**

Narysuj wykres funkcji, wiedząc, że:

1. funkcja przyjmuje wartości ujemne dla każdego argumentu $-4 < x < 3$,
2. funkcja jest rosnąca w zbiorze argumentów $x$ spełniających warunek $1 \leq x \leq 5$,
3. funkcja ma jedno miejsce zerowe.

**Ćwiczenie 28**

Narysuj wykres funkcji, wiedząc, że:

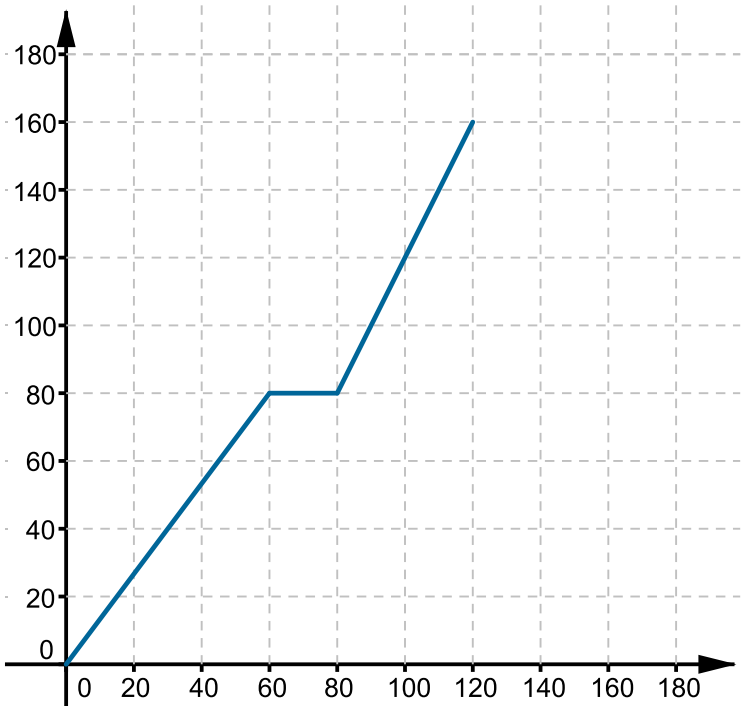
1. funkcja jest stała w zbiorze argumentów $x$, takich że$-3 \leq x \leq -1$,
2. funkcja nie ma wartości największej,
3. funkcja ma dwa miejsca zerowe,
4. funkcja jest malejąca w zbiorze argumentów $x$, takich że $-6 < x \leq -3$.

# Funkcja jej własności. Część II

**Ćwiczenie 1**

Pan Aleksander wyjechał na spotkanie do miejscowości odległej o $160\ \mathrm{km}$ od jego miejsca zamieszkania.

Rozważmy wykres funkcji przedstawiający, jak zmieniała się odległość od domu pana Aleksandra, wyrażona w kilometrach, w zależności od czasu wyrażonego w minutach.



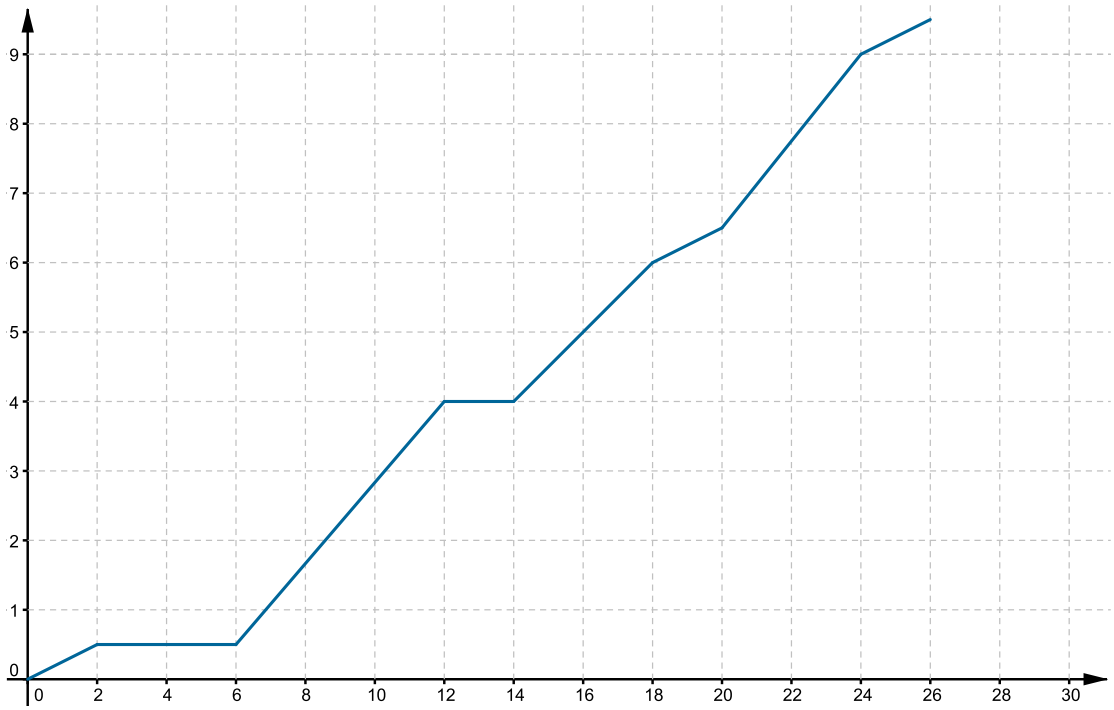

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania:

1. Ile czasu zajęło panu Aleksandrowi pokonanie całej trasy?
2. O której godzinie (zakładając, że wyjechał z domu o $8:00$)pan Aleksander zrobił przerwę w podróży?
3. Ile czasu trwała przerwa w podróży?
4. Z jaką średnią prędkością poruszał się pan Aleksander przed przerwą w podróży, a z jaką po przerwie?
5. Jaka była średnia prędkość, z jaką poruszał się pan Aleksander w czasie całej podróży?
6. Czy pan Aleksander zdążył na spotkanie, które miało się odbyć o godzinie $10:30$ ?

**Ćwiczenie 2**

Pani Ewa dojeżdża do pracy autobusem i tramwajem. Wykres przedstawia, jak, pewnego dnia podczas drogi do pracy, zmieniała się odległość od domu pani Ewy wyrażona w kilometrach w zależności od czasu wyrażonego w minutach.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania, wiedząc, że pani Ewa wyszła z domu o godzinie $6:30$, pracę rozpoczyna o godzinie $7:00$, najpierw jechała $2$ przystanki autobusem, a potem $1$ przystanek tramwajem. Przystanki znajdują się w pewnej odległości od siebie.

1. Ile czasu zajęła pani Ewie droga na przystanek autobusowy?
2. Ile czasu pani Ewa czekała na autobus?
3. Jak daleko od domu pani Ewy znajduje się przystanek autobusowy, a w jakiej odległości jest przystanek tramwajowy?
4. Ile czasu zajmuje pani Ewie przejście od przystanku autobusowego do przystanku tramwajowego? W jakiej odległości od siebie znajdują się te przystanki?
5. Jaką odległość pokonała pani Ewa autobusem, a jaką tramwajem?
6. Z jaką średnią prędkością jechał autobus, a z jaką tramwaj?

7. Jak daleko od domu pani Ewy znajduje się miejsce, w którym pracuje?
8. Czy pani Ewa spóźniła się tego dnia do pracy?
9. W jakiej odległości od przystanku tramwajowego, na którym wysiadła pani Ewa, znajduje się miejsce, w którym pracuje?

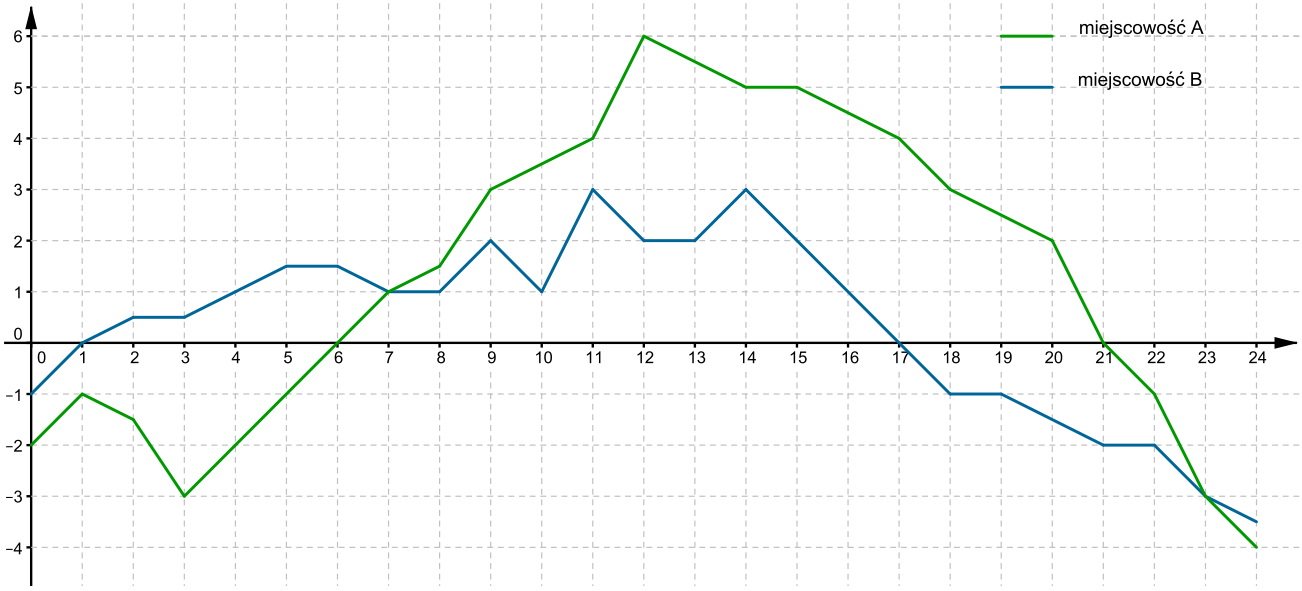
**Ćwiczenie 3**

Korzystając z wykresu przedstawionego w zadaniu $2$, rozstrzygnij, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

- [ ] Kiedy pani Ewa weszła do pracy, na jej zegarku, który spieszy się $3$ minuty, była godzina $7:00$.
- [ ] Odległości od domu pani Ewy do przystanku autobusowego, od przystanku autobusowego do przystanku tramwajowego i od przystanku tramwajowego do pracy pani Ewy są jednakowe.
- [ ] Pani Ewa czekała na przystanku autobusowym o $4$ minuty dłużej niż na przystanku tramwajowym.
- [ ] Średnia prędkość, z jaką poruszała się pani Ewa w drodze do pracy, w zaokrągleniu do całości, wynosiła $22\ \mathrm{km/h}$ .

**Ćwiczenie 4**

Wykresy przedstawiają, jak zmieniała się w ciągu doby temperatura powietrza w miejscowościach $A$ i $B$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na podstawie wykresów odpowiedz na pytania.

1. Jaka była najwyższa temperatura w miejscowości $A$, a jaka w miejscowości $B$? O której godzinie termometry wskazywały te temperatury?
2. Ile wynosiła amplituda (różnica między najwyższą i najniższą temperaturą) w miejscowości $A$, a ile w miejscowości $B$? W której miejscowości ta amplituda była większa?
3. O której godzinie termometry w obu miejscowościach wskazywały taką samą temperaturę powietrza? Jaka to była temperatura?
4. W jakich godzinach temperatura powietrza w miejscowości $A$ była dodatnia?
5. W jakich godzinach temperatura powietrza w miejscowości $B$ była ujemna?
6. W której miejscowości dłużej w ciągu doby panowała temperatura dodatnia?
7. O której godzinie termometry w obu miejscowościach wskazywały $3^\circ C$?
8. W jakich godzinach temperatura powietrza w miejscowości A rosła, a w jakich malała?

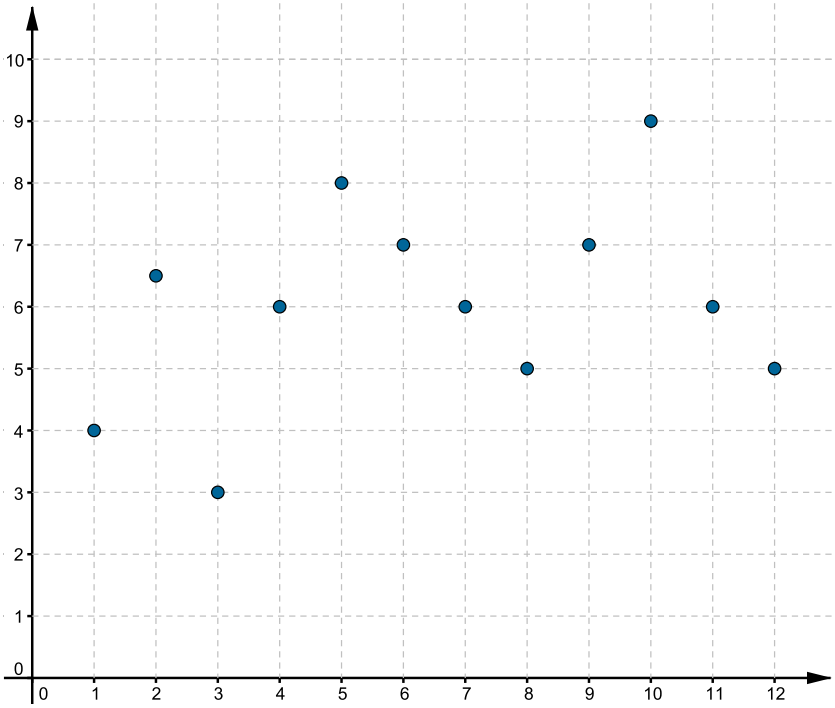
9. Jaka temperatura była w każdej z tych miejscowości o godzinie $12$? W której z nich była wyższa temperatura? O ile $^\circ C$?

## Ćwiczenie 5

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 6**

Wykres przedstawia, jak zmieniała się cena akcji firmy Silver w poszczególnych miesiącach pewnego roku.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania.

1. Kiedy akcje firmy kosztowały najwięcej, a kiedy najmniej?
2. Jaką wartość akcje osiągały najczęściej?
3. W którym miesiącu należało kupić akcje, a w którym sprzedać, aby osiągnąć największy zysk?
4. Jaka była średnia cena akcji w ciągu roku? Ile razy akcje osiągnęły cenę wyższą od średniej, a ile razy cenę niższą?
5. Kiedy cena akcji wynosiła $5$ zł?
6. Ile procent większa była cena akcji we wrześniu niż w sierpniu?
7. Ile procent mniejsza była cena akcji w czerwcu niż w maju?

**Ćwiczenie 7**

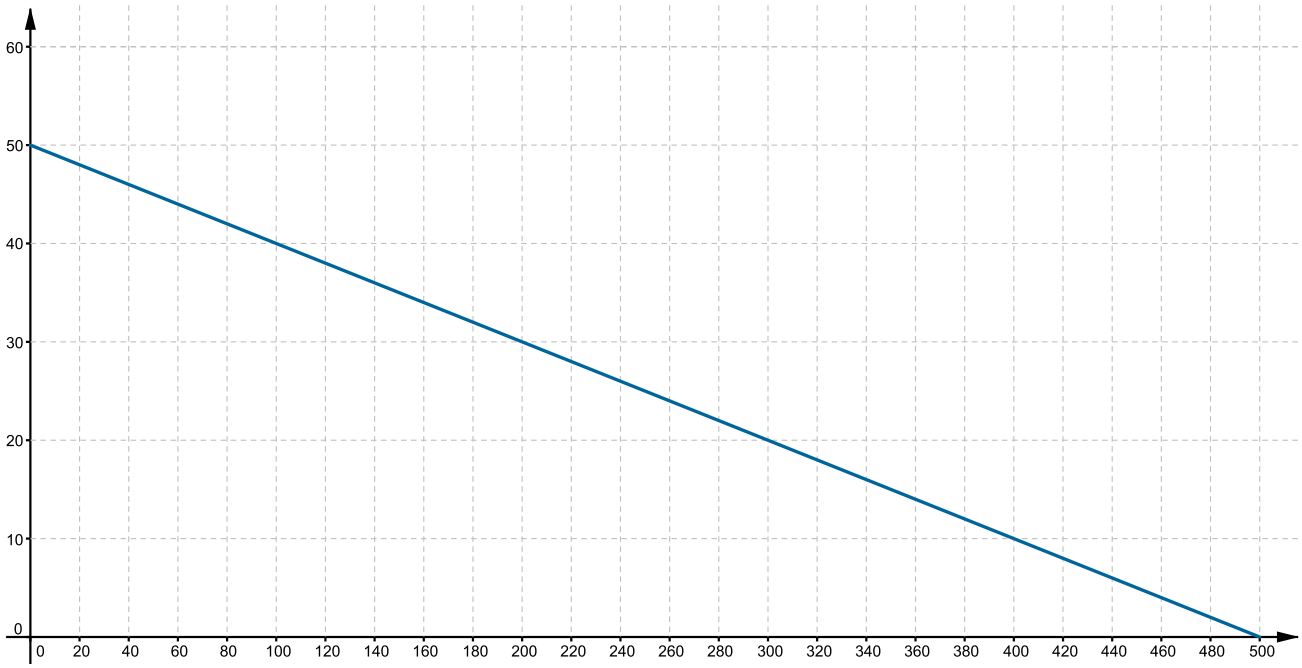
Korzystając z wykresu przedstawionego w zadaniu $6$, dokończ zdania, tak aby były prawdziwe.

Pani Agata kupiła $400$ akcji firmy Silver w kwietniu, następnie sprzedała $150$ z nich w czerwcu, a resztę w październiku. Na przeprowadzonych transakcjach pani Agata zarobiła:

- ◯ $900$ zł
- ◯ $750$ zł
- ◯ $1050$ zł
- ◯ $700$ zł

**Ćwiczenie 8**

Wykres przedstawia zależność ilości benzyny w baku samochodu w litrach od ilości przejechanych kilometrów. Samochód rozpoczyna jazdę po napełnieniu baku paliwem do pełna.



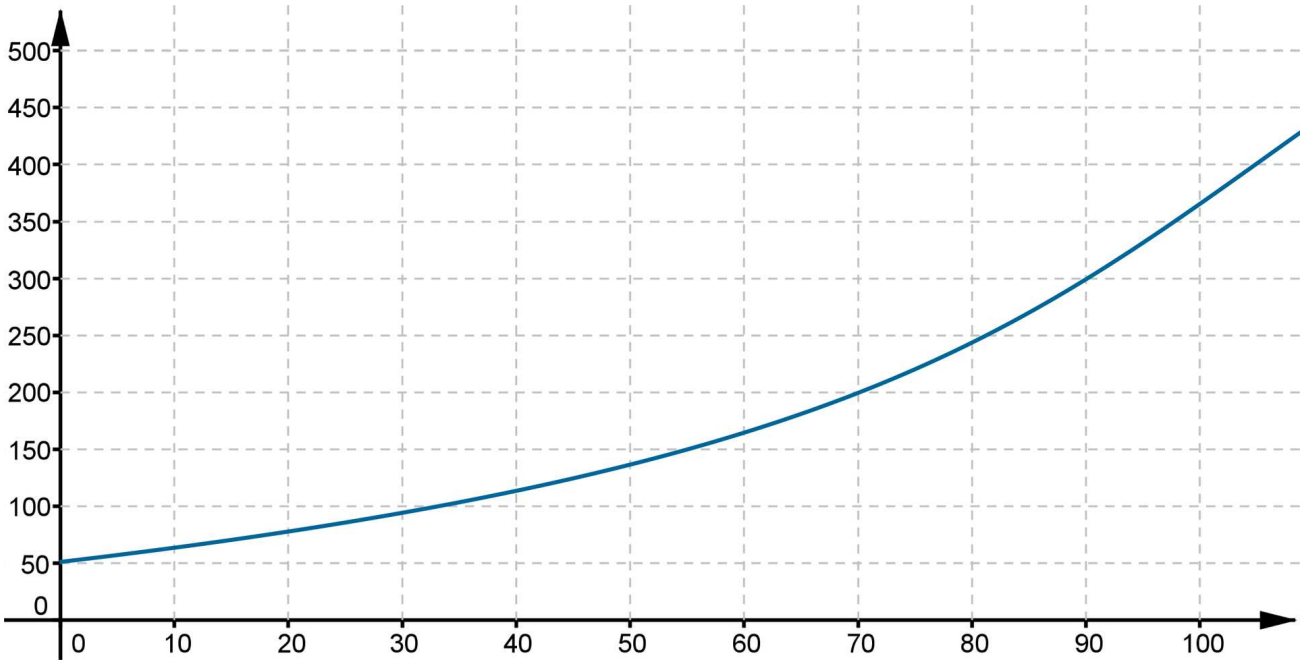

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Pełny bak wystarcza na przejechanie $500$ .
- [ ] Pełny bak mieści $50\ l$ benzyny.
- [ ] Po przejechaniu $200$ km w baku pozostała mniej niż połowa benzyny z pełnego baku.
- [ ] Samochód spala $10$ benzyny podczas przejechania $100$ .
- [ ] W baku pozostało $10\ l$ benzyny po przejechaniu przez samochód $400\ \mathrm{km}$.

**Ćwiczenie 9**

Wykres przedstawia zależność ilości rozpuszczonego w $100$ g wody pierwiastka w gramach od temperatury w $^{\circ}C$



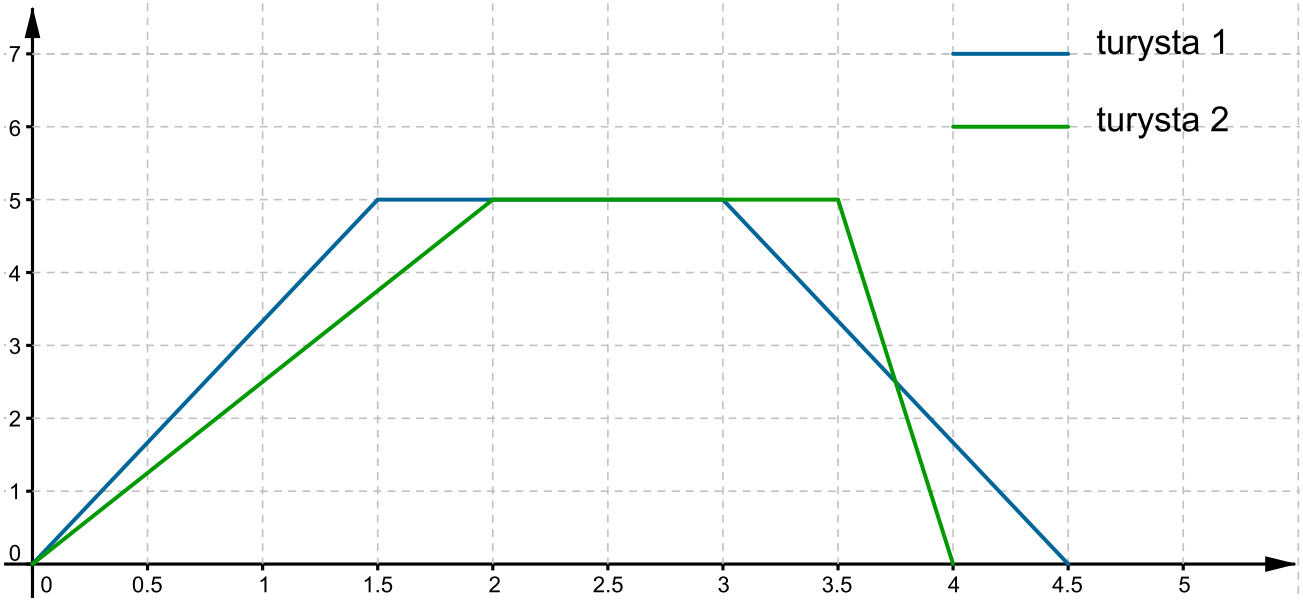

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na podstawie wykresu rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] W temperaturze $70^{\circ}\mathrm{C}$ w $50$ g wody można rozpuścić $200$ g tego pierwiastka.
- [ ] $300$ g pierwiastka można rozpuścić w $100$ g wody po ogrzaniu jej do temperatury $90^{\circ}\mathrm{C}$.

**Ćwiczenie 10**

Dwóch turystów wyruszyło jednocześnie z parkingu u podnóża góry, na szczycie której znajduje się zamek. Po dotarciu na miejsce turyści zwiedzili zamek i wrócili na parking. Wykres przedstawia, jak zmieniała się odległość turystów od parkingu w zależności od czasu wędrówki.



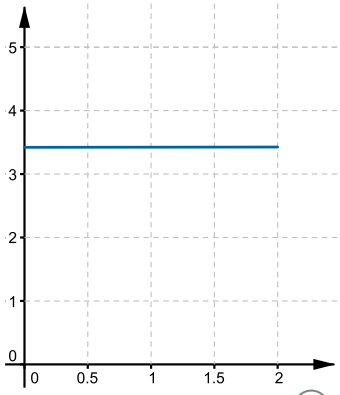

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

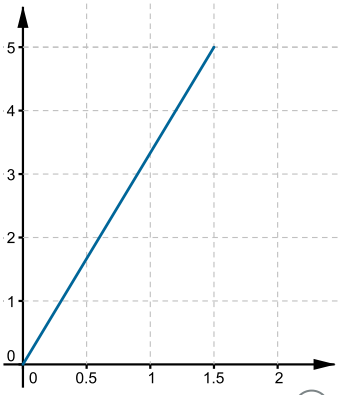
Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania.

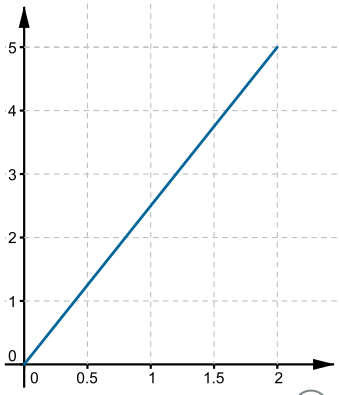
1. Który z turystów poświęcił więcej czasu na wycieczkę? O ile godzin więcej?
2. Z jaką średnią prędkością poruszał się turysta $1$, idąc pod górę, a z jaką, idąc z góry?
3. Z jaką średnią prędkością poruszał się turysta $2$ podczas całej wycieczki?
4. Ile czasu każdy z nich zwiedzał zamek?
5. W jakiej odległości od parkingu znajduje się zamek?
6. Który z turystów wcześniej znalazł się na parkingu po zejściu z góry?
7. Ile godzin zajęła każdemu z nich droga pod górę, a ile godzin droga z góry?

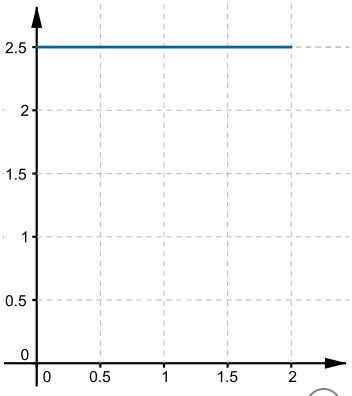
**Ćwiczenie 11**

Który z wykresów przedstawia zależność prędkości od czasu dla turysty $2$ podczas drogi pod górę?



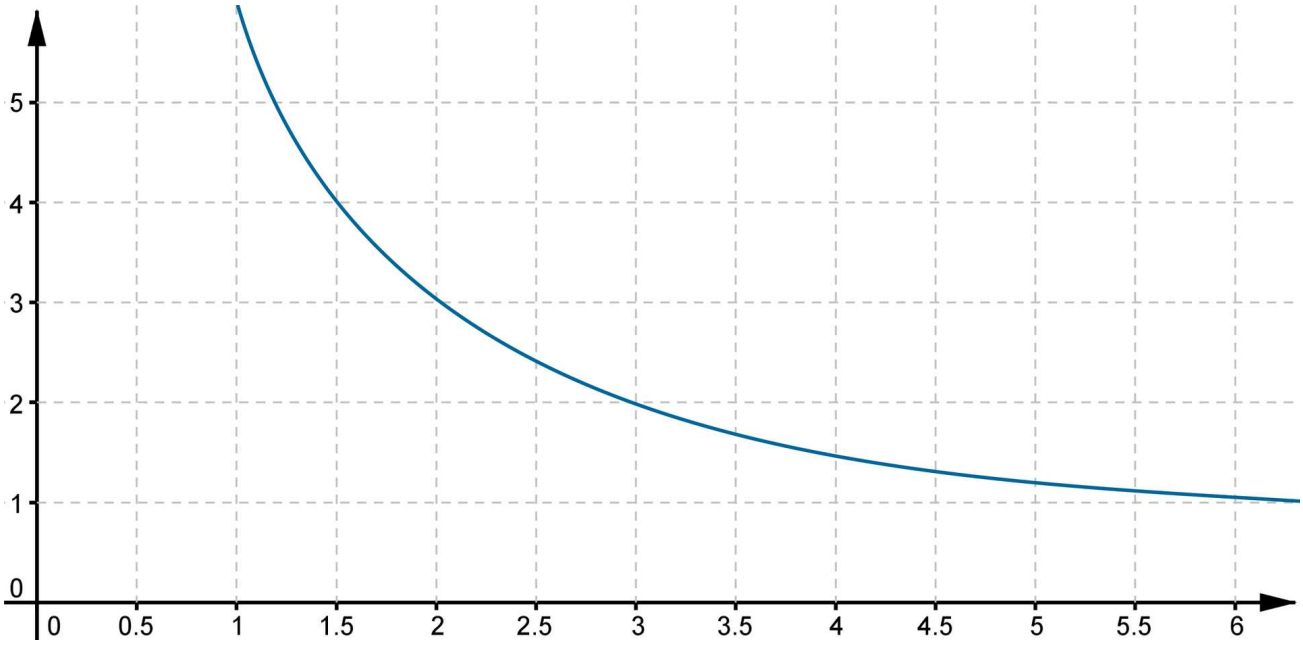



**Ćwiczenie 12**

Wykres przedstawia, jak zmienia się długość prostokąta o stałym polu w zależności od jego szerokości.



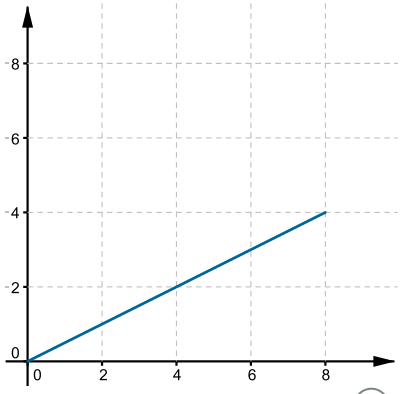

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

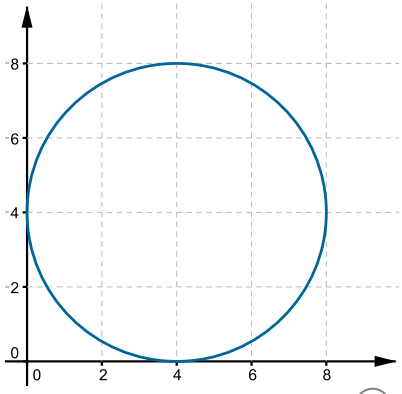
Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania.

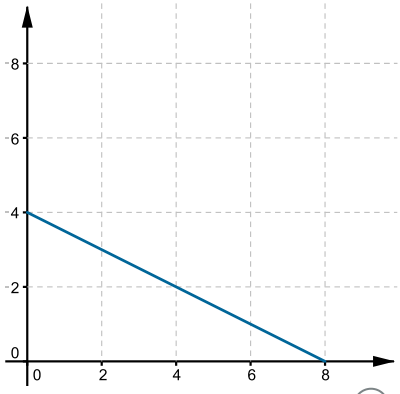
1. Jakie jest pole tego prostokąta?
2. Jaka jest długość prostokąta, którego szerokość wynosi $1{,}5$?
3. Jaka jest szerokość prostokąta, którego długość wynosi $3$?
4. Jak zmieni się długość prostokąta, jeżeli jego szerokość zwiększy się dwukrotnie, a jak, jeżeli zmaleje trzykrotnie?

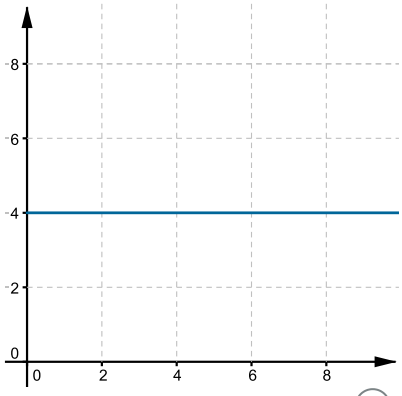
**Ćwiczenie 13**

Podczas wycieczki do stadniny Zosia obserwowała konia, który biegał po padoku na lonży o długości $4\ \mathrm{m}$. Tor, po którym poruszał się koń, ma kształt okręgu o środku w punkcie, w którym stoi człowiek trzymający lonżę, i promieniu równym długości lonży. Który z wykresów przedstawia zależność odległości między koniem i człowiekiem trzymającym lonżę od czasu ruchu konia.



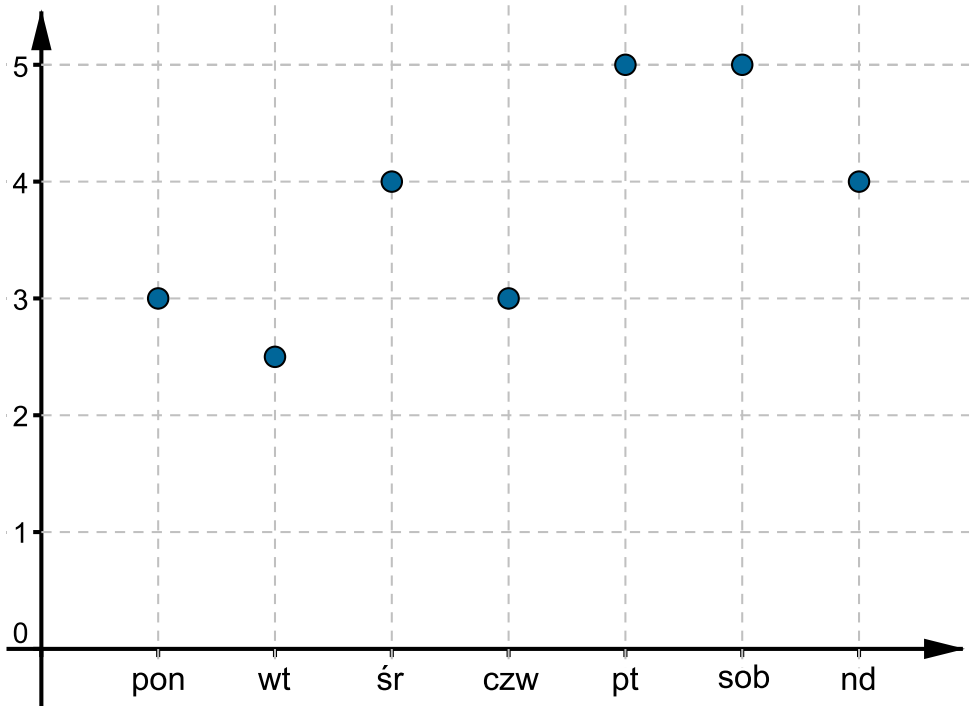



**Ćwiczenie 14**

Agnieszka przygotowuje się do konkursu z języka angielskiego. Liczbę godzin, które przeznaczyła w ciągu kolejnych dni na te przygotowania, przedstawiła na wykresie.



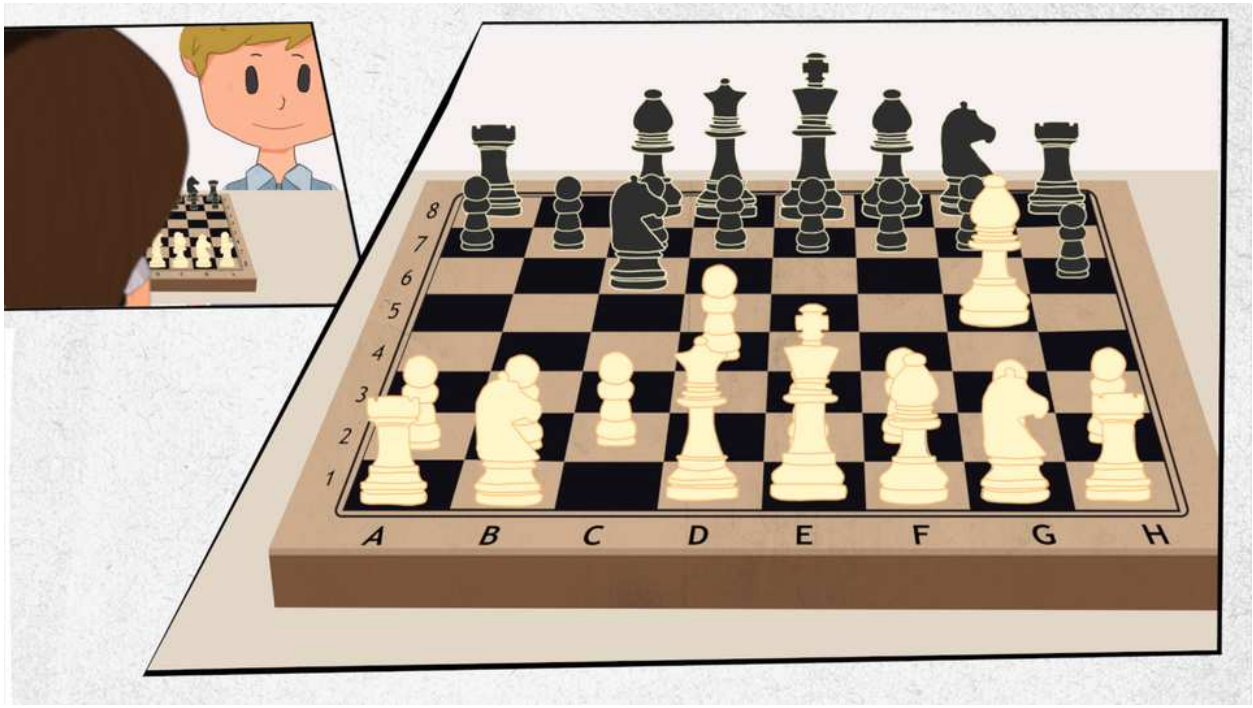

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na podstawie wykresu odpowiedz na pytania.

1. Ile godzin w ciągu tygodnia poświęciła Agnieszka na przygotowania do konkursu?
2. Jakim procentem liczby wszystkich godzin przeznaczonych na przygotowania była liczba godzin przeznaczona na przygotowania we wtorek?
3. Ile procent czasu mniej poświęciła na przygotowania Agnieszka we wtorek niż w środę?
4. Ile godzin więcej spędziła Agnieszka, przygotowując się do konkursu w piątek, sobotę i niedzielę niż w pozostałe dni tygodnia?
5. W jakie dni tygodnia Agnieszka przygotowywała się mniej niż cztery godziny?
6. O ile godzin więcej przygotowywała się Agnieszka w sobotę niż we wtorek?

# Położenie - szachy

Od połowy XVI wieku jedną z najpopularniejszych na świecie gier planszowych jest gra w szachy rozgrywana przez dwóch graczy za pomocą zestawu białych oraz czarnych bierek na 64 polach szachownicy. Na początku XX wieku bardzo popularne były korespondencyjne rozgrywki szachowe. Wcześniej, bo już w XI w., partie szachowe rozgrywano na odległość, a przesunięcia bierek przekazywane były przez posłańców. W drugiej połowie XX wieku można było już grać w szachy z komputerem lub z przeciwnikiem za pośrednictwem Internetu.




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Przykład 1**

Każde pole na szachownicy zakodowane jest jednoznacznie za pomocą pary uporządkowanej, której pierwszym elementem (pierwszą współrzędną) jest litera, a drugim elementem (drugą współrzędną) jest liczba. Zwyczajowo parę uporządkowaną zapisujemy, używając nawiasu, np. $(f,\ 5)$, gdzie $f$ - pierwszy

element pary, 5 – drugi element pary. Pozycja $(f,\ 5)$ oznacza pole leżące na przecięciu kolumny oznaczonej literą $f$ i wiersza oznaczonego liczbą 5.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsGCAKz4q

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Przykład 2**

Podaj współrzędne bierek.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsGCAKz4q

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Przykład 3**

Ustaw bierkę na wskazanym polu.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsGCAKz4q

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

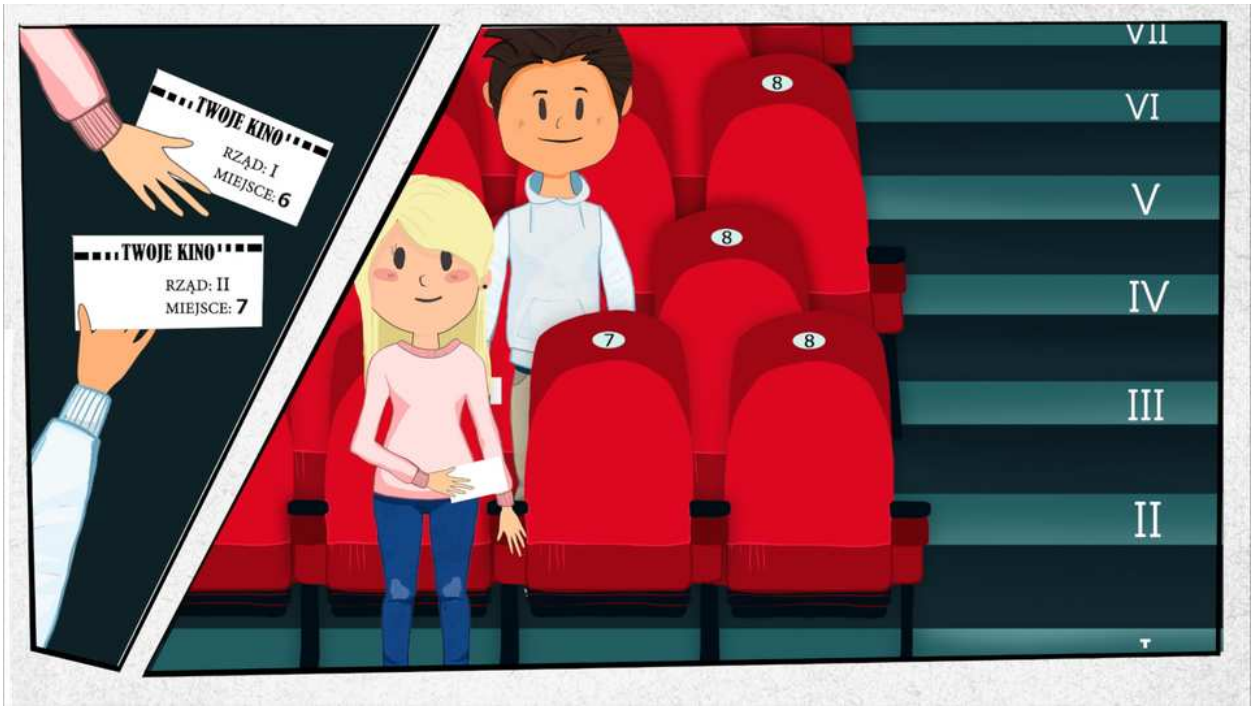
**Ćwiczenie 1**

Dowiedz się, jak można poruszać się skoczkiem po szachownicy. Ustaw skoczka na dowolnym polu szachownicy i podaj jego możliwe położenia w trzech kolejnych ruchach.

# Położenie - kino

## Przykłady określania położenia obiektów na płaszczyźnie

Miejsca na widowni kinowej lub teatralnej są zakodowane najczęściej za pomocą dwóch liczb zapisywanych na bilecie.




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Ćwiczenie 1**

Na rysunku przedstawiony jest schemat miejsc sali kinowej. Umieść widza na wskazanym miejscu.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1E50I7I3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ćwiczenie 2**

Podaj numer rzędu i miejsce zaznaczonego krzesła.



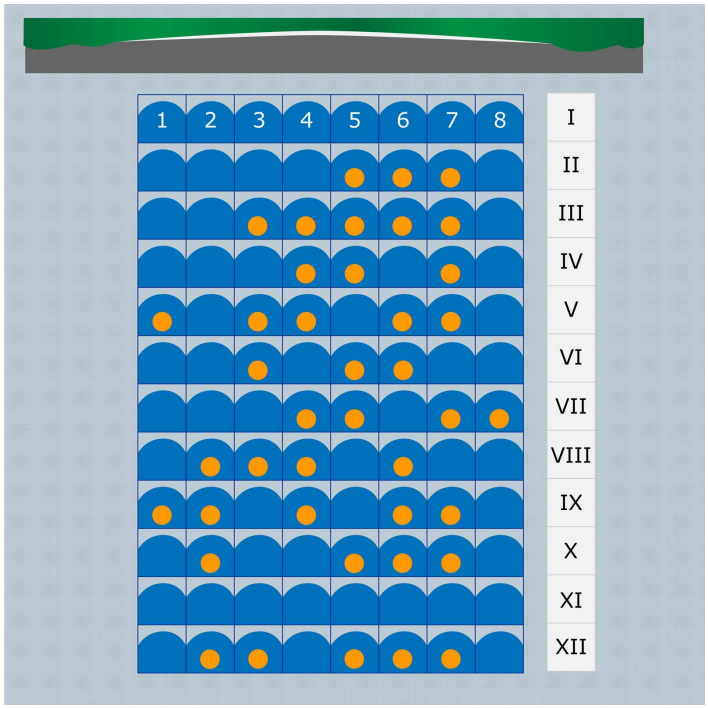

Podaj rząd i miejsce zaznaczonego siedzenia.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1E50I7I3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 3

Na rysunku zaznaczono zajęte miejsca w sali kinowej.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

1. Ile miejsc liczy sala kinowa?
2. Ile jest zajętych miejsc w VIII rzędzie?
3. W którym rzędzie są wolne wszystkie miejsca?
4. Ile jest wolnych miejsc z numerem $5$?
5. Ile jest wolnych miejsc z numerami parzystymi w rzędzie V?

# Położenie - oś liczbowa i układ współrzędnych

## Położenie punktu na osi liczbowej

**Ćwiczenie 1**

Odczytaj współrzędną punktu $A$ na osi liczbowej.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D6K9wly7T

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ćwiczenie 2**

Umieść punkt $A$ w odpowiednim miejscu na osi liczbowej tak, aby miał podaną współrzędną.

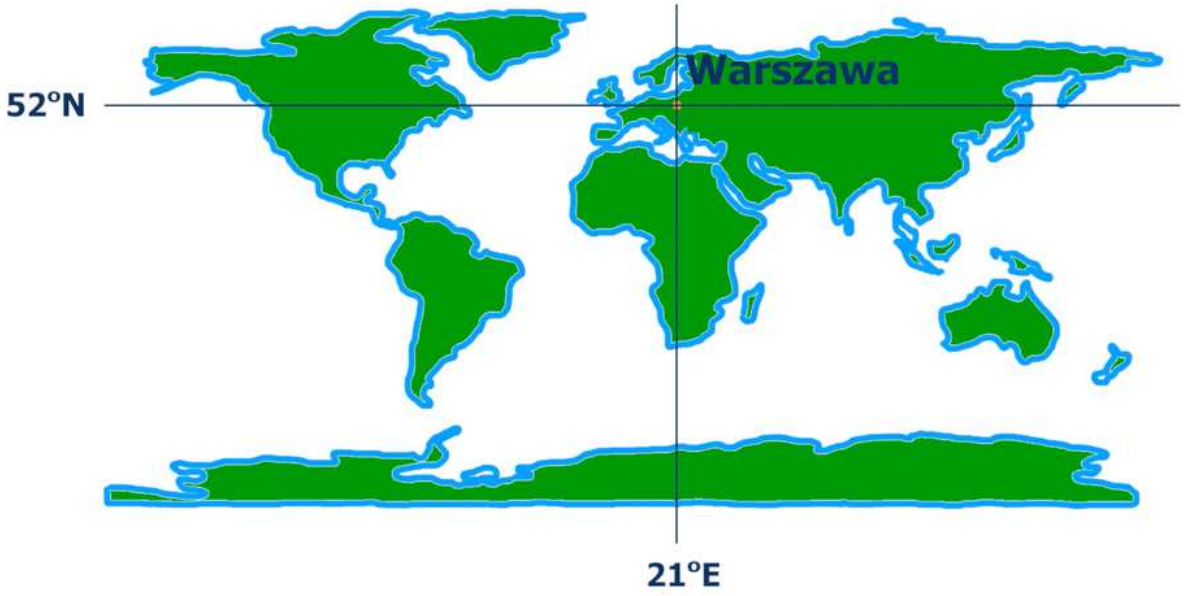



Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D6K9wly7T

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

# Położenie - mapa

## Położenie punktów na mapie




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Ćwiczenie 1**

Odczytaj współrzędne geograficzne (szerokość i długość) następujących miejscowości:




Zasób interaktywny dostępny pod adresem [https://zpe.gov.pl/a/DGYecdeZt](https://zpe.gov.pl/a/DGYecdeZt)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

1. Międzyrzec Podlaski
2. Tarnów
3. Kraków

**Ćwiczenie 2**

Poruszając się w nieznanym terenie, swoje położenie można określić, posługując się np. planem okolicy. Opisz za pomocą pary uporządkowanej położenie na planie:

1. Wielkiego Stawu Polskiego,
2. Kościelca,
3. Opalonego Wierchu.



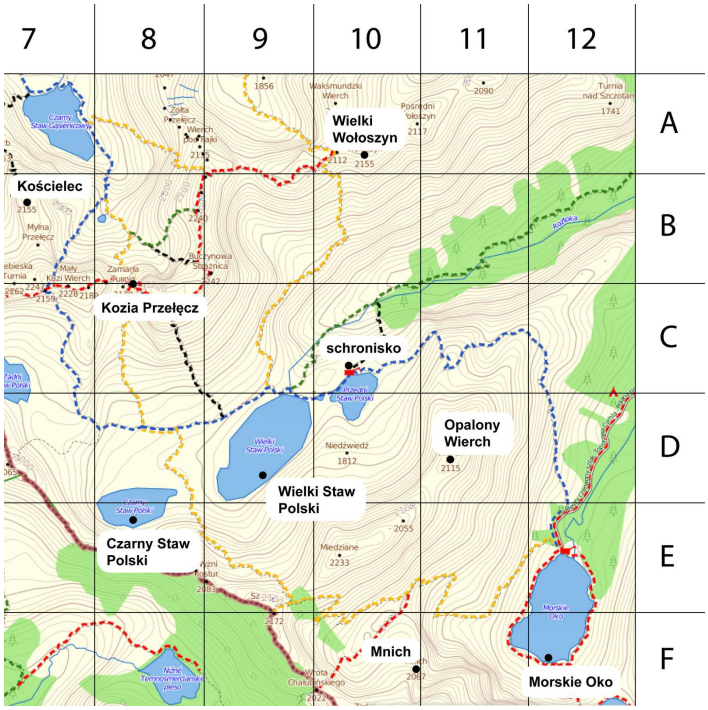

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DGYecdeZt

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 3

Zapisz, jakie obiekty znajdują się w kwadratach o współrzędnych:

1. $(C, 10)$
2. $(A,\ 10)$
3. $(F, 10)$




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

# Położenie - labirynt

## Labirynt

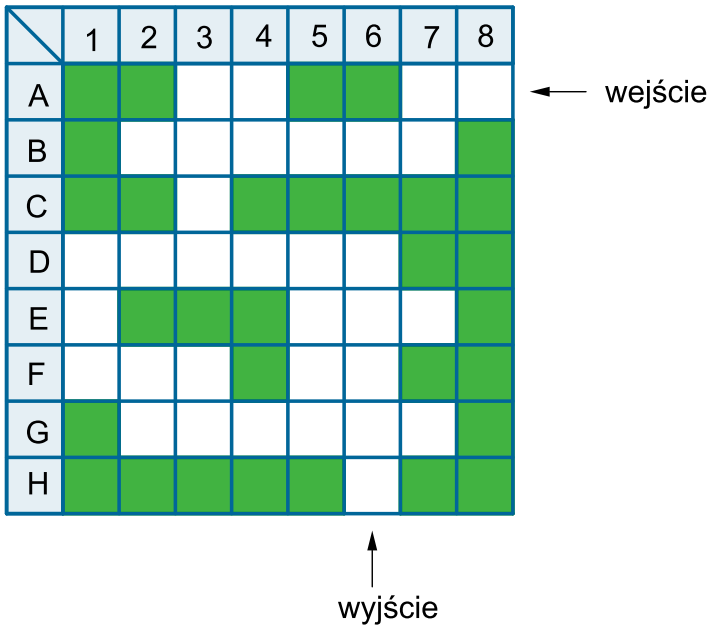
Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DMDefA67m

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

Rysunek przedstawia plan labiryntu.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 1**

Wyjście z labiryntu znajduje się na polu opisanym za pomocą pary:

- [ ] $(6, H)$
- [ ] $(8,\ A)$
- [ ] $(1, F)$
- [ ] $(5, H)$

**Ćwiczenie 2**

Po ilu polach trzeba przejść, idąc najkrótszą drogą od wejścia do wyjścia?

- ○ $20$
- ○ $16$
- ○ $18$
- ○ $12$

**Ćwiczenie 3**

Po ilu polach trzeba przejść, idąc najdłuższą drogą od wejścia do wyjścia? Zakładamy, że przez dowolne pole można przejść tylko jeden raz.

- ○ $26$
- ○ $28$
- ○ $24$
- ○ $35$

# Prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie

Geografowie określają położenie obiektów na kuli ziemskiej, korzystając z układu współrzędnych geograficznych, który wyznaczają południki, równoleżniki, równik i bieguny. Punkt zaznaczony na siatce geograficznej opisywany jest za pomocą pary liczb, nazywanej jego współrzędnymi geograficznymi. Pierwsza współrzędna to długość geograficzna, a druga – szerokość geograficzna. Punkt przecięcia południka zerowego z równikiem to początek układu współrzędnych.

**Przykład 1**

Współrzędne punktu $A$: $60^\circ$ długości geograficznej wschodniej, $40^\circ$ szerokości geograficznej północnej.
W zapisie międzynarodowym: $A = (60^\circ E,\ 40^\circ N)$

**Przykład 2**

W praktyce do szybkiego wyznaczania położenia obiektu (nawet poruszającego się) wykorzystuje się najczęściej Globalny System Nawigacji (GPS), który obejmuje swym zasięgiem całą kulę ziemską. System ten jest ogólnodostępny, z jego usług może korzystać każda osoba, która posiada odpowiedni odbiornik.

Układy współrzędnych stosuje się również w wielu innych dziedzinach wiedzy, np. w geodezji, fizyce (do opisywania ruchu ciał).

**Ćwiczenie 1**

Odczytaj współrzędne geograficzne (szerokość i długość) następujących miejscowości:




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsGqD5YZu

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

1. Międzyrzec Podlaski,
2. Tarnów
3. Kraków

# Kartezjański układ współrzędnych

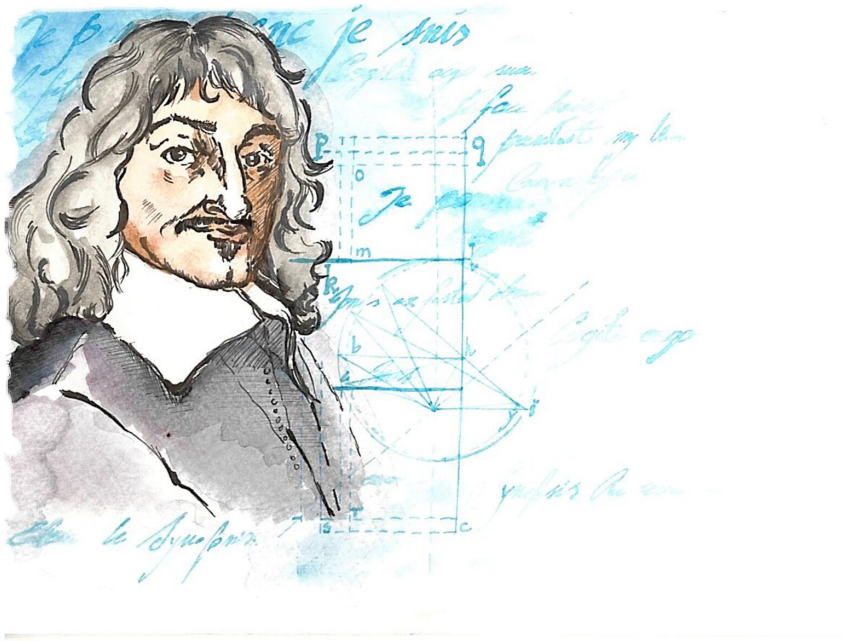
W matematyce najczęściej posługujemy się układem współrzędnych, który tworzą dwie wzajemnie prostopadłe osie liczbowe. Punkt $O$ przecięcia tych prostych, nazywany jest początkiem układu współrzędnych.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oś pozioma (pierwsza oś) nazywana jest osią odciętych lub osią $X$.
Oś pionowa (druga oś) nazywana jest osią rzędnych lub osią $Y$.

**Ciekawostka**

Prostokątny układ współrzędnych nazywany jest układem kartezjańskim od Kartezjusza (Rene Descartes'a), znakomitego siedemnastowiecznego francuskiego matematyka, przyrodnika i filozofa, którego uważa się za prekursora stosowania metod geometrycznych w zagadnieniach algebraicznych.
Powszechnie znana jest sentencja filozoficzna Kartezjusza „Myślę, więc jestem".

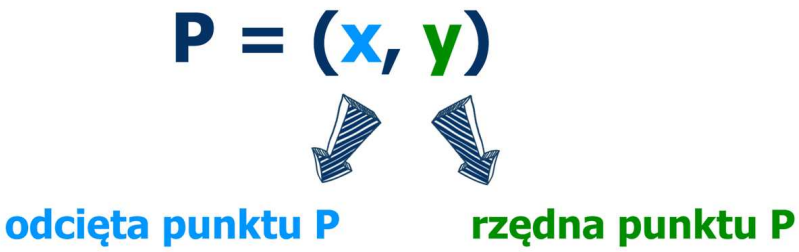


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Definicja: Współrzędne**

Każdemu punktowi $P$ zaznaczonemu w układzie współrzędnych odpowiada uporządkowana para liczb $(x,\ \mathrm{y})$ nazywanych jego współrzędnymi.
Zapisujemy

$$P = (x,\ \mathrm{y})$$

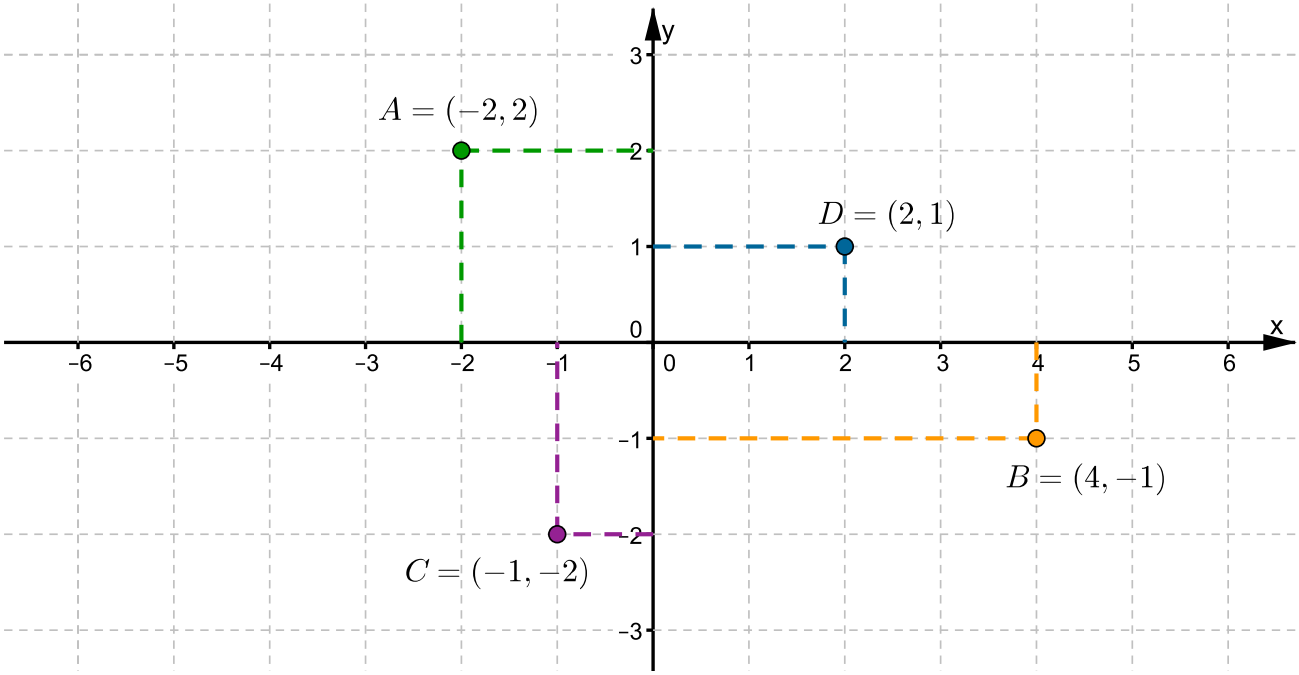



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pierwsza współrzędna określa położenie punktu względem osi $X$, a druga – względem osi $Y$.

- Aby wyznaczyć pierwszą współrzędną $(x)$ punktu $P$, można zaznaczyć prostą prostopadłą do osi $X$ przechodzącą przez punkt $P$. Liczba odpowiadająca punktowi, w którym ta prosta przecina oś $X$, jest pierwszą współrzędną punktu $P$ – odciętą punktu $P$.
- Aby wyznaczyć drugą współrzędną $(y)$ punktu $P$, można zaznaczyć prostą prostopadłą do osi $Y$ przechodzącą przez punkt $P$. Liczba odpowiadająca punktowi, w którym ta prosta przecina oś $Y$, jest drugą współrzędną punktu $P$ – rzędną punktu $P$.

**Przykład 3**




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

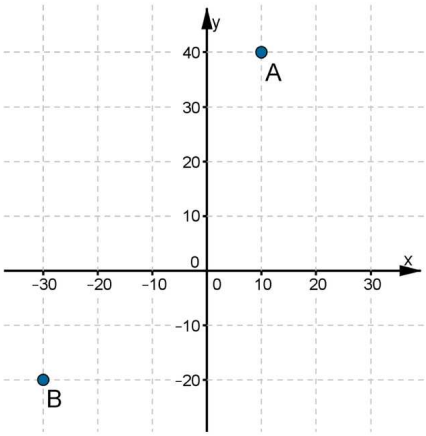
Współrzędne punktu $A$: pierwsza współrzędna to $-2$, a druga to $2$. Zapisujemy $A = (-2, 2)$.
Współrzędne punktu $B$: pierwsza współrzędna to $4$, a druga to $-1$. Zapisujemy $B = (4, -1)$.
Współrzędne punktu $C$: pierwsza współrzędna to $-1$, a druga to $-2$. Zapisujemy $C = (-1, -2)$.
Współrzędne punktu $D$: pierwsza współrzędna to $-4$, a druga to $0$. Zapisujemy $D = (2, 1)$.

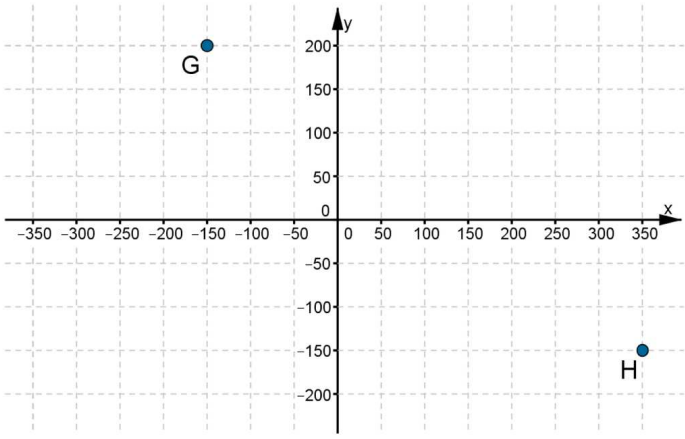
**Przykład 4**

Najczęściej na obu osiach układu współrzędnych obieramy jednakowe jednostki tak, aby można było zaznaczyć dane punkty.

$$A = (10, 40), B = (-30, -20)$$

$$G = (-150, 200), H = (350, -150)$$

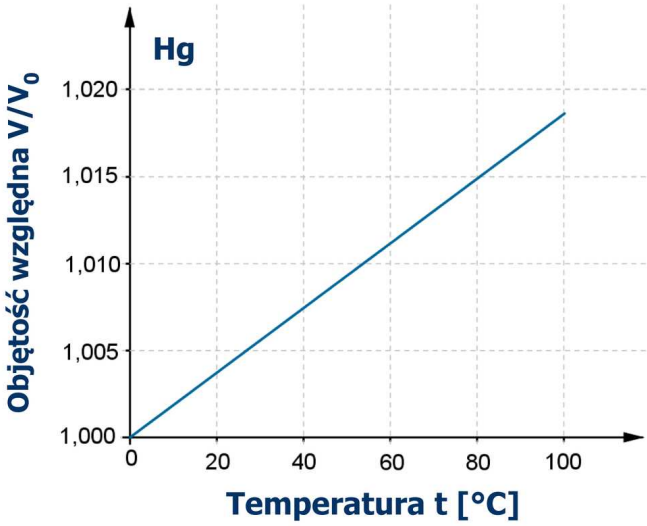



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 5**

W zastosowaniach praktycznych, gdy na osiach układu współrzędnych zaznaczane są różne wielkości, jednostki mogą mieć różne długości.

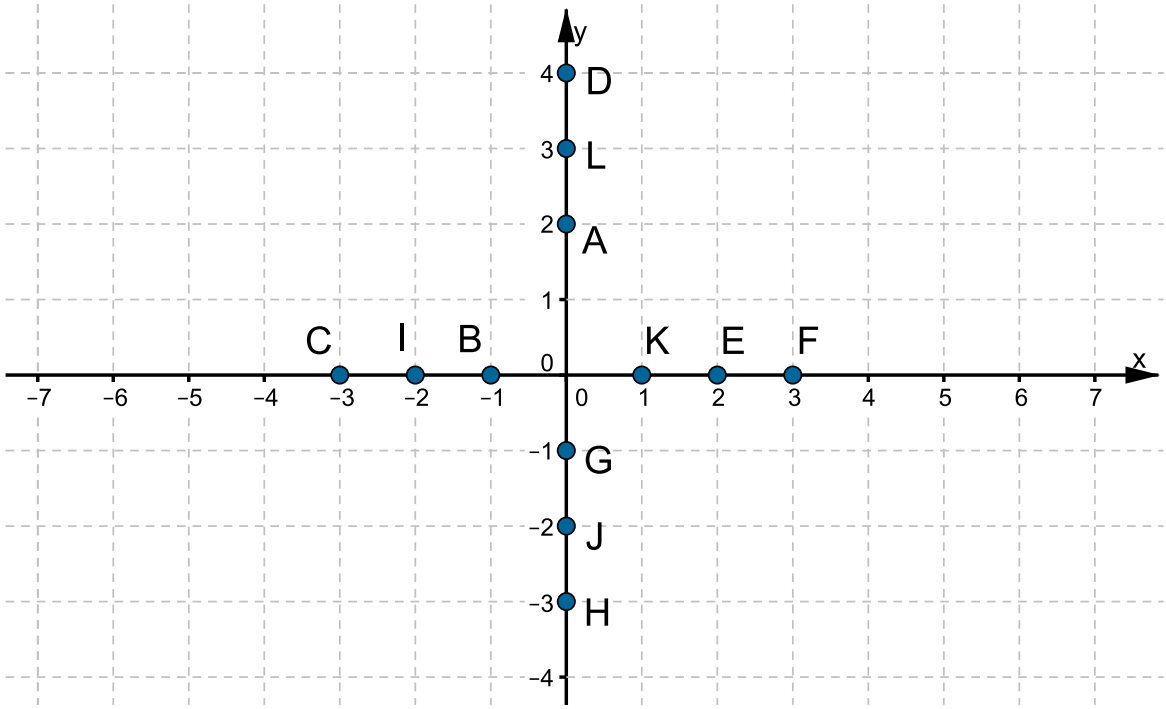



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wykres zmiany objętości rtęci w zależności od temperatury.

**Przykład 6**

W układzie współrzędnych zaznaczone są punkty leżące na osiach układu.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odczytajmy ich współrzędne.
Punkty leżące na osi $X$:
$C = (-3, 0), I = (-2, 0), B = (-1, 0), K = (1, 0), E = (2, 0), F = (3, 0)$
Punkty leżące na osi $Y$:
$D = (0, 4), L = (0, 3), A = (0, 2), G = (0, -1), J = (0, -2), H = (0, -3)$
Zauważmy, że

- punkty leżące na osi $X$ mają drugą współrzędną równą $0$
- punkty leżące na osi $Y$ mają pierwszą współrzędną równą $0$

Początek układu współrzędnych (punkt $O$) ma współrzędne $(0,0)$.

## Ćwiczenie 2

Podaj współrzędne punktu $P$.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsGqD5YZu

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ćwiczenie 3**

W układzie współrzędnych ustaw punkt $P$ tak, aby miał dane współrzędne.

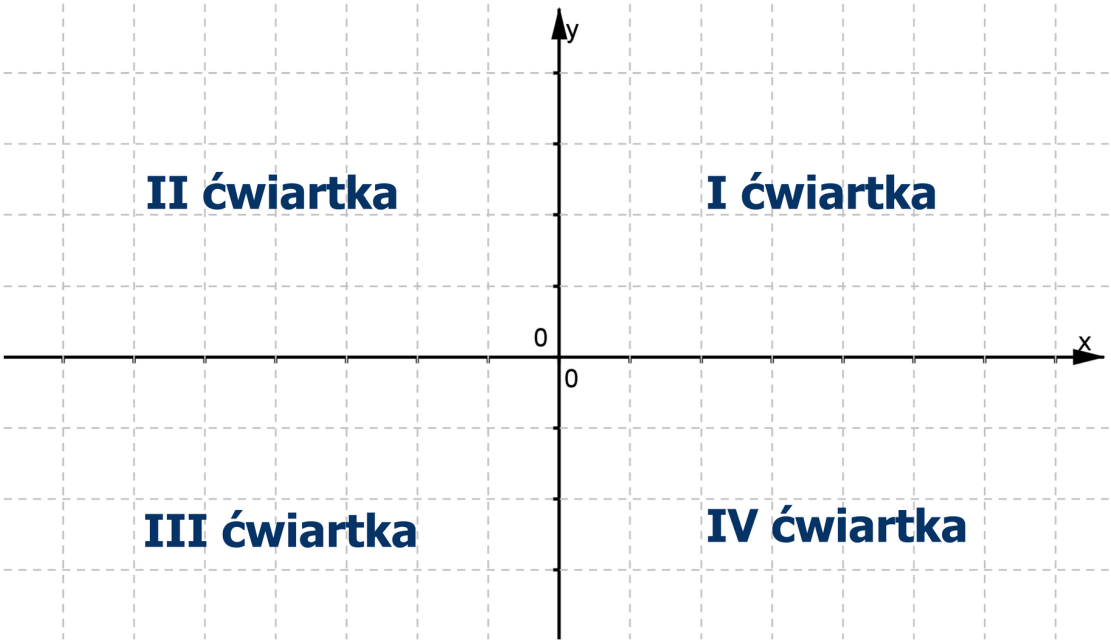



Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsGqD5YZu

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

# Ćwiartki układu współrzędnych

**Przykład 7**




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Osie układu współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery części nazywane ćwiartkami.
Ćwiartki numerujemy: I, II, III, IV przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.
Punktów leżących na osiach układu współrzędnych nie zaliczamy do żadnej ćwiartki.

**Przykład 8**

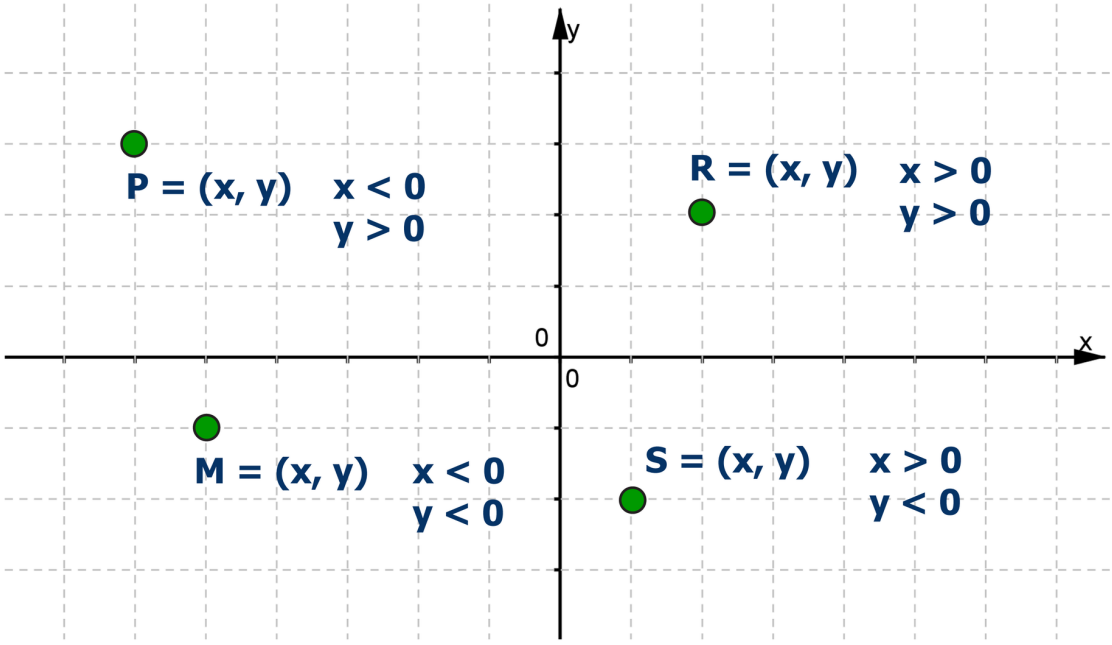
Zmieniaj położenie punktu zaznaczonego w układzie współrzędnych.
Zaobserwuj znaki pierwszej oraz drugiej współrzędnej punktu w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsGqD5YZu

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Jeżeli punkt należy do:

- *I* ćwiartki układu współrzędnych, to obie jego współrzędne są liczbami dodatnimi,
- II ćwiartki układu współrzędnych, to jego pierwsza współrzędna jest liczbą ujemną, a druga dodatnią,
- II *I* ćwiartki układu współrzędnych, to obie jego współrzędne są liczbami ujemnymi.
- IV ćwiartki układu współrzędnych, to jego pierwsza współrzędna jest liczbą dodatnią, a druga ujemną.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem [https://zpe.gov.pl/a/DsGqD5YZu](https://zpe.gov.pl/a/DsGqD5YZu)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 4

Narysuj układ współrzędnych, dobierz odpowiednio jednostkę i zaznacz punkty $A$ i $B$.

1. $A = (-200,\ 300), B = (100,\ 500)$
2. $A = (-150,\ -50), B = (250,\ -50)$
3. $A = (40,\ -60), B = (20,\ 100)$
4. $A = (-15,\ 45), B = (-30,\ -60)$
5. $A = (1000,\ -3000), B = (2000,\ 2000)$
6. $A = (-1500,\ -500), B = (-2500,\ 1500)$

## Ćwiczenie 5

Podaj współrzędne punktu $A$.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsGqD5YZu

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ćwiczenie 6**

Punkt $P$ znajduje się w układzie współrzędnych na osi odciętych, gdy

- [ ] $P = (6, 0)$
- [ ] $P = (0, -5)$
- [ ] $P = (6, 0)$
- [ ] $P = (1{,}2, 0)$
- [ ] $P = (0, 0)$
- [ ] $P = (0, -100)$
- [ ] $P = (-8, 0)$

**Ćwiczenie 7**

Jeżeli punkt $P = (a, \ -3)$ znajduje się na osi $Y$, to

- ○ $a = 0$
- ○ $a = 3$
- ○ $a = -2$
- ○ $a = -2$

**Ćwiczenie 8**

Znajdź liczbę $m$ wiedząc, że

1. punkt $P = (m - 3, -1)$ leży na osi $Y$.
2. punkt $\mathrm{G} \ = (4, \ 2m + 6)$ leży na osi $X$

## Ćwiczenie 9

Przeciągnij punkty do odpowiedniej ćwiartki układu współrzędnych.

I ćwiartka

II ćwiartka

III ćwiartka

IV ćwiartka

$G = (-91, -3)$

$E = (100, -765)$

$C = (-23, -33)$

$H = (312, 132)$

$I = (10, -1)$

$D = (-365, 2)$

$B = (-26, 187)$

$F = (-809, 9)$

$A = (12, 32)$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10

W której ćwiartce układu współrzędnych leży punkt $P = (5, \ -7)$?

- II
- IIII
- IV
- $I$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DsGqD5YZu

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ćwiczenie 11**

Jeżeli punkt $K = (-6, d)$ znajduje się w $\mathrm{II}$ ćwiartce układu współrzędnych, to liczba $d$ może być równa

- $-7$
- $0$
- $-6$
- $7$

**Ćwiczenie 12**

Punkt $A = (-2, \ -5)$ znajduje się w drugiej ćwiartce układu współrzędnych. Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ◯ Nie, ponieważ obie współrzędne są ujemne.
- ◯ Tak, ponieważ rzędna jest liczbą ujemną.
- ◯ Tak, ponieważ odcięta jest liczbą ujemną
- ◯ Tak, ponieważ obie współrzędne są ujemne.
- ◯ Nie, ponieważ odcięta jest liczbą ujemną

**Ćwiczenie 13**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ☐ Punkty $A = (0, \ -4)$ i $B = (0, \ 3)$ znajdują się na osi odciętych.
- ☐ Punkty $A = (-2, \ 3)$ i $B = (-2, \ -3)$ mają taką samą rzędną.

**Ćwiczenie 14**

Zaznacz w układzie współrzędnych cztery różne punkty $P,\ \mathrm{R},\ \mathrm{S},\ \mathrm{T}$, z których każdy znajduje się w innej ćwiartce układu współrzędnych. Odczytaj współrzędne tych punktów i uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

| Nazwa punktu | Pierwsza współrzędna punktu | Druga współrzędna punktu | Numer ćwiartki układu współrzędnych, w której znajduje się punkt |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**Ćwiczenie 15**

Zaznacz w układzie współrzędnych taki punkt $P$

1. którego obie współrzędne są równe
2. którego druga współrzędna jest o $6$ mniejsza od pierwszej
3. którego pierwsza współrzędna jest dwukrotnie większa od drugiej

**Ćwiczenie 16**

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A, B, C, D, E$. Co powiesz o ich wzajemnym położeniu?

1. $A = (2, -3), B = (2, -1), C = (2, 3), D = (2,0), E = (2, 2)$
2. $A = (4, -3), B = (-2, -3), C = (-4, -3), D = (0, -3), E = (1, -3)$
3. $A = (1,1), B = (-1, -1), C = (4,4), D = (-3, -3), E = (0,0)$

**Ćwiczenie 17**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Punkty skrajne Polski

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Najdalej na północ wysunięty kraniec Polski o współrzędnych $54^\circ 50'$ N – miejscowość Jastrzębia Góra w gminie Władysławowo, powiat pucki.
- Najdalej na południe wysunięty kraniec Polski $49^\circ 00'$ N – szczyt Opołonek w gminie Lutowiska, powiat bieszczadzki.
- Najdalej na zachód wysunięty kraniec Polski $14^\circ 07'$ E – kolano Odry koło Osinowa Dolnego w gminie Cedynia, powiat gryfiński.
- Najdalej na wschód wysunięty kraniec Polski $24^\circ 08'$ E – kolano Bugu we wsi Zosin w gminie Horodło, powiat hrubieszowski.

Środek geometryczny Polski znajduje się we wsi Piątek, 15 km na wschód od Łęczycy, 19 km na południe od Kutna, a 33 km na północ od Łodzi.

**Ćwiczenie 18**

1. Oblicz różnicę czasu słonecznego między skrajnymi punktami Polski wschodnim i zachodnim.
2. W Szczecinie jest godzina 12 w południe czasu słonecznego. Która godzina czasu słonecznego jest wtedy w Lublinie?
3. W Warszawie czas słoneczny określany jest według południka $15^\circ$. Jaka jest różnica czasu słonecznego między Warszawą a Rzeszowem?

**Ćwiczenie 19**

Określ współrzędne geograficzne środka Polski.

**Ćwiczenie 20**

Jednym z najbardziej tajemniczych miejsc na ziemi jest Trójkąt Bermudzki.
Określ współrzędne geograficzne wierzchołków tego trójkąta i dowiedz się, czym się charakteryzuje ten obszar.

# Punkty o współrzędnych wymiernych

**Ciekawostka**

- Odpowiednikiem układu współrzędnych na płaszczyźnie jest układ współrzędnych w przestrzeni. Za jego pomocą można opisać na przykład ruch samolotu.

**Ciekawostka**

- Układ ten składa się z trzech wzajemnie prostopadłych osi liczbowych $X$, $\mathrm{Y}$, $\mathrm{Z}$. Położenie punktu w przestrzeni określa trójka liczb $(x, \mathrm{y}, \mathrm{z})$.

# Zbiory punktów w układzie współrzędnych

W układzie współrzędnych można zaznaczać nie tylko poszczególne punkty, ale zbiory punktów, tworzące proste czy półpłaszczyzny.

**Przykład 1**

Zaznacz w układzie współrzędnych kilka punktów, których obie współrzędne są sobie równe.
W których ćwiartkach układu współrzędnych leżą te punkty? Jaką figurę otrzymasz, gdy połączysz te punkty?

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D17bv5P3c

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Przykład 2




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D17bv5P3c

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Przykład 3

Zaznacz w układzie współrzędnych kilka punktów, których druga współrzędna jest połową pierwszej współrzędnej. Połącz te punkty. Jaką figurę utworzyły? Jak opisać zależność między współrzędnymi tych punktów?




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D17bv5P3c

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Punkty, których druga współrzędna jest połową pierwszej współrzędnej, leżą na prostej. Są to wszystkie punkty $P = (x,\ y)$ takie, że $y = \frac{1}{2}x$ i $x$ jest dowolną liczbą rzeczywistą.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D17bv5P3c

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ćwiczenie 1**

Zaznacz w układzie współrzędnych kilka punktów, których druga współrzędna jest większa od pierwszej. W których ćwiartkach układu współrzędnych mogą się znaleźć takie punkty?
Jaką figurę tworzą?




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D17bv5P3c

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

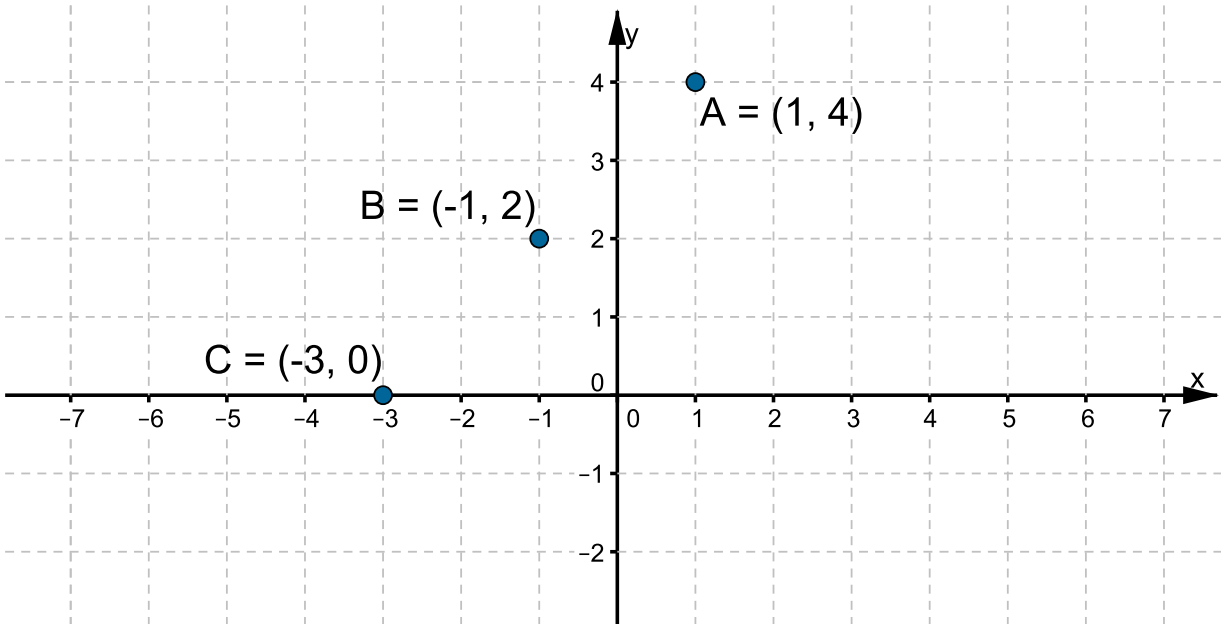
**Przykład 4**

Zaznaczymy w układzie współrzędnych trzy punkty o współrzędnych $(x,\ \mathrm{x}+3)$, gdzie $x$ jest dowolną liczbą rzeczywistą.
Zapis $(x,\ \mathrm{x}+3)$oznacza, że pierwsza współrzędna punktu jest dowolna, a druga jest o $3$ większa od pierwszej.

- Jeśli pierwsza współrzędna punktu $A$ będzie równa $1$, to druga jest równa $1+3=4$.

Zapisujemy: $x = 1,\ \mathrm{y} = \ 1 + 3 = 4$. Wtedy $A = (1, 4)$.

- Jeśli pierwsza współrzędna punktu $B$ będzie równa –1, to druga jest równa $-1 + 3 = 2$.
  Zapisujemy $x = -1,\ \mathrm{y} = \ -1 + 3 = 2$. Wtedy $B = (-1{,}2)$.
- Jeśli pierwsza współrzędna punktu $C$ będzie równa –3, to druga jest równa $-3 + 3 = 0$.
  Zapisujemy $x = -3,\ \mathrm{y} = \ -3 + 3 = 0$. Wtedy $C = (-3{,}0)$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 2

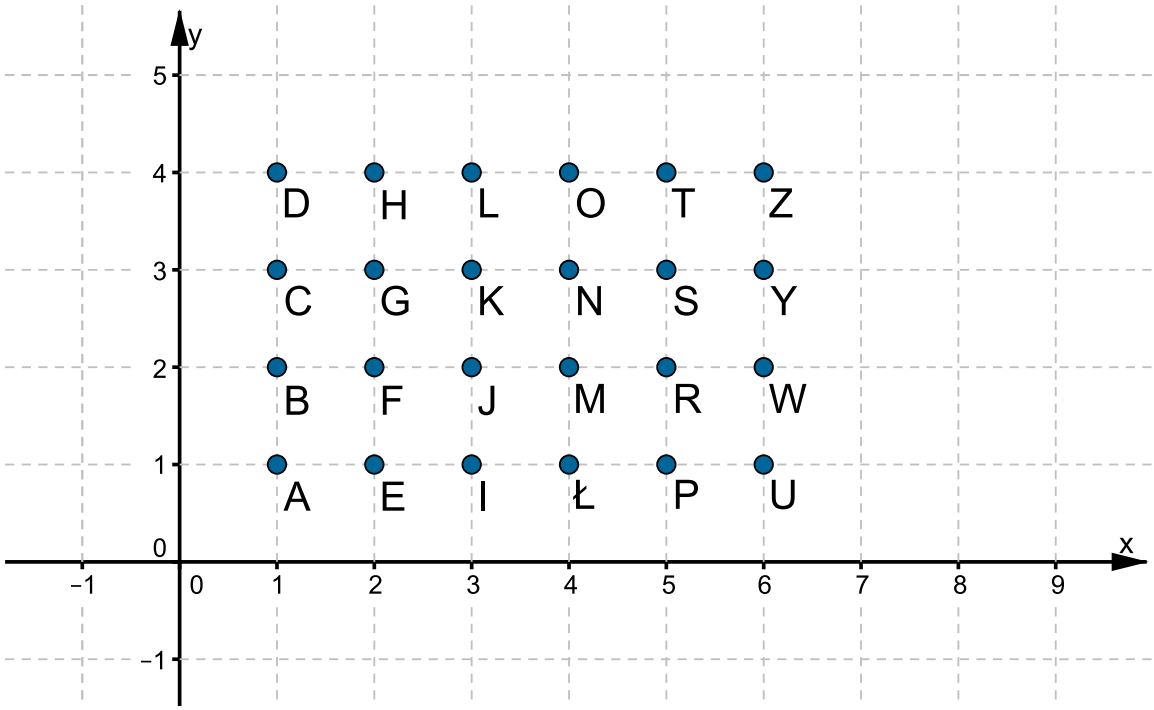
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 3

Odszyfruj sentencję, którą przypisuje się francuskiemu filozofowi Kartezjuszowi.

$(1,3),\ (4,4),\ (2,3),\ (3,1),\ (5,4),\ (4,4),(2,1),\ (5,2),\ (2,3),\ (4,4),(5,3),\ (6,1)$

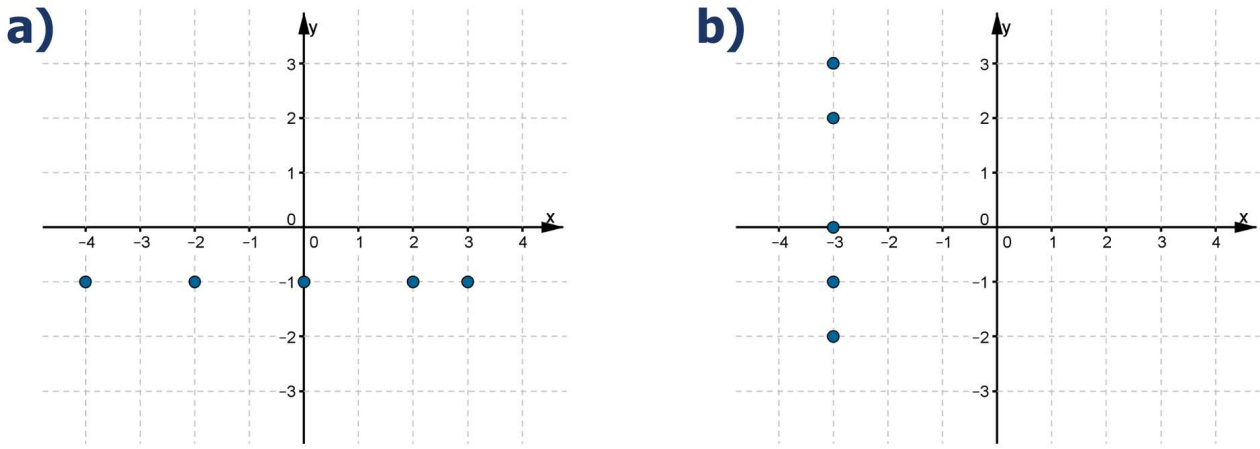
.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 4

Zapisz za pomocą wzoru zależność między współrzędnymi punktów zaznaczonych w układzie współrzędnych.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

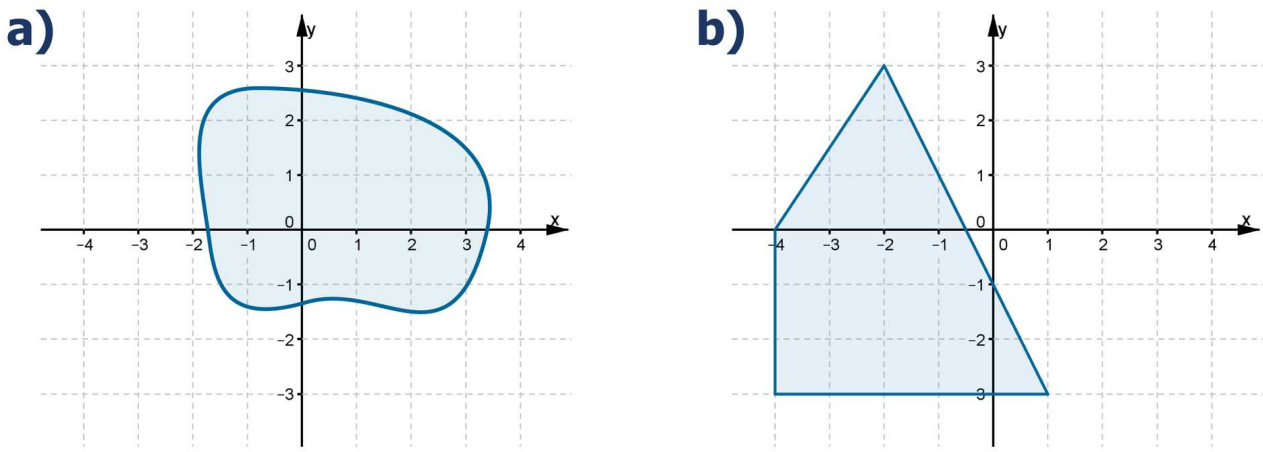
**Ćwiczenie 5**

Które z poniższych punktów mają rzędną będącą połową odciętej?

- [ ] C $(-2, 4)$
- [ ] A $(4, 8)$
- [ ] D $(-3, -6)$
- [ ] B $(8, 4)$

**Ćwiczenie 6**

Ile punktów, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi, należy do wyróżnionego obszaru?




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 7**

Umieść podane punkty w odpowiednich miejscach układu współrzędnych. W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się największa liczba punktów, a w której najmniejsza?

Podane jest $10$ punktów:

$$A = (2,\ 3), B = (3,\ 2), C = (0,\ -4),$$

$$D = (-4,\ 0), E = (-2,\ 4), F = (2,\ -4), G = (4,\ -2),$$

$$H = (-4,\ 2), I = (-5,\ -5), J = (5,\ 5).$$

**Ćwiczenie 8**

Narysuj układ współrzędnych, dobierając odpowiednią jednostkę, i zaznacz w nim punkty:

$A = (20,\ 70)$
$B = (-30,\ 20)$
$C = (-40,\ 0)$
$D = (0,\ -20)$
$E = (-60,\ -70)$
$F = (50,\ -50)$

Wypisz punkty

1. leżące na osi rzędnych
2. leżące na osi odciętych
3. których współrzędne są liczbami przeciwnymi
4. należące do $I,\ \mathrm{II},\ \mathrm{III}$ i $\mathrm{IV}$ ćwiartki układu współrzędnych

**Ćwiczenie 9**

Zaznacz w układzie współrzędnych taki punkt, którego suma współrzędnych jest równa $0$. Zaznacz jeszcze $7$ takich punktów. Jaka jest zależność między pierwszą a drugą współrzędną każdego z punktów?

**Ćwiczenie 10**

Punkt $P$ ma obie współrzędne różne od $0$. Jeśli suma współrzędnych punktu $P$ jest równa $0$, to punkt leży

- ◯ w $\mathrm{II}$ lub w $\mathrm{III}$ ćwiartce układu współrzędnych
- ◯ w $\mathrm{II}$ lub w $\mathrm{IV}$ ćwiartce układu współrzędnych
- ◯ w $I$ lub w $\mathrm{IV}$ ćwiartce układu współrzędnych
- ◯ w $I$ lub w $\mathrm{II}$ ćwiartce układu współrzędnych

**Ćwiczenie 11**

Punkt $\mathrm{M} = (x,\ \mathrm{y})$ leży na osi $X$ i nie leży na osi $Y$. Wynika z tego, że

- ◯ $x \neq 0,\ y \neq 0$
- ◯ $x = 0,\ y \neq 0$
- ◯ $x \neq 0,\ y = 0$
- ◯ $x = 0,\ y = 0$

**Ćwiczenie 12**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- ◯ Punkt $F = (0, 5)$ leży na osi $X$.
- ◯ Punkt $P = (-1, 2)$ leży w $\mathrm{III}$ ćwiartce układu współrzędnych.
- ◯ Współrzędne punktu $M = (-5, 6)$ są liczbami przeciwnymi.
- ◯ Pierwsza współrzędna punktu $U = (9,\ 01;\ -11)$ jest liczbą dodatnią.

**Ćwiczenie 13**

Narysuj układ współrzędnych i zaznacz w nim poniższe punkty.

$A=(2,\ 3),\ \mathrm{B}=(5,\ 0),\ \mathrm{C}=(0,\ -3),\ \mathrm{D}=(6,\ 1)$

$E=(-4,\ 4),\ \mathrm{F}=(-3,\ 0),\ \mathrm{G}=(-1,\ -2),\ \mathrm{H}=(-3,\ -7)$

$\mathrm{I}=(5,\ -2),\ \mathrm{J}=(4,\ -4),\ \mathrm{K}=(2,\ -6),\ \mathrm{L}=(0,\ 0).$

Wypisz punkty, których suma współrzędnych jest liczbą

1. nieujemną
2. niedodatnią

**Ćwiczenie 14**

Zaznacz w układzie współrzędnych punkt $A=(x,\ \mathrm{y})$ taki, że

1. $x=3,\ \mathrm{y}=\ \mathrm{x}-2$
2. $x=-2, y=x-1$
3. $x=1, y=2x$
4. $x=y, y=-3$

**Ćwiczenie 15**

Zaznacz w układzie współrzędnych $5$ punktów spełniających podany warunek. Na jakiej prostej leżą wszystkie te punkty?

1. Pierwsza współrzędna jest dwukrotnie mniejsza od drugiej.
2. Druga współrzędna jest równa $4$.
3. Pierwsza współrzędna jest równa $-3$.

**Ćwiczenie 16**

Punkt $\mathrm{P} = (-5, 6)$ przesunięto najpierw o $9$ jednostek w lewo, wzdłuż osi $X$, a następnie tak otrzymany punkt przesunięto w górę o $7$ jednostek, wzdłuż osi $Y$. Określ współrzędne otrzymanego punktu.

**Ćwiczenie 17**

Określ współrzędne środka $S$ odcinka $\mathrm{AB}$, gdy

1. $A = (-6, -4), B = (4, 6)$
2. $A = (0, 5), B = (4, -3)$

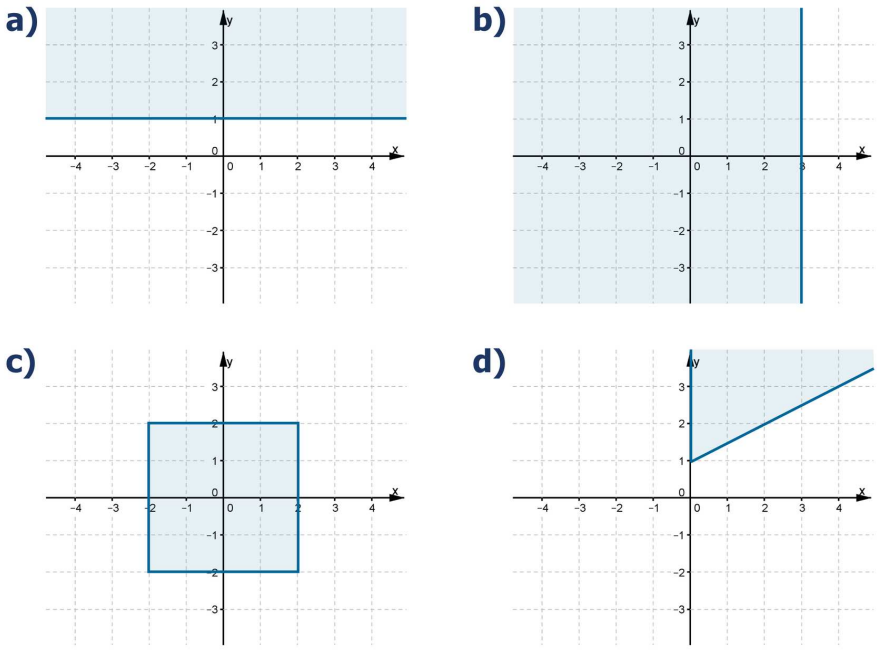
**Ćwiczenie 18**

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów $(x, y)$, których współrzędne spełniają podany warunek.

1. $-2 \leq x \leq 3$ i $0 \leq y \leq 4$
2. $0{,}5 \leq x \leq -3{,}5$ i $-1{,}5 \leq y \leq 5{,}5$

## Ćwiczenie 19

Zapisz warunek, jaki muszą spełniać współrzędne punktów należących do zaznaczonego obszaru.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 20

Wyznacz współrzędne $3$ punktów znajdujących się na odcinku $\mathrm{AB}$, gdzie $A = (-4, 4), B = (3, -3)$.

## Ćwiczenie 21

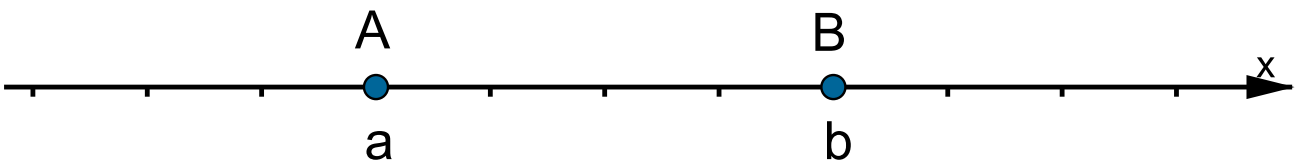
W którym z punktów $A = \left(0{,}5; \frac{-1}{2}\right), B = \left(0, \frac{11}{9}\right)$ czy $C = \left(\frac{3}{4}, -1\right)$ różnica między współrzędnymi jest największa?

# Wielokąty w układzie współrzędnych

## Odległość punktów na osi liczbowej

**Przykład 1**

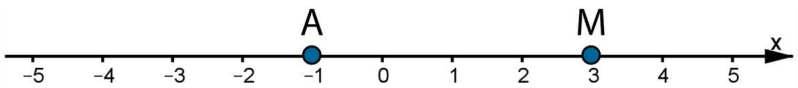
Odległością punktów $A = (a)$ i $B = (b)$, zaznaczonych na osi liczbowej, jest długość odcinka AB.
Długość ta jest równa wartości bezwzględnej różnicy współrzędnych punktów $A$ i $B$.



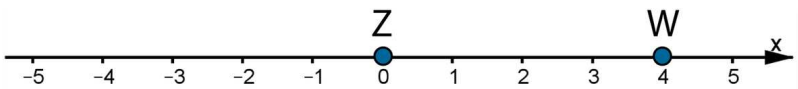

**|AB| = |b - a|**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

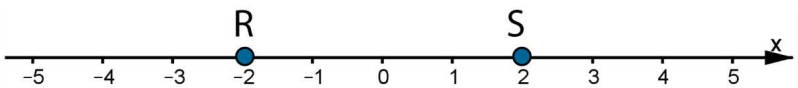
**Przykład 2**




|AM| = |3 - (-1)| = 4




|WZ| = |0 - 4| = 4




|SR| = |-2 - 2| = 4

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ważne!**

Własności odległości punktów
Jeśli $A,\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$ są dowolnymi punktami na płaszczyźnie, to

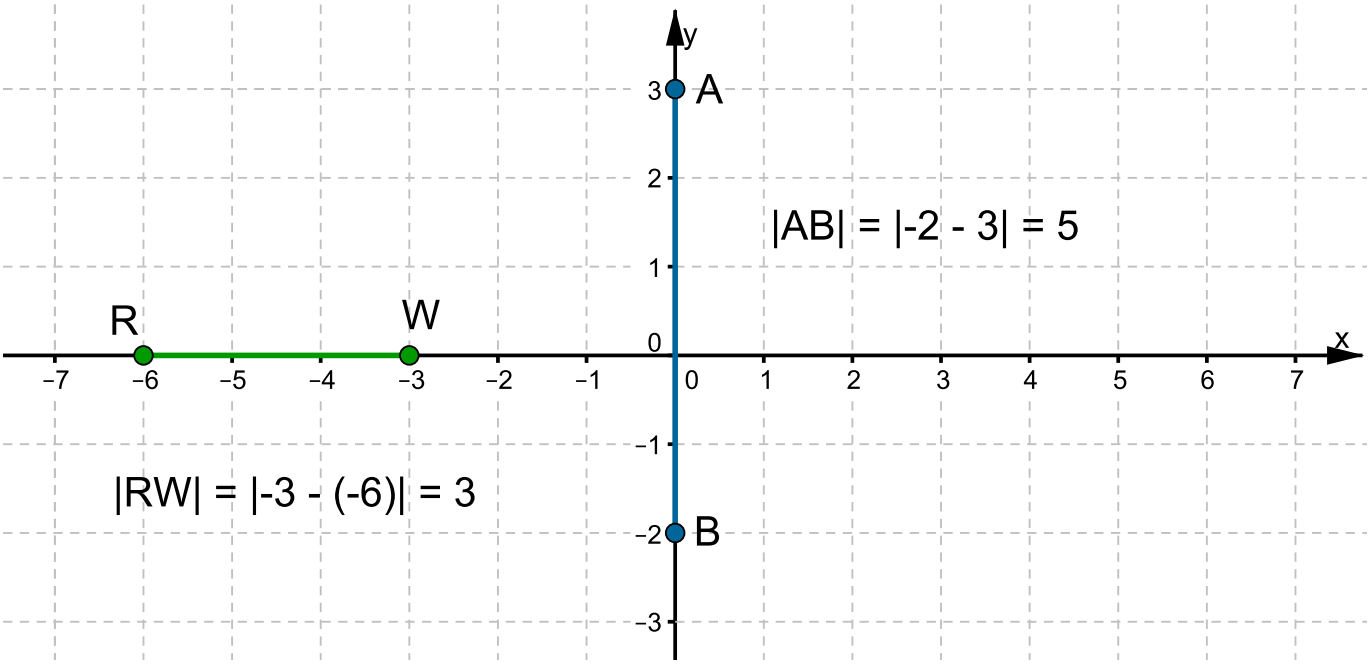
- $|\mathrm{AB}| \geq 0$ oraz $|\mathrm{AB}| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$

- $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{BA}|$
- $|\mathrm{AC}| \leq |\mathrm{AB}| + |\mathrm{BC}|$

Ostatnia nierówność nazywa się warunkiem budowy trójkąta.

## Odcinek w układzie współrzędnych

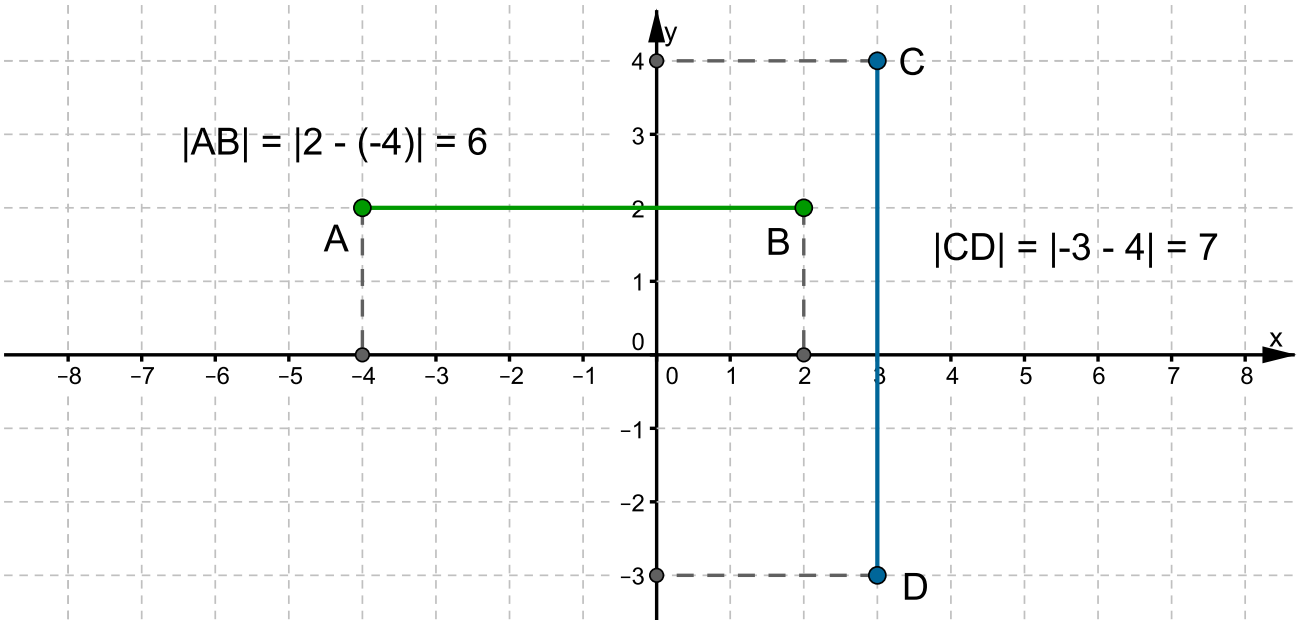
W przypadku, gdy odcinek AB leży w układzie współrzędnych na jednej z osi liczbowych, jego długość jest równa odległości punktów $A$ i $B$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 3**

Znajdziemy długości odcinków AB i CD, gdy
$\mathrm{A} = (-4{,}2), B = (2,\ 2), C = (3,\ 4), D = (3, -3)$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odcinek AB jest równoległy do osi $X$. Jego długość jest równa wartości bezwzględnej różnicy pierwszych współrzędnych punktów $A$ i $B$.

$$|\mathrm{AB}| = |2-(-4)| = 6$$

Odcinek CD jest równoległy do osi $Y$. Jego długość jest równa wartości bezwzględnej różnicy drugich współrzędnych punktów $C$ i $D$.

$$|\mathrm{CD}| = |-3-4| = 7$$

**Ciekawostka**

W praktyce, chcąc przejść z jednego miejsca do drugiego, rzadko poruszamy się po trasie, jaką wyznaczylibyśmy na planie jako najkrótszą. Na drodze bowiem znajdują się różne przeszkody, np. domy, jeziora, itp. Schemat ulic w miastach często przypomina kratownicę. Najkrótsza odległość w mieście będzie więc nieco inna niż ta, teoretyczna, wykorzystywana na lekcjach geometrii.
W tym przypadku do obliczenia odległości posługujemy się tzw. metryką miejską. W tej metryce najkrótsza droga między dwoma punktami to najkrótsza z możliwych do pokonania dróg między tymi punktami.

# Wielokąty w układzie współrzędnych

W niektórych wypadkach, aby obliczyć długości boków wielokąta, wygodnie jest umieścić go w układzie współrzędnych. Dla uproszczenia obliczeń staramy się, aby wierzchołki wielokąta miały współrzędne całkowite (jeśli jest to możliwe).

Przypomnijmy wzory na pola i obwody wielokątów.

### Ćwiczenie 1




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 2




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 3




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 4




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 5




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 6




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 7




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 8

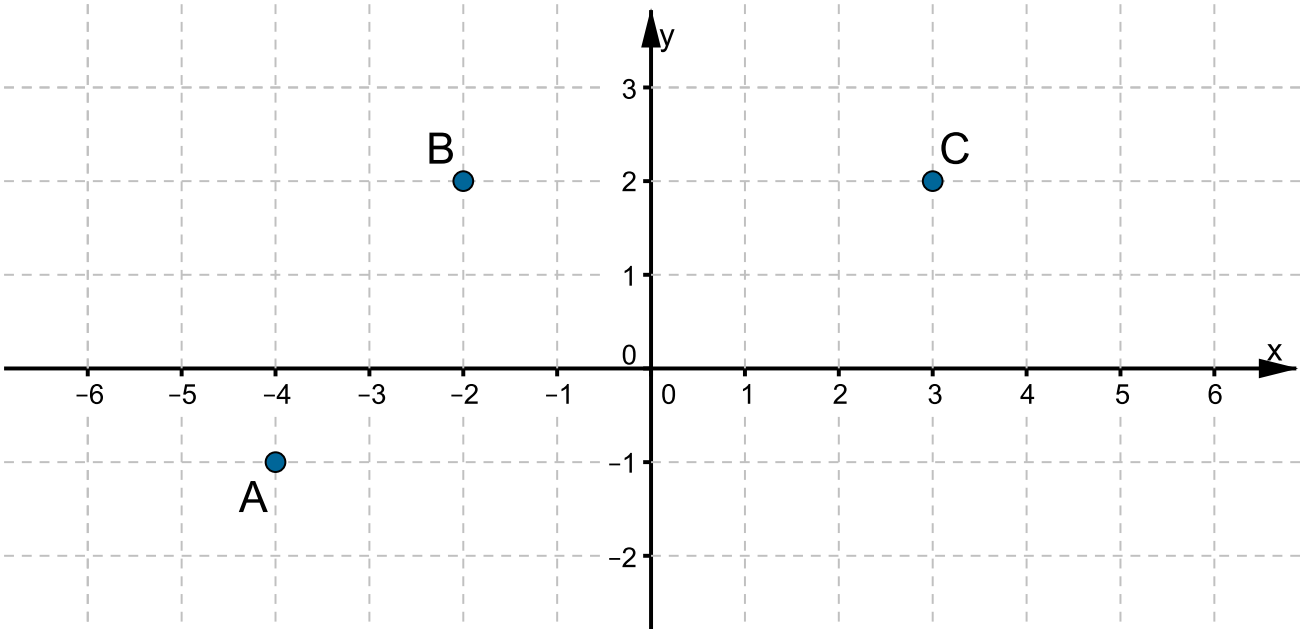



Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Przykład 4

W układzie współrzędnych dane są punkty:
$A = (-4, -1)$, $\mathrm{B} = (-2,2)$, $\mathrm{C} = (3,2)$. Znajdziemy taki punkt $D$, aby wielokąt ABCD był równoległobokiem.

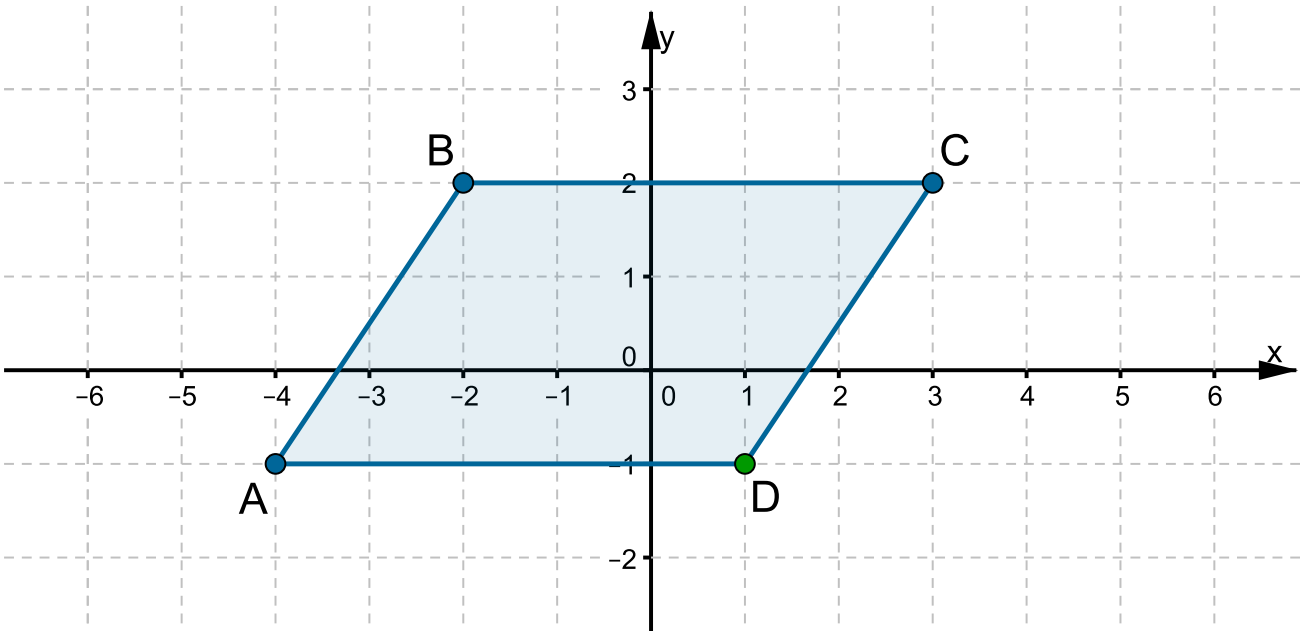


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy: $D = (a, b)$.
Zauważmy, że $|\mathrm{BC}| = |3 - (-2)| = 5$. W równoległoboku długości boków przeciwległych są równe, a boki równoległe. Odcinek AD leży na prostej równoległej do prostej BC, a więc i do osi $X$. Zatem $|\mathrm{AD}| = 5$.
Korzystając z tego, znajdziemy pierwszą współrzędną punktu $D$.

$$|a - (-4)| = 5|a + 4| = 5$$

Z rysunku widać, że liczba $a$ jest dodatnia, zatem większa od $-4$. Ponieważ $|a + 4| = 5$, więc $a + 4 = 5$ lub $a + 4 = -5$. Stąd
$a = 1$ lub $a = -9$.
Ponieważ $a > -4$, więc $a = 1$.
Liczba $b$ jest równa drugiej współrzędnej punktu $A$ (bo odcinek AD jest równoległy do osi $X$), więc $b = \quad -1$.
Odpowiedź: Szukanym punktem jest punkt $D = (1, -1)$.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 5**

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

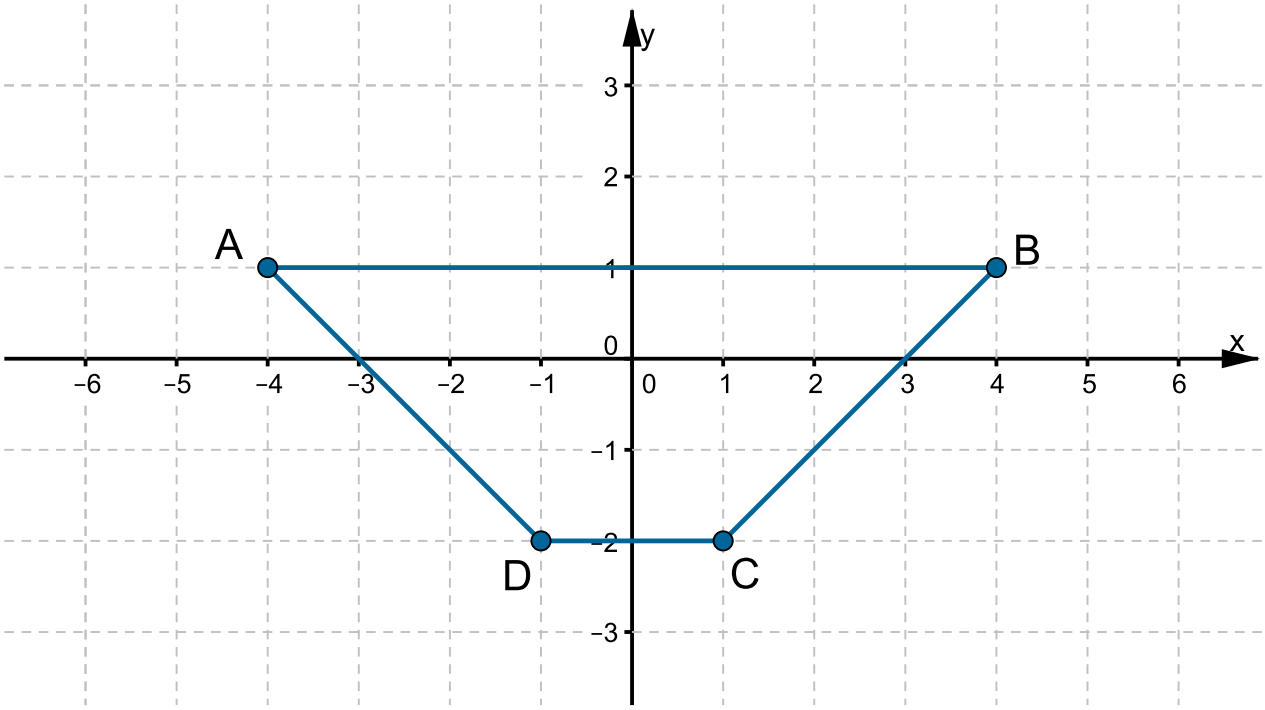
## Ćwiczenie 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jeśli na obu osiach układu współrzędnych jest ta sama jednostka, to za jednostkę pola przyjmujemy kwadrat o boku, którego długość jest równa jednostce każdej osi.

**Przykład 6**

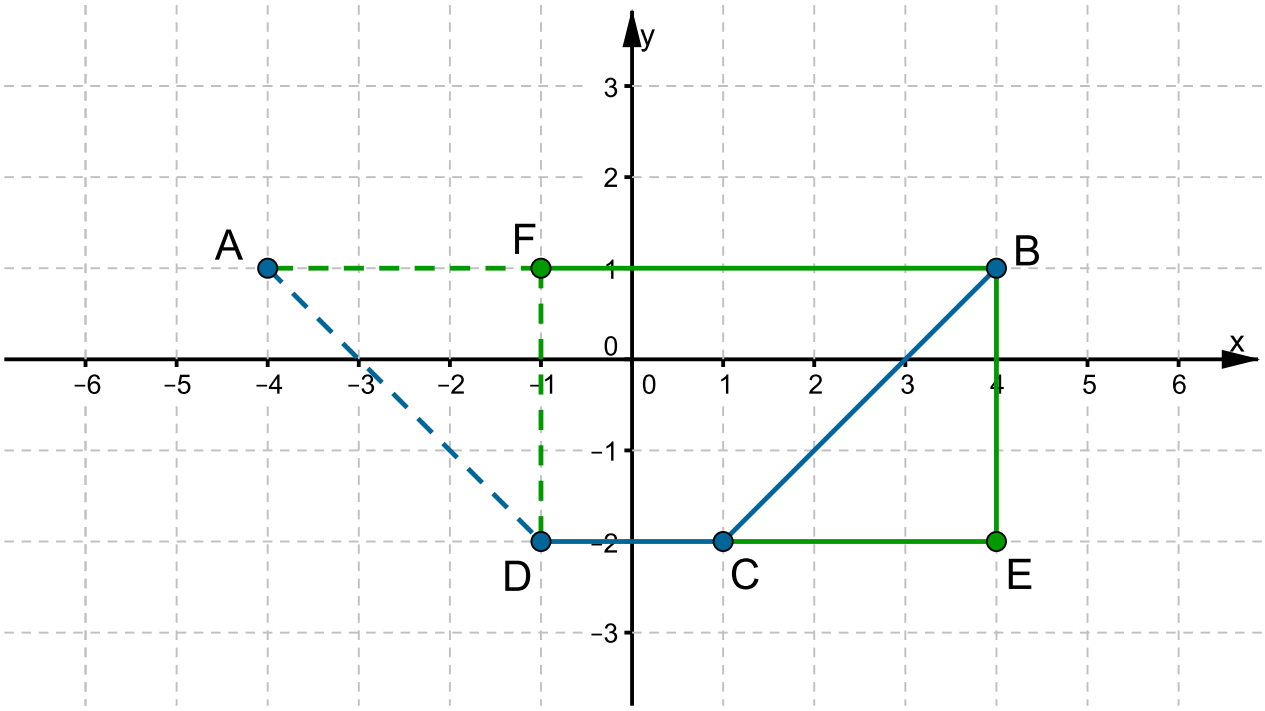
Obliczymy pole trapezu ABCD, gdzie
$A = (-4,1),\ \mathrm{B} = (4,1),\ \mathrm{C} = (1,-2), D = (-1,-2).$




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- sposób $I$

Zauważmy, że trapez jest równoramienny, więc jego pole jest równe polu prostokąta BEDF, długości 5 i szerokości 3. Zatem pole tego prostokąta, a więc i pole trapezu jest równe 15.

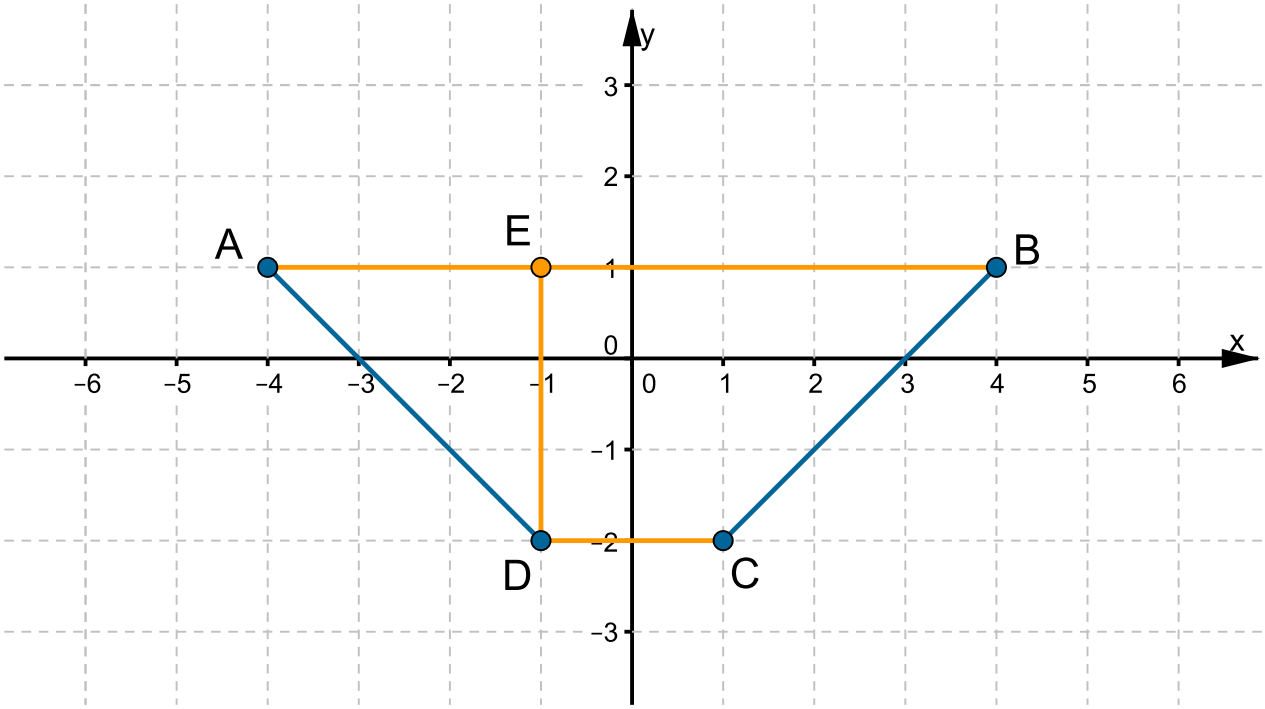



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- sposób II

Obliczamy długości a, b podstaw oraz wysokość h trapezu i korzystamy ze wzoru

$$P = \frac{1}{2}\left(a + b\right) \bullet h$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$a = |\mathrm{AB}| = |4-(-4)| = 8 b = |\mathrm{CD}| = |1-(-1)| = 2 h = |\mathrm{DE}| = |1-(-2)| =$

$$P = \frac{1}{2}(8+2) \bullet 3 = 15$$

Odpowiedź: pole trapezu jest równe 15.

**Ćwiczenie 10**

Narysuj układ współrzędnych i zaznacz w nim punkty:
$A = (3,8),\ \mathrm{B} = (-4,8),\ \mathrm{C} = (-4,2)$. Połącz kolejno te punkty. Figura, którą otrzymasz to

- trójkąt równoramienny
- trójkąt ostrokątny
- trójkąt prostokątny
- trójkąt rozwartokątny

**Ćwiczenie 11**

Punkty $A,\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D}$ są kolejnymi wierzchołkami kwadratu:
$A = (-3,\ 0),\ \mathrm{B} = (2,0),\ \mathrm{C} = (-3,\ 5)$. Wierzchołek $D$ ma współrzędne

- $(-3,\ 10)$
- $(-2,\ 5)$
- $(5,\ 2)$
- $(2,\ 5)$

**Ćwiczenie 12**

Zaznacz w układzie współrzędnych podane punkty:
$A = (-2,\ 1),\ \mathrm{B} = (5,\ 3),\ \mathrm{C} = (2,\ 5)$ oraz taki punkt $D$, aby otrzymany czworokąt był:

1. równoległobokiem, który nie jest prostokątem
2. trapezem równoramiennym, który nie jest równoległobokiem
3. deltoidem
4. prostokątem, który nie jest kwadratem
5. kwadratem
6. rombem, który nie jest kwadratem

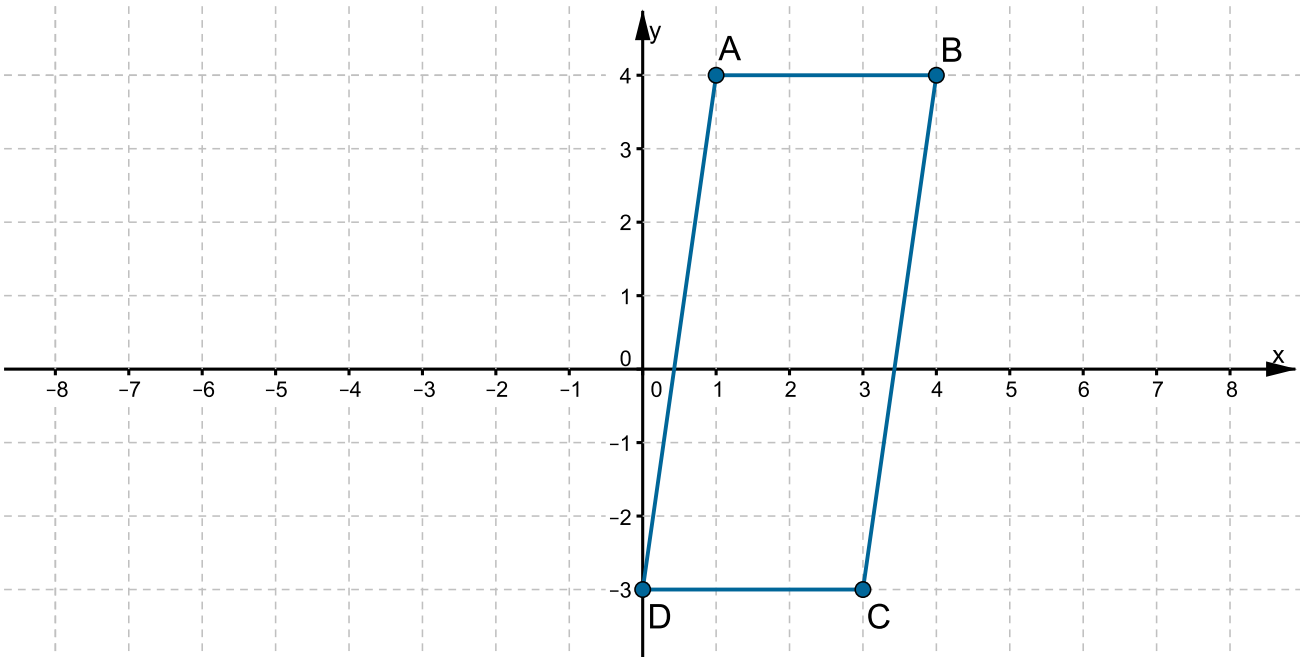
Uzasadnij swój wybór. Czy w każdym przypadku udało ci się znaleźć rozwiązanie?

**Ćwiczenie 13**

Dane są punkty: $K = (1{,}3),\ \mathrm{L} = (2{,}1),\ \mathrm{M} = (3{,}0),\ \mathrm{N} = (0, -4),\ \mathrm{P} = (3, -4)$.
Które z tych punktów leżą wewnątrz trapezu $\mathrm{ABCD}$ o wierzchołkach:
$A = (0, -6),\ \mathrm{B} = (4{,}1),\ \mathrm{C} = (4{,}5),\ \mathrm{D} = (0{,}3\ )$?

**Ćwiczenie 14**

W układzie współrzędnych umieszczono równoległobok, tak jak na rysunku.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Pierwsze współrzędne wierzchołków $C$ i $D$ są równe.
- [ ] Punkt o współrzędnych $(2,\ 4)$ należy do równoległoboku $\mathrm{ABCD}$.
- [ ] Punkt o współrzędnych $(0, -3)$ jest wierzchołkiem równoległoboku $\mathrm{ABCD}$.

**Ćwiczenie 15**

Narysuj w układzie współrzędnych prostokąt, którego przekątne przecinają się w punkcie $P = (4{,}5)$ i jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(-2{,}3)$. Odczytaj współrzędne pozostałych wierzchołków tego prostokąta.

## Ćwiczenie 16




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 17




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 18




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 19




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 20




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 21




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 22




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDYIF6pwG

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 23

Pole trójkąta $\mathrm{ABC}$ jest równe $24$. Podstawą trójkąta jest odcinek $\mathrm{AB}$, gdzie $A = (-3, -2)$ i $\mathrm{B} = (1, -2)$. Znajdź współrzędne punktu $C$, wiedząc, że trójkąt $\mathrm{ABC}$ jest

1. równoramienny
2. prostokątny
3. różnoboczny

Czy w każdym przypadku istnieje tylko jedno rozwiązanie?

## Ćwiczenie 24

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty:
$O = (0,0),\ \mathrm{A} = (3,0),\ \mathrm{B} = (5,4),\ \mathrm{C} = (0,4),\ \mathrm{D} = (-2,0)$. Oblicz pole

1. czworokąta $\mathrm{OABC}$
2. czworokąta $\mathrm{ABCD}$

**Ćwiczenie 25**

Pole trójkąta $\mathrm{ABC}$, gdzie $A=(-6{,}0),\ \mathrm{B}=(0,-4),\ \mathrm{C}=(2{,}0)$, jest równe

- $16$
- $12$
- $8$
- $32$

**Ćwiczenie 26**

Ania narysowała w układzie współrzędnych prostokąt $\mathrm{ABCD}$ o wierzchołach:
$A=(4{,}2),\ \mathrm{B}=(4,-3)$,
$C=(-2,-3),\ \mathrm{D}=(-2{,}2)$. Natomiast Basia narysowała prostokąt $\mathrm{KLMN}$, zamieniając miejscami współrzędne w każdym z punktów: $A,\ \mathrm{B}\ ,C,\ \mathrm{D}$. Oblicz pole prostokąta $\mathrm{ABCD}$ i prostokąta $\mathrm{KLMN}$. Co zauważasz?

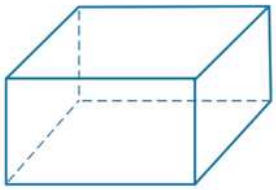
**Ćwiczenie 27**

Punkty $A=(a,a+4)$ i $B=(a-3,a-2)$, gdzie a jest liczbą naturalną, są wierzchołkami kwadratu $\mathrm{ABCD}$. Znajdź współrzędne wierzchołków $C$ i $D$. Oblicz pole i obwód kwadratu.

# Prostopadłościan

## Prostopadłościan – budowa

**Przykład 1**



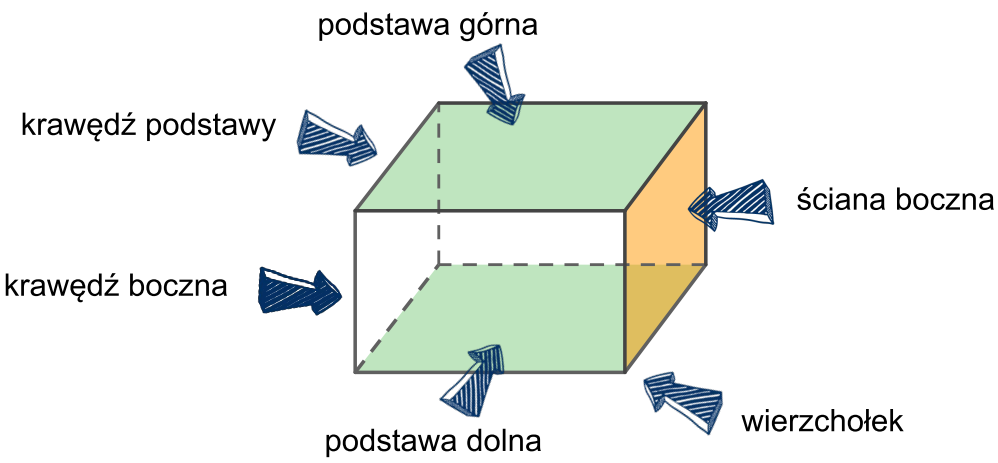
Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Ważne!**

Podstawami prostopadłościanu są przystające prostokąty leżące w płaszczyznach równoległych. Każda ściana boczna jest prostokątem prostopadłym do podstaw. Prostopadłościan ma 8 wierzchołków i 12 krawędzi. Długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka nazywamy wymiarami prostopadłościanu. Są to odpowiednio: długość, szerokość i wysokość prostopadłościanu.

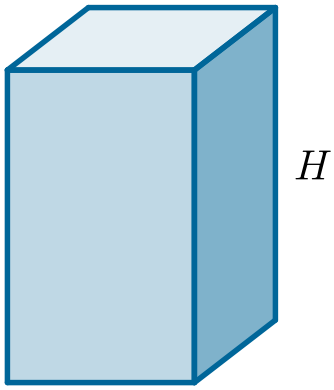



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 2**

Suma długości krawędzi prostopadłościanu jest równa 100 cm. Oblicz wysokość $H$ prostopadłościanu, wiedząc, że jego podstawą jest kwadrat o boku długości 3 cm.
Obliczamy sumę długości krawędzi podstaw.

$$2 \bullet 4 \bullet 3 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$$




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczamy sumę długości krawędzi bocznych.

$$100 \text{ cm} - 24 \text{ cm} = 76 \text{ cm}$$

Obliczamy długość krawędzi bocznej, czyli wysokość prostopadłościanu.

$$4 \bullet H = 76$$

$$H = 76 : 4$$

$$H = 16 \text{ cm}$$

Wysokość prostopadłościanu jest równa $16$ cm.
Oświetlając prostopadłościan, zobaczymy na ekranie jego rzut, będący figurą płaską.

**Przykład 3**

Weź do ręki pudełko zapałek i obracając je w różne strony, spróbuj określić, jakie figury mogą być jego rzutami.
Czy rzutem prostopadłościanu może być trójkąt, prostokąt, pięciokąt, siedmiokąt?

**Ciekawostka**

Gaspard Monge $(1746 - 1818)$ był francuskim matematykiem, uważanym za ojca geometrii wykreślnej. Był wykładowcą w wojskowej szkole, gdzie nauczał konstruowania twierdz i umocnień militarnych.

**Przykład 4**

Przypomnij sobie jeden ze sposobów rysowania prostopadłościanu o danej wysokości.
Pamiętaj, że podstawą prostopadłościanu jest prostokąt, który na płaszczyźnie przedstawiamy jako równoległobok.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DL1BgrU0r

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

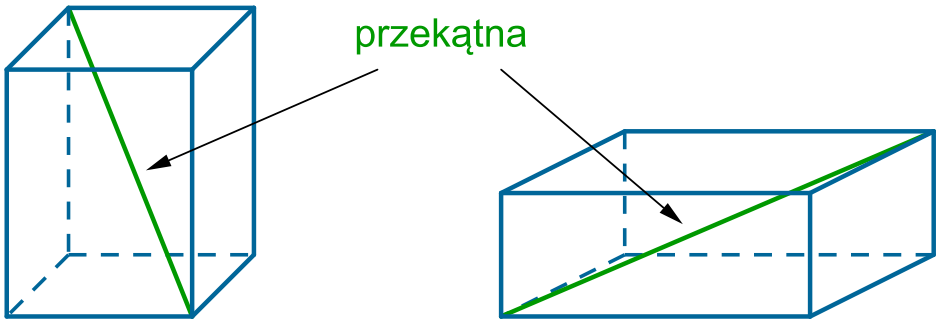
**Przykład 5**

Narysuj prostopadłościan, zaczynając rysunek od narysowania jego dwóch ścian bocznych.

# Przekątna prostopadłościanu

**Definicja: Przekątna prostopadłościanu**

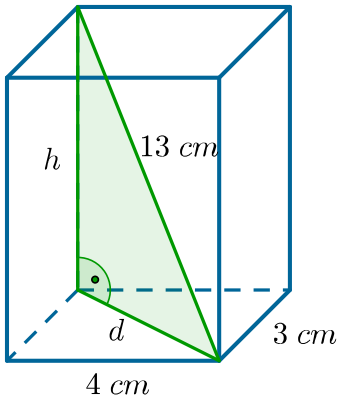
Przekątną prostopadłościanu nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki prostopadłościanu leżące na różnych podstawach i różnych ścianach bocznych.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 6**

Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o długości 4 cm, szerokości 3 cm. Przekątna bryły ma długość 13 cm. Oblicz wysokość prostopadłościanu.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczamy najpierw długość d $(d > 0)$ przekątnej podstawy prostopadłościanu – korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$4^2 + 3^2 = d^2$$

$$16 + 9 = d^2$$

$$d^2 = 25$$

$$d = 5$$

Zauważmy teraz, że trójkąt utworzony przez przekątną prostopadłościanu, przekątną podstawy i krawędź boczną h (wysokość) jest prostokątny.

Skorzystamy ponownie z twierdzenia Pitagorasa i obliczymy wysokość prostopadłościanu.

$$h^2 + d^2 = 13^2$$

$$h^2 + 5^2 = 13^2$$

$$h^2 + 25 = 169$$

$$h^2 = 144$$

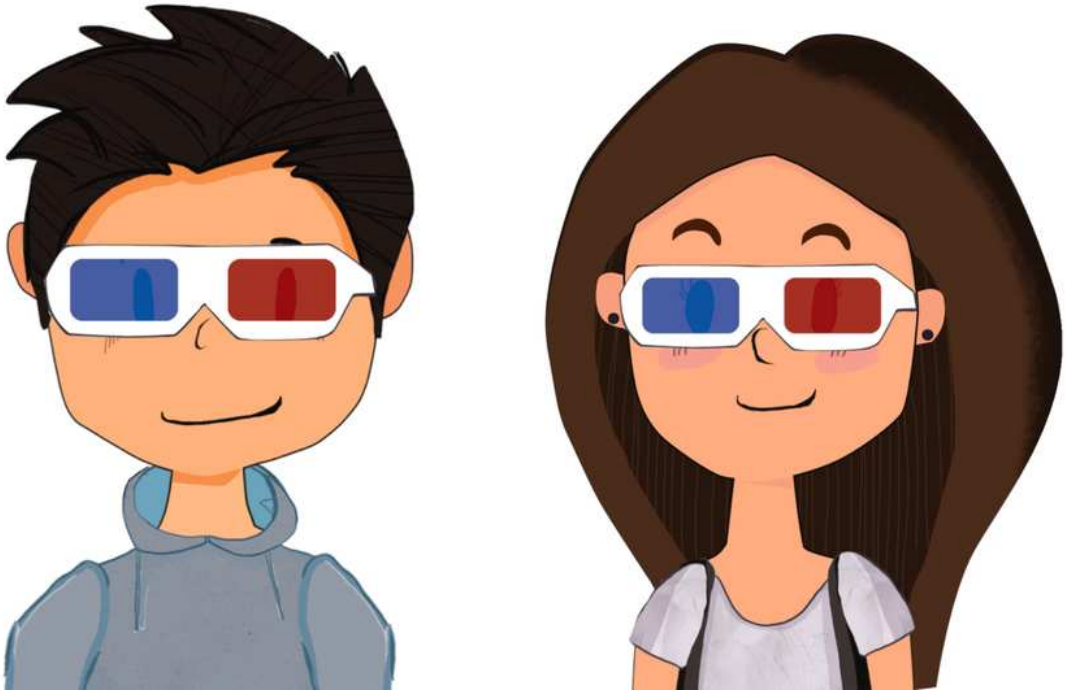
$$h = 12$$

Wysokość prostopadłościanu jest równa $12$ cm.

## Siatka prostopadłościanu

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje kolumny. Kreślone są krawędzie jednej kolumny – powstaje prostopadłościan. Dwa jednakowe prostopadłościany rozkładają się na dwie różne siatki prostopadłościanu.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki prostopadłościanu, które składają się w jednakowe prostopadłościany. Prostopadłościan zmienia się w kolumnę, która stoi obok innych kolumn.

---

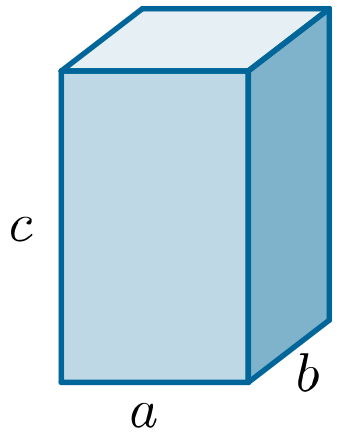
Wykonanie kartonowego modelu prostopadłościanu wymaga skonstruowania jego siatki.
Wielokąty składające się na siatkę są prostokątami, a ich wymiary są równe odpowiednio długości, szerokości i wysokości prostopadłościanu.

Rysując siatkę prostopadłościanu, warto pamiętać, że przeciwległe ściany prostopadłościanu są przystającymi prostokątami.

# Pole powierzchni prostopadłościanu

> **Ważne!**

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe sumie pól jego podstaw i ścian bocznych.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$P_c = P_p + P_b$$

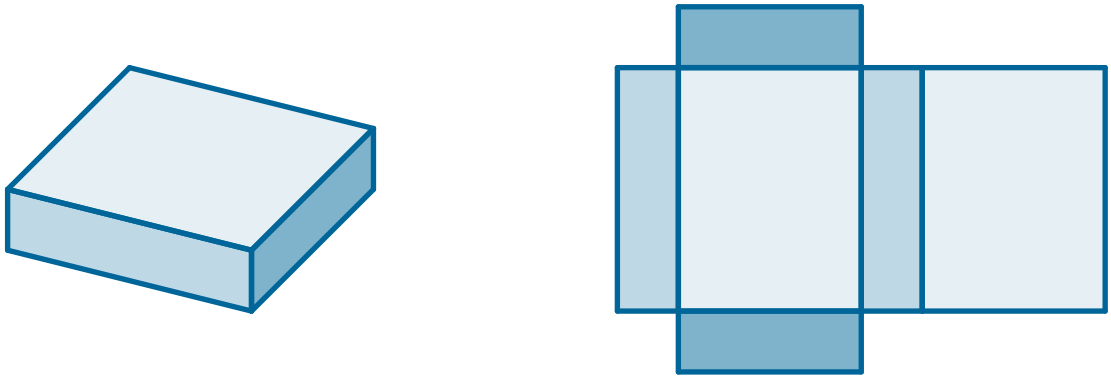
- $P_c$- pole powierzchni całkowitej
- $P_p$-pole powierzchni podstaw
- $P_b$- pole powierzchni ścian bocznych

$$P_c = 2\mathrm{ab} + 2\mathrm{ac} + 2\mathrm{bc} = 2(\mathrm{ab} + \mathrm{ac} + \mathrm{bc})$$

**Przykład 7**

Znajomość siatki prostopadłościanu pozwala wyznaczyć jego pole powierzchni. Jest ono równe sumie pól wszystkich wielokątów, z których składa się siatka. Pole prostopadłościanu o długości $d$, szerokości $s$ i wysokości w jest sumą sześciu prostokątów parami przystających o wymiarach: $d$ i $s$, $d$ i $w$, $s$ i $w$.

$$P = 2(\mathrm{ds} + \mathrm{dw} + \mathrm{sw})$$

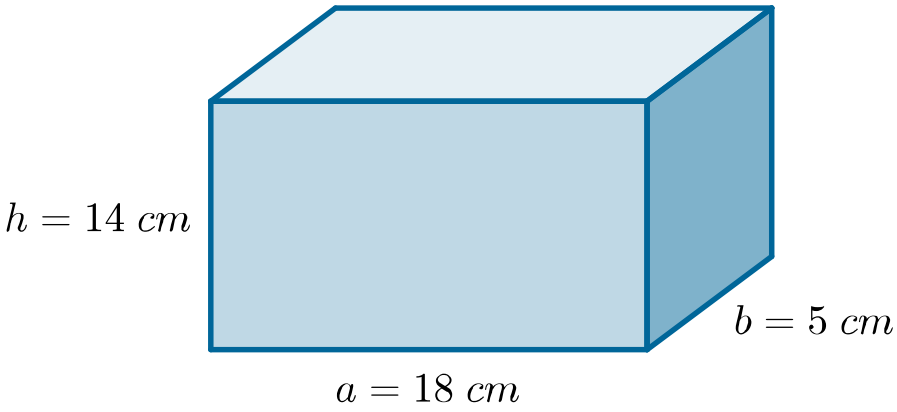


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 8**

Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu o długości $a = 1{,}8$ dm, szerokości $b = 5$ cm i wysokości $h = 0{,}14$ m.
Zapiszemy wszystkie wymiary prostopadłościanu w tej samej jednostce, np. w centymetrach.

$$a = 1{,}8 \text{ dm} \ = \ 18 \text{ cm}, h = 0{,}14 \text{ m} \ = \ 14 \text{ cm}$$




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczamy pola podstaw jako sumę pól dwóch przystających prostokątów o wymiarach
18 cm na 5 cm.

$$P_p = 2 \bullet (5 \bullet 18)$$

$$P_p = 180 \text{ cm}^2$$

Ściany boczne stanowią dwa prostokąty o wymiarach 14 cm na 18 cm i dwa o wymiarach
14 cm na 5 cm. Obliczamy pole powierzchni bocznej.

$$P_p = 2 \bullet (14 \bullet 18) + 2 \bullet (14 \bullet 5)$$

$$P_p = 504 + 140$$

$$P_p = 644 \text{ cm}^2$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej.

$$P_c = P_p + P_b$$

$$P_c = 180 + 644$$

$$P_c = 824 \text{ cm}^2$$

Pole powierzchni prostopadłościanu jest równe 824 $\text{cm}^2$.

**Przykład 9**

Garderoba ma kształt prostopadłościanu bez przedniej ścian,y i wymiary takie, jak na rysunku. Marek obliczył, że aby pomalować wszystkie ściany musi kupić 4 puszki farby. Ile puszek farby musi kupić, aby pomalować również sufit? Jedna puszka farby wystarczy na pomalowanie 5 $m^2$ powierzchni.
Puszka farby wystarczy na pomalowanie 5 $m^2$ powierzchni, a więc 4 puszki wystarczą na pomalowanie $4 \bullet 5\ m^2 \ = \ 20\ m^2$ powierzchni. Wynika z tego, że pole powierzchni ścian garderoby wynosi 20 $m^2$.
Oznaczmy $x$ – długość garderoby. Wtedy pole powierzchni ścian garderoby można zapisać w postaci: $2 \bullet 2 \bullet 2{,}5 + x \bullet 2{,}5$. Porównujemy otrzymane wielkości i wyznaczamy $x$.

$$2 \bullet 2 \bullet 2{,}5 + x \bullet 2{,}5 = 20$$

$$10 + 2{,}5\text{x} \ = \ 20, 2{,}5\text{x} \ = \ 10, \text{x} \ = \ 4 \text{ m}$$

Obliczamy pole powierzchni sufitu garderoby.

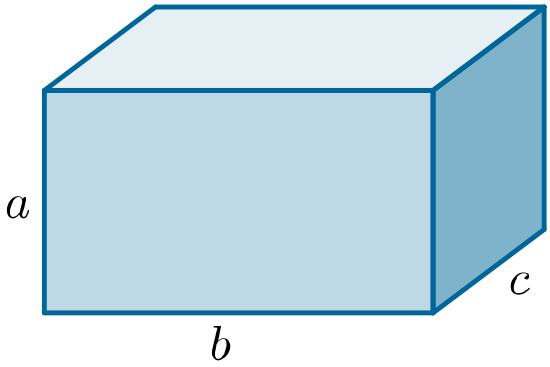
$$4 \text{ m} \bullet 2 \text{ m} \ = \ 8\ m^2$$

Obliczamy, że na pomalowanie sufitu potrzeba $8 : 5 = 1{,}5$ puszek farby.
Marek musi więc dokupić jeszcze 2 puszki farby.

# Objętość prostopadłościanu

**Ważne!**

Objętość prostopadłościanu to iloczyn jego długości, szerokości i wysokości.




$$V = abc$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$V = \mathrm{abc}$$

**Przykład 10**

Obliczymy wysokość kontenera o kubaturze $70000\ \mathrm{dm}^3$, szerokości $20\ \mathrm{dm}$ i długości $125\ \mathrm{dm}$.
Kubatura to inaczej objętość kontenera. Korzystamy więc ze wzoru na objętość prostopadłościanu i wyznaczamy jego wysokość $h$.

$$20 \bullet 125 \bullet h = 70000$$

$$h = 70000 : 2500$$

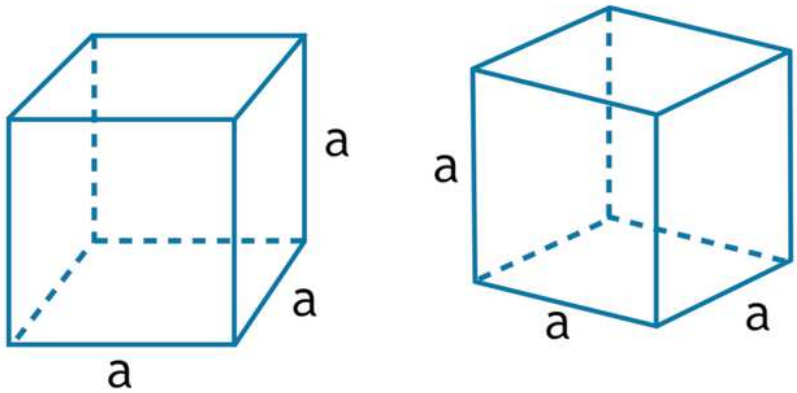
$$h = 280\ \mathrm{dm} = 2{,}8\ \mathrm{m}$$

Wysokość kontenera wynosi $2{,}8\ \mathrm{m}$.

# Sześcian

**Przykład 11**

Każda ściana sześcianu jest kwadratem.

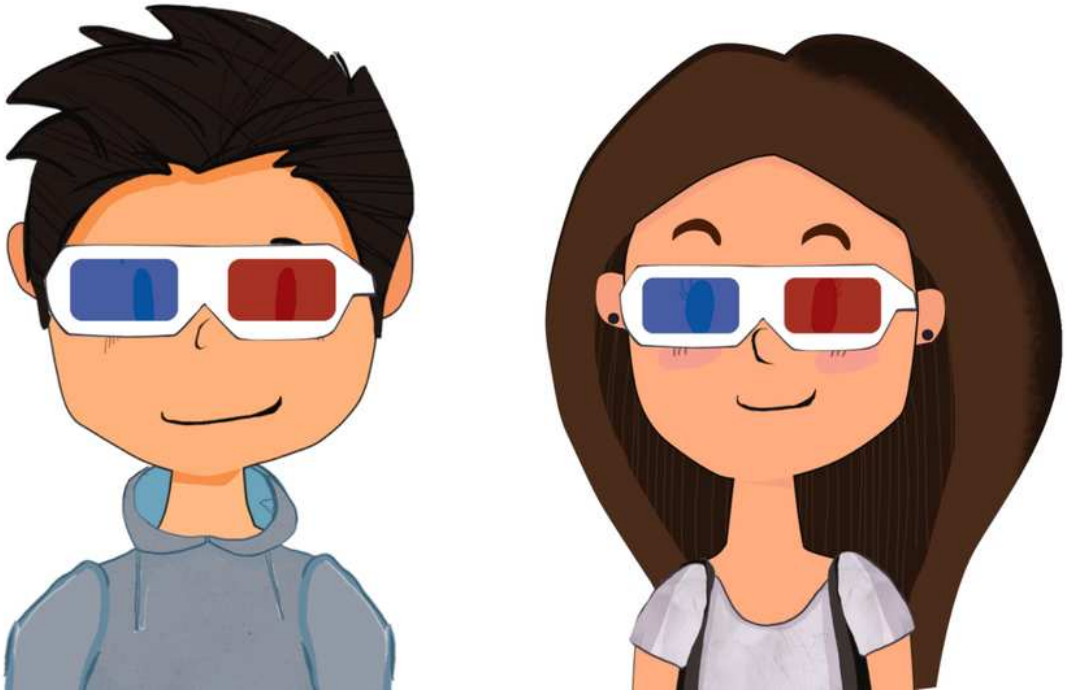



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

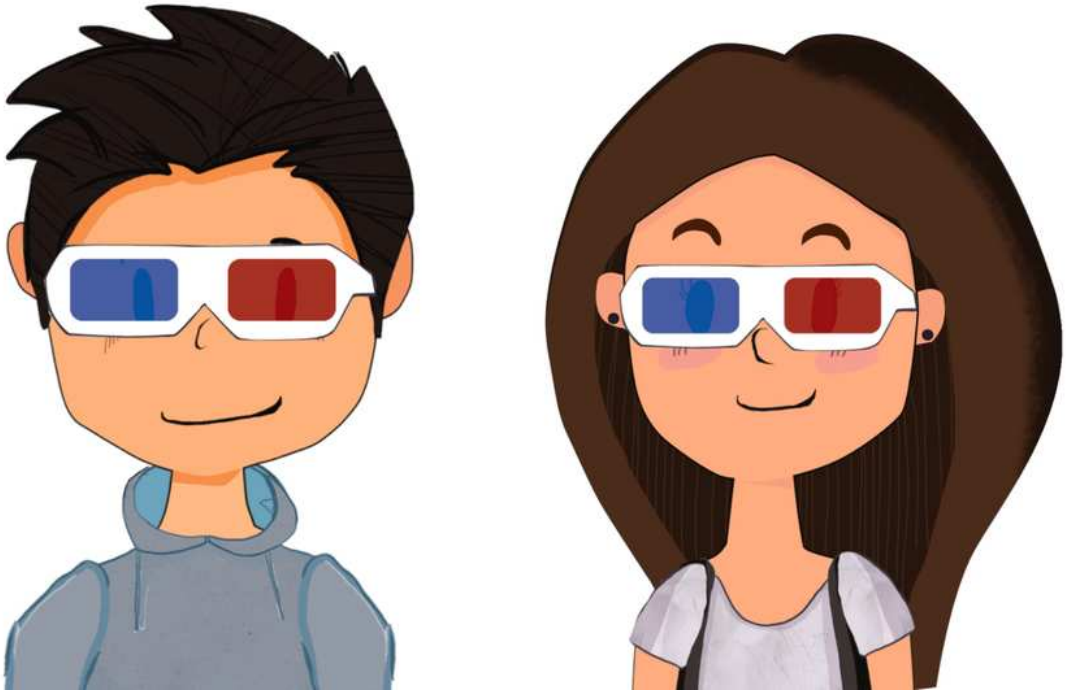
Prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie są równe, nazywa się sześcianem. Siatka sześcianu składa się z sześciu przystających kwadratów. Kwadraty te mogą układać się w jedenaście różnych konfiguracji.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje leżące na stole kostki do gry. Kreślone są krawędzie jednej kostki – powstaje sześcian. Dwa jednakowe sześciany rozkładają się na dwie różne siatki sześcianu.

---



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki sześcianu, które składają się w jednakowe sześciany. Sześcian zamienia się w kostkę do gry, która leży z innymi kostkami na

stole.

---

Różne siatki można uzyskać, rozcinając odpowiednio sześcian.
Mając jedną z siatek, pozostałe można uzyskać, przesuwając kwadraty, z których jest zbudowana.

**Ważne!**

Pole powierzchni sześcianu o krawędzi długości $a$ jest równe sumie pól sześciu przystających kwadratów o boku długości $a$

$$P = 6a^2$$

Objętość sześcianu o krawędzi długości a jest równa

$$V = a^3$$

**Przykład 12**

Oblicz pole powierzchni sześcianu, którego objętość jest równa $27\ \mathrm{dm}^2$.
Obliczamy długość a krawędzi sześcianu.

$$a^3 = 27$$

$$a = \sqrt[3]{27}$$

$$a = 3\ \mathrm{dm}$$

Obliczamy pole powierzchni sześcianu.

$$P = 6\ a^2$$

$$P = 6 \bullet 3^2$$

$$P = 54\ \mathrm{cm}^2$$

Pole powierzchni sześcianu jest równe $54\ \ \mathrm{cm}^2$.

**Przykład 13**

Przekątna ściany bocznej sześcianu jest równa $\frac{3}{4}\sqrt{2}$. Oblicz objętość sześcianu.
Obliczamy długość a krawędzi sześcianu – korzystamy ze wzoru na przekątną kwadratu.

$$a\sqrt{2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$a = \frac{3}{4}$$

Obliczamy objętość sześcianu.

$$V = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$V = \frac{27}{64}$$

Objętość sześcianu jest równa $\frac{27}{64}$.

**Ciekawostka**

Już w starożytności zastanawiano się, czy można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki krawędzie sześcianu, którego objętość byłaby dwukrotnie większa od objętości danego sześcianu.
Problem ten, zwany podwojeniem sześcianu, starało się rozwiązać wielu matematyków również w czasach nowożytnych. Jednak dopiero w XIX wieku udowodniono, że zadanie to nie ma rozwiązania.
Podwojenie sześcianu, kwadratura koła (czyli skonstruowanie kwadratu, którego pole jest równe polu danego koła) i trysekcja kąta (czyli podział kąta na trzy równe części) tworzą trójkę klasycznych konstrukcji, których nie można wykonać tylko za pomocą cyrkla i linijki.

**Ćwiczenie 1**
Uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

| Wymiary prostopadłościanu | Suma długości krawędzi prostopadłościanu |
|---|---|
| 4 cm x 6 cm x 10 cm | ... cm |
| 2 dm x 34 cm x 6 cm | ... dm |
| 7 m x 8 m x 1 m | ... |

**Ćwiczenie 2**

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o przekątnej długości $a$. Wysokość prostopadłościanu jest równa $H$. Oblicz długość przekątnej $d$ prostopadłościanu.

Tabela. Dane

| | |
|---|---|
| $a = 10,\ H = \ 24$ | $d = \ldots$ |
| $a = 8,\ H = 15$ | $d = \ldots$ |
| $a = 7, H = 24$ | $d = \ldots$ |

**Ćwiczenie 3**

Podstawą prostopadłościanu jest wielokąt foremny. Przekątna prostopadłościanu ma długość $25\ \mathrm{dm}$, a wysokość $24\ \mathrm{dm}$. Wtedy

1. pole podstawy jest równe ...
2. pole ściany bocznej jest równe ....
3. pole powierzchni całkowitej jest równe ...

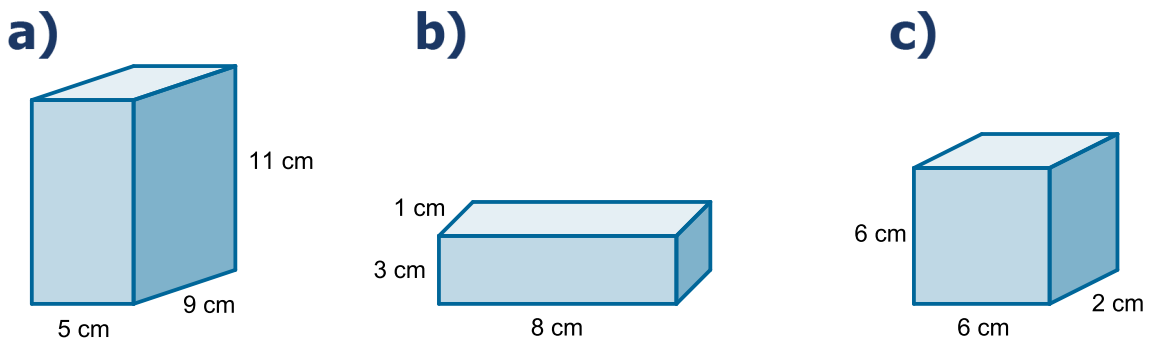
**Ćwiczenie 4**

Wysokość prostopadłościanu jest równa $15\ \mathrm{cm}$, a jego przekątna $25\ \mathrm{cm}$. Podstawą bryły jest kwadrat. Oblicz

1. długość przekątnej podstawy
2. pole podstawy
3. pole powierzchni bocznej

**Ćwiczenie 5**

Narysuj siatkę prostopadłościanu przedstawionego na rysunku i oblicz jego pole powierzchni bocznej.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 6**

Znajdź wzór na długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości $a$, $b$ i $c$.

**Ćwiczenie 7**

Objętość prostopadłościanu wynosi $256\ \mathrm{cm}^3$. Krawędź boczna jest cztery razy dłuższa od szerokości krawędzi podstawy oraz dwa razy krótsza od długości podstawy. Oblicz wymiary tego graniastosłupa.

**Ćwiczenie 8**

Pojemnik na wodę ma kształt prostopadłościanu. Pole powierzchni kwadratowej podstawy pojemnika jest równe $400\ \mathrm{cm}^2$. Pole powierzchni ściany bocznej wynosi $60\ \mathrm{cm}^2$. Oblicz objętość tego pojemnika.

**Ćwiczenie 9**

Pojemnik z wodą ma kształt prostopadłościanu o podstawie w kształcie prostokąta o wymiarach $80\ \mathrm{cm}$ na $60\ \mathrm{cm}$. Wysokość pojemnika wynosi $34\ \mathrm{cm}$. Do pojemnika wrzucono metalowy klocek , który całkowicie zanurzył się w wodzie. Poziom wody podniósł się o $2\ \mathrm{cm}$. Jaką objętość ma klocek?

**Ćwiczenie 10**

Jak zmieni się objętość prostopadłościanu, jeśli:

1. podstawy nie zmienimy, a wysokość zwiększymy trzykrotnie,
2. wysokości nie zmienimy, a każdą z krawędzi podstawy zwiększymy dwukrotnie,
3. wszystkie krawędzie graniastosłupa zwiększymy pięciokrotnie?

**Ćwiczenie 11**

Przekątna jednej ściany bocznej prostopadłościanu ma długość $10$ i tworzy z krawędzią boczną kąt $30^\circ$. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat.
Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu.

**Ćwiczenie 12**

Przekątna prostopadłościanu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $60^\circ$. Podstawą jest kwadrat o boku długości $4$. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu oraz długość jego przekątnej.

**Ćwiczenie 13**

Dany jest sześcian o krawędzi długości $2\ \mathrm{cm}$. Oblicz podane wielkości.

1. Pole powierzchni sześcianu.
2. Objętość sześcianu.
3. Długość $d$ przekątnej ściany bocznej.

**Ćwiczenie 14**

Pole powierzchni sześcianu jest równe $294$. Suma długości jego krawędzi jest równa

- $343$
- $28$
- $49$
- $84$

**Ćwiczenie 15**

Objętość sześcianu jest równa $64\ \mathrm{dm}^3$. Przekątna ściany bocznej ma długość

- $4\sqrt{2}\ \mathrm{dm}$
- $4\ \mathrm{dm}$
- $6\sqrt{2}\ \mathrm{dm}$
- $8\sqrt{2}\ \mathrm{dm}$

**Ćwiczenie 16**

Pole powierzchni siatki sześcianu jest równe $8{,}64$.Objętość sześcianu jest

- większa od $2$
- większa od $1{,}5$
- mniejsza od $1{,}2$
- mniejsza od $1{,}4$

**Ćwiczenie 17**

Oblicz:

1. długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości $10\ \mathrm{cm}$,
2. objętość sześcianu o przekątnej długości $1\ \mathrm{m}$,
3. pole powierzchni sześcianu o przekątnej długości $a$.

**Ćwiczenie 18**

Suma długości krawędzi sześcianu wynosi $360\ \mathrm{cm}$. Oblicz objętość tego sześcianu i jego pole powierzchni.

**Ćwiczenie 19**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Przekątne w prostopadłościanie są tej samej długości.
- [ ] Każdy prostopadłościan można przedstawić jako sumę sześcianów.
- [ ] Każdy sześcian jest prostopadłościanem.

**Ćwiczenie 20**

Ile waży powietrze wypełniające pudełko, które ma kształt prostopadłościanu o wymiarach
$2\ \mathrm{cm}$ x $4\ \mathrm{cm}$ x $3\ \mathrm{cm}$? Przyjmij, że $1\ m^3$ powietrza waży $1{,}2\ \mathrm{kg}$.

**Ćwiczenie 21**

Prostopadłościenny litrowy pojemnik wypełniony jest wodą. Dno pojemnika ma wymiary
$4\ \mathrm{cm}$ na $3\ \mathrm{cm}$. Z pojemnika odlano $0{,}24\ \mathrm{l}$ wody.
O ile centymetrów obniżył się poziom wody w pojemniku?

**Ćwiczenie 22**

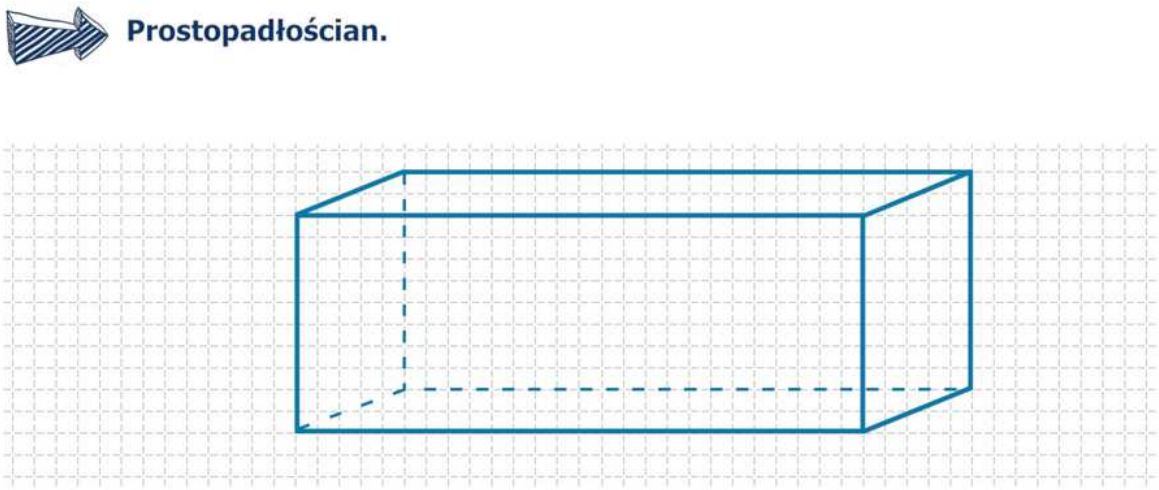
W ilu co najmniej kartonach zmieści się litr soku, jeśli kartony mają wymiary zewnętrzne $5\ \mathrm{cm}$ x $10\ \mathrm{cm}$ x $20\ \mathrm{cm}$ ? Przyjmij, że grubość ścianki wynosi $0{,}5\ \mathrm{mm}$.

**Ćwiczenie 23**

Zaprojektuj prostopadłościenny kuferek, który będzie miał taką samą objętość, jak pudełko o pojemności $42\ \mathrm{l}$.

**Ćwiczenie 24**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



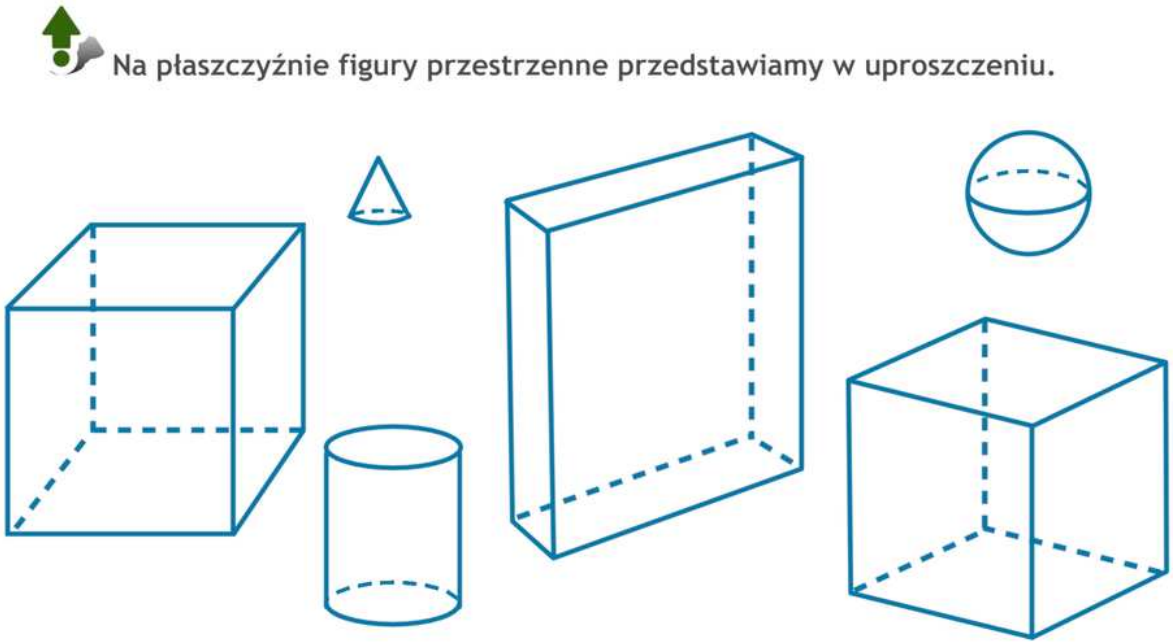

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

# Graniastosłup - opis

## Rodzaje graniastosłupów




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

Prostopadłościan i sześcian są przykładami graniastosłupów prostych.

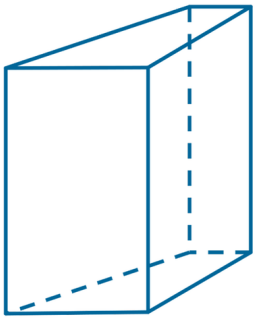
Graniastosłup prosty ma dwie podstawy w kształcie przystających wielokątów, leżące w równoległych płaszczyznach. Ściany boczne są prostokątami prostopadłymi do podstaw.
Nazwa graniastosłupa zależy od wielokąta, będącego jego podstawą.

> **Definicja: Graniastosłup prosty**
>
> Graniastosłup prosty to taka figura przestrzenna, która ma
>
> - dwie podstawy będące jednakowymi wielokątami,

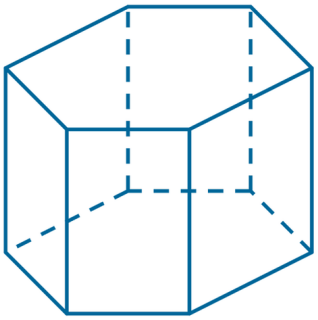
- ściany boczne będące prostokątami.

Nazwa graniastosłupa zależy od rodzaju wielokąta w podstawie.

**graniastosłup prosty trójkątny**

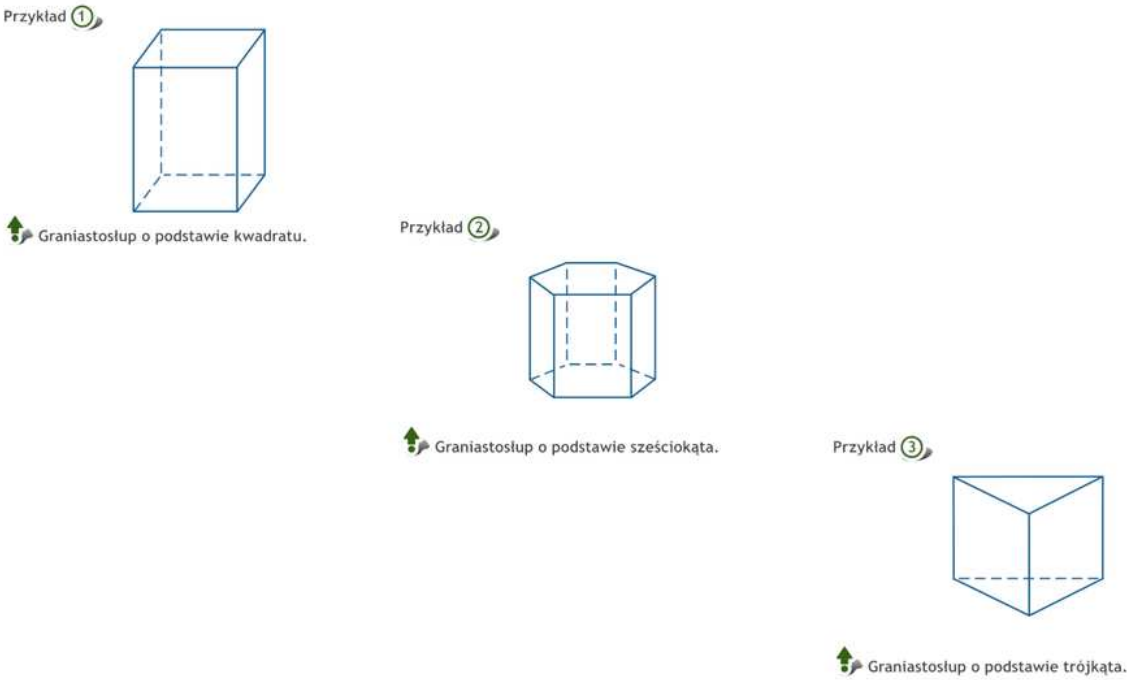


**graniastosłup prosty czworokątny**



**graniastosłup prosty sześciokątny**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje przykłady trzech figur przestrzennych, które są graniastosłupem o podstawie kwadratu, graniastosłupem o podstawie sześciokąta i graniastosłupem o podstawie trójkąta.

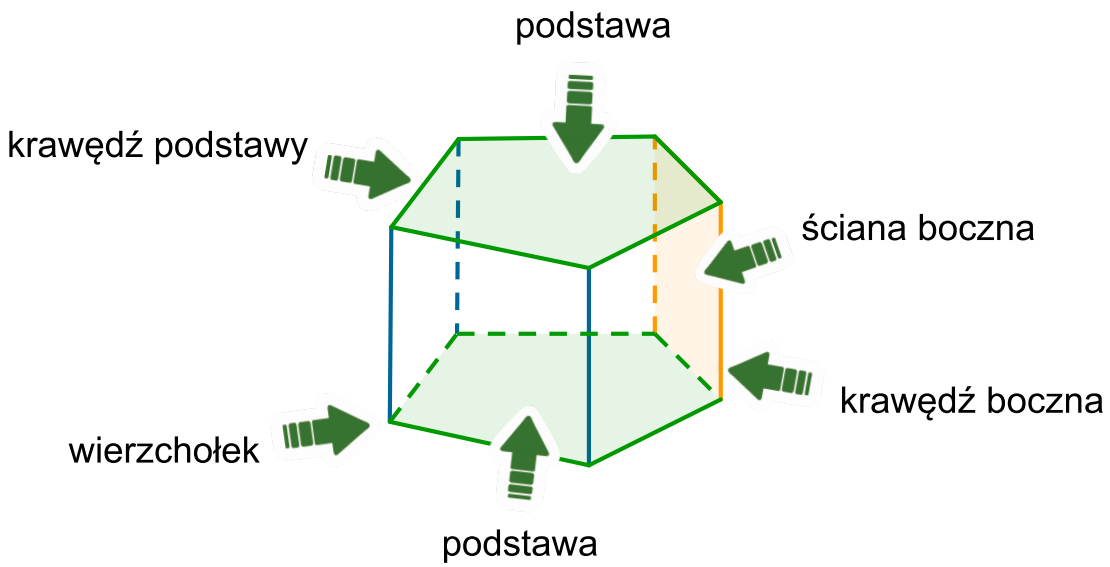
Jeśli podstawą graniastosłupa prostego jest wielokąt foremny (np. trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny, sześciokąt foremny), wówczas graniastosłup taki nazywamy prawidłowym.

Inny rodzaj graniastosłupów to graniastosłupy pochyłe. Ich ściany boczne są równoległobokami. Najczęściej leżą w płaszczyznach, które nie są prostopadłe do podstaw.

## Elementy graniastosłupa

> **Ważne!**
>
> Graniastosłup ma dwie podstawy w kształcie wielokątów. Liczba ścian bocznych zależy od liczby boków podstawy. Ściany boczne są prostokątami (w przypadku graniastosłupów prostych) lub równoległobokami. Krawędzie boczne są równoległe i równe.

Obejrzyj dokładnie model graniastosłupa.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

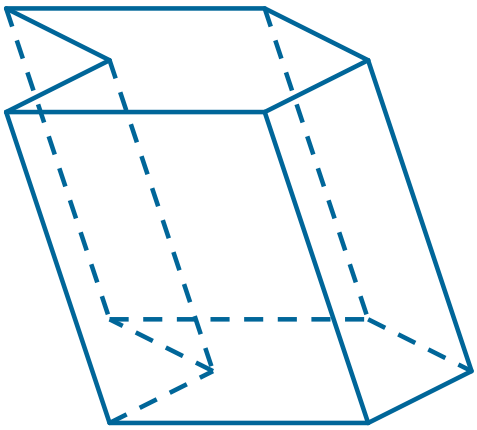
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DiN0qGQJP

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Przykład 1**

Rysunek przedstawia graniastosłup.

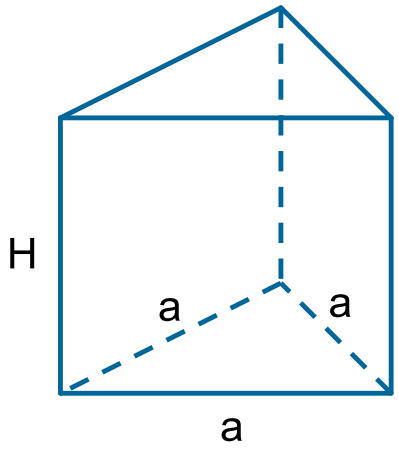
- Określ liczbę wierzchołków podstawy dolnej i liczbę wszystkich wierzchołków.
- Ile krawędzi bocznych ma ten graniastosłup? Ile ma wszystkich krawędzi?
- Ile ścian bocznych ma graniastosłup? Ile ma wszystkich ścian?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 2**

Podstawą graniastosłupa prawidłowego jest trójkąt o polu $25\sqrt{3}\ cm^2$. Wysokość graniastosłupa jest równa 12 cm. Oblicz, ile centymetrów listewek potrzeba na wykonanie szkieletowego modelu tego graniastosłupa.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Graniastosłup jest prawidłowy trójkątny, zatem jego podstawą jest trójkąt równoboczny.
Obliczamy długość a krawędzi podstawy – korzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego.

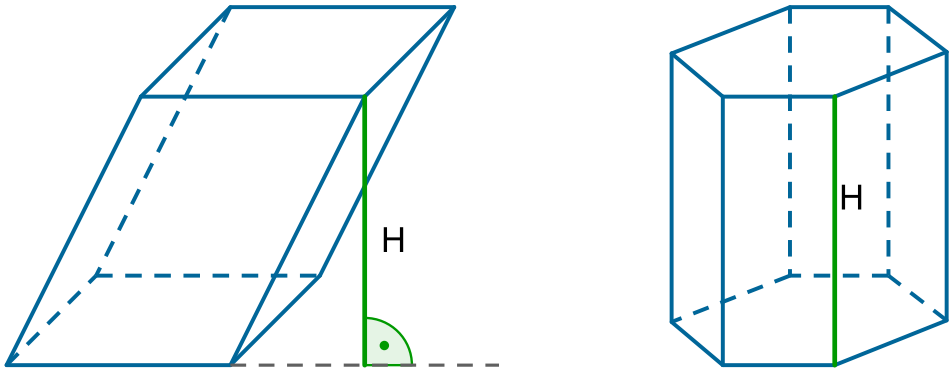
$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = P\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 25\sqrt{3}a^2 = 100$$

$$a = \sqrt{100}a = 10 \text{ cm}$$

Wszystkie krawędzie boczne graniastosłupa są równe i mają długość 12 cm.
Graniastosłup ma 6 krawędzi podstaw i 3 krawędzie boczne. Zatem potrzeba 6 listewek długości 10 cm i trzech długości 12 cm.

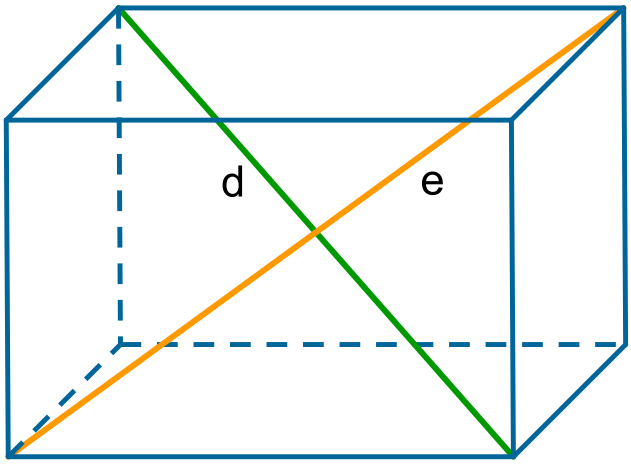
$$6 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 60 + 36 = 96$$

Odpowiedź.
Na wykonanie modelu graniastosłupa potrzeba 96 cm listewek.
Wysokością graniastosłupa nazywamy odległość między płaszczyznami zawierającymi jego podstawy. W przypadku graniastosłupów prostych, wysokość jest równa długości krawędzi bocznej.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekątna graniastosłupa to odcinek łączący dwa wierzchołki leżące w różnych podstawach i różnych ścianach bocznych.



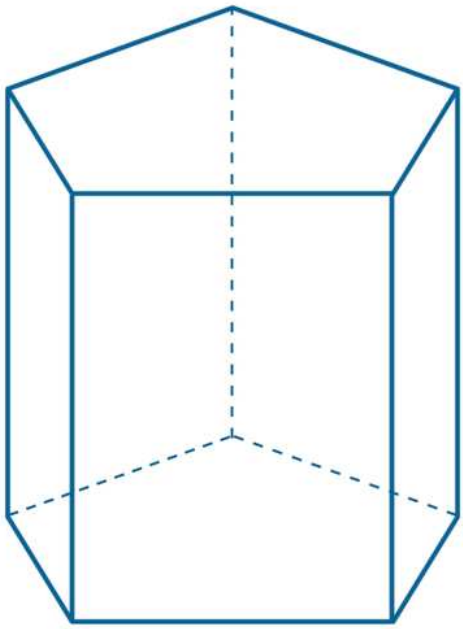

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Rysowanie graniastosłupów

Rysowanie graniastosłupa najlepiej rozpocząć od narysowania jego podstawy dolnej. Następnie rysujemy krawędzie boczne i łączymy ich końce, tworząc wielokąt będący podstawą górną. Niewidoczne krawędzie warto zaznaczyć liniami przerywanymi.

**Przykład 3**

Narysuj graniastosłup prosty, który w podstawie ma pięciokąt.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

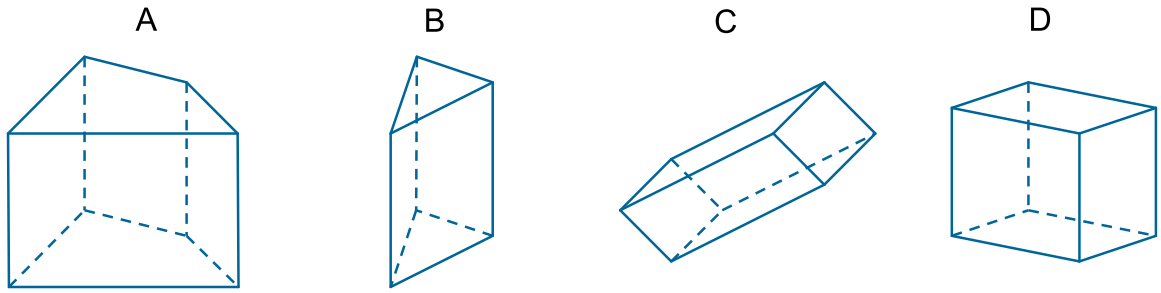
**Ćwiczenie 1**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Graniastosłup ma tyle krawędzi bocznych, ile ma wierzchołków.
- [ ] Podstawą graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkąt prostokątny.
- [ ] Każda z podstaw graniastosłupa pochyłego ma inną liczbę krawędzi.
- [ ] Podstawy graniastosłupa są wzajemnie prostopadłe.

**Ćwiczenie 2**

Uzupełnij tabelę, Określ w każdym z graniastosłupów liczbę ścian bocznych, wierzchołków, krawędzi bocznych i podstaw.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

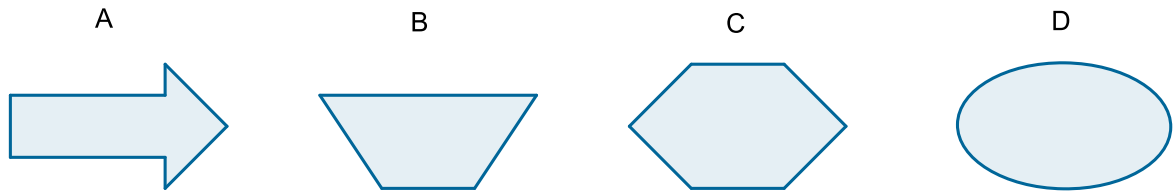
Uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

| Nazwa graniastosłupa | Liczba ścian bocznych | Liczba wierzchołków | Liczba krawędzi bocznych | Liczba podstaw |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | | | | |
| $B$ | | | | |
| $C$ | | | | |

## Ćwiczenie 3

Wskaż figurę, która nie może być podstawą graniastosłupa.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- D
- A
- B
- C

## Ćwiczenie 4

Pewien graniastosłup ma $16$ wierzchołków. Ile krawędzi ma ten graniastosłup?

- $24$
- $8$
- $32$
- $64$

**Ćwiczenie 5**

Uzupełnij zdania.

1. Graniastosłup, który nie ma przekątnej, ma ...krawędzi. Jego podstawą jest...
2. Sześcian to graniastosłup prawidłowy ...
3. Podstawą graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest....

**Ćwiczenie 6**

Nie istnieje graniastosłup, który ma

- ◯ 7 krawędzi jednej z podstaw
- ◯ wysokość równą 7
- ◯ 7 krawędzi bocznych
- ◯ 7 wierzchołków

**Ćwiczenie 7**

Prawdą jest, że

- ☐ Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego jest zawsze parzysta.
- ☐ W graniastosłupie prawidłowym wszystkie krawędzie są równe.
- ☐ Krawędzie boczne graniastosłupa prostego są równe.
- ☐ Jeśli wszystkie krawędzie graniastosłupa są równe, to jest to graniastosłup prawidłowy.

**Ćwiczenie 8**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Każdy graniastosłup prawidłowy czworokątny jest sześcianem.
- [ ] Każdy sześcian jest graniastosłupem prawidłowym czworokątnym.
- [ ] Każdy prostopadłościan jest graniastosłupem prostym.

**Ćwiczenie 9**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] Jeśli w graniastosłupie prostym podstawy są wielokątami przystającymi, to graniastosłup ten jest prawidłowy.
- [ ] Jeśli w graniastosłupie prostym ściany boczne są przystającymi prostokątami, to graniastosłup ten jest prawidłowy.
- [ ] Jeśli w graniastosłupie prostym wszystkie ściany są przystającymi kwadratami, to graniastosłup ten jest prawidłowy.

**Ćwiczenie 10**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- [ ] W graniastosłupie prawidłowym ściany boczne są przystającymi prostokątami
- [ ] W graniastosłupie prostym ściany boczne są prostokątami.
- [ ] W graniastosłupie krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw.
- [ ] Graniastosłup prawidłowy jest graniastosłupem prostym.
- [ ] W graniastosłupie prawidłowym podstawy są wielokątami foremnymi.

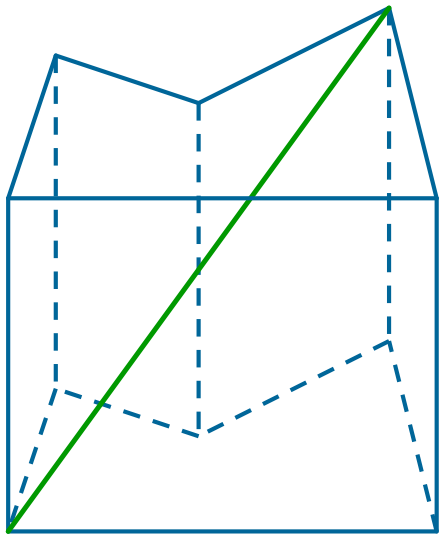



Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DiN0qGQJP

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 11

Zaznaczony odcinek w graniastosłupie to:



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- ◯ przekątna graniastosłupa
- ◯ przekątna podstawy
- ◯ przekątna ściany bocznej
- ◯ wysokość

## Ćwiczenie 12

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 13**

Podaj, ile krawędzi, ścian i wierzchołków ma graniastosłup, którego podstawa jest:

1. ośmiokątem
2. dwudziestokątem
3. stukątem

**Ćwiczenie 14**

W miejsce kropek wpisz odpowiednią liczbę.

1. Liczba krawędzi graniastosłupa o $20$ wierzchołkach. -...
2. Liczba ścian bocznych graniastosłupa, mającego $15$ krawędzi.-...
3. Liczba wierzchołków graniastosłupa zbudowanego z $22$ ścian. -...

**Ćwiczenie 15**

W miejsce kropek wpisz odpowiednią liczbę.

1. Liczba przekątnych graniastosłupa o podstawie czworokątnej ...
2. Liczba przekątnych graniastosłupa o podstawie pięciokątnej ...
3. Liczba przekątnych graniastosłupa o podstawie sześciokątnej ...
4. Liczba przekątnych graniastosłupa o podstawie siedmiokątnej ...

**Ćwiczenie 16**

Uzupełnij.

a) Graniastosłup o podstawie czworokątnej posiada _____ przekątne.

b) Graniastosłup o podstawie pięciokątnej posiada _____ przekątnych.

c) Graniastosłup o podstawie sześciokątnej posiada _____ przekątnych.

d) Graniastosłup o podstawie siedmiokątnej posiada _____ przekątnych.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 17**

Ile przekątnych ma

1. graniastosłup ośmiokątny?
2. graniastosłup stukątny?
3. graniastosłup n-kątny?

**Ćwiczenie 18**

Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości $10\ \mathrm{cm}$ jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości $2\ \mathrm{cm}$ i $3\ \mathrm{cm}$. Najdłuższa z przekątnych ścian bocznych ma długość

- ◯ $\sqrt{13}\ \mathrm{cm}$
- ◯ $\sqrt{113}\ \mathrm{cm}$
- ◯ $10\ \mathrm{cm}$
- ◯ $\sqrt{9}\ \mathrm{cm}$

**Ćwiczenie 19**

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do podstawy pod kątem $60^\circ$. Krawędź podstawy ma długość $2\ \mathrm{cm}$. Oblicz długość tej przekątnej i wysokość graniastosłupa.

**Ćwiczenie 20**

W graniastosłupie prawidłowym, którego wysokość jest równa $10\ \mathrm{cm}$, podstawą jest sześciokąt o krawędzi długości $2\ \mathrm{cm}$. Oblicz długości przekątnych tego graniastosłupa.

**Ćwiczenie 21**

Oblicz sumę długości krawędzi graniastosłupa prawidłowego o wysokości równej $4\ \mathrm{dm}$, którego podstawą jest:

1. trójkąt o boku długości $9\ \mathrm{cm}$
2. kwadrat o boku długości $5\ \mathrm{cm}$
3. pięciokąt o boku długości $1\ \mathrm{dm}$

# Pole powierzchni graniastosłupa

## Siatka graniastosłupa

Rozcinając kartonowy model graniastosłupa i rozprostowując go na płaszczyźnie, otrzymujemy siatkę graniastosłupa. Siatka składa się z prostokątów (lub równoległoboków) będących ścianami bocznymi i dwóch wielokątów, będących podstawami.

Przykłady siatek graniastosłupów prostych

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje kolumny. Kreślone są krawędzie jednej kolumny – powstaje prostopadłościan. Dwa jednakowe prostopadłościany rozkładają się na dwie różne siatki prostopadłościanu.

---

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki prostopadłościanu, które składają się w jednakowe prostopadłościany. Prostopadłościan zmienia się w kolumnę, która stoi obok innych kolumn.

---

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje nakrętki na śruby. Kreślone są krawędzie jednej nakrętki – powstaje graniastosłup o podstawie sześciokąta foremnego. Dwa jednakowe graniastosłupy rozkładają się na dwie różne siatki graniastosłupa.

---

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki graniastosłupa, które składają się w jednakowe graniastosłupy. Graniastosłup zamienia się w nakrętkę leżącą między nakrętkami.

---

> **Ważne!**
>
> Siatką prostopadłościanu jest figura płaska, z której można złożyć model prostopadłościanu. Siatka prostopadłościanu składa się z trzech par przystajacych prostokątów.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje leżące na stole kostki do gry. Kreślone są krawędzie jednej kostki – powstaje sześcian. Dwa jednakowe sześciany rozkładają się na dwie różne siatki sześcianu.

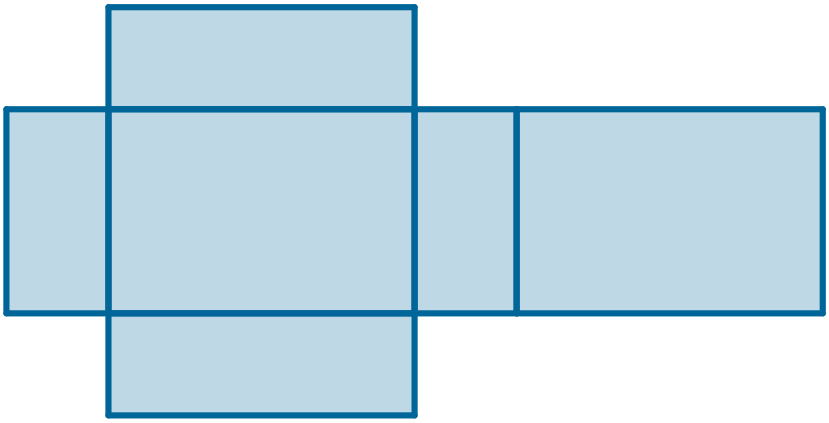
---

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie różne siatki sześcianu, które składają się w jednakowe sześciany. Sześcian zamienia się w kostkę do gry, która leży z innymi kostkami na stole.

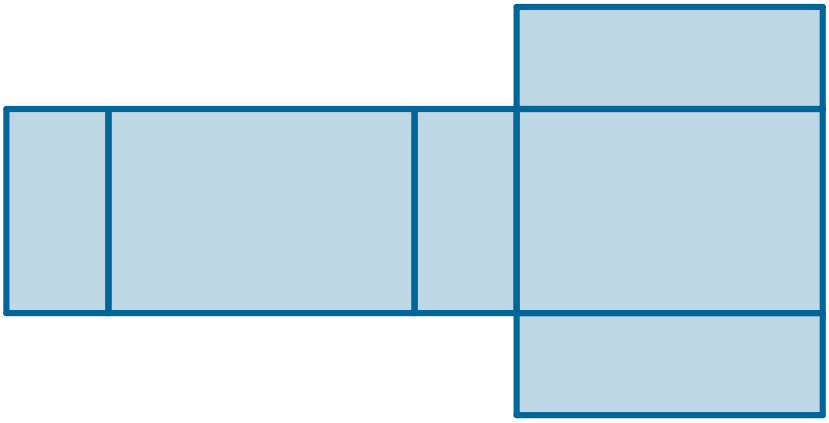
---

> **Ważne!**
>
> Przykłady siatek prostopadłościanów.
>
> 1.



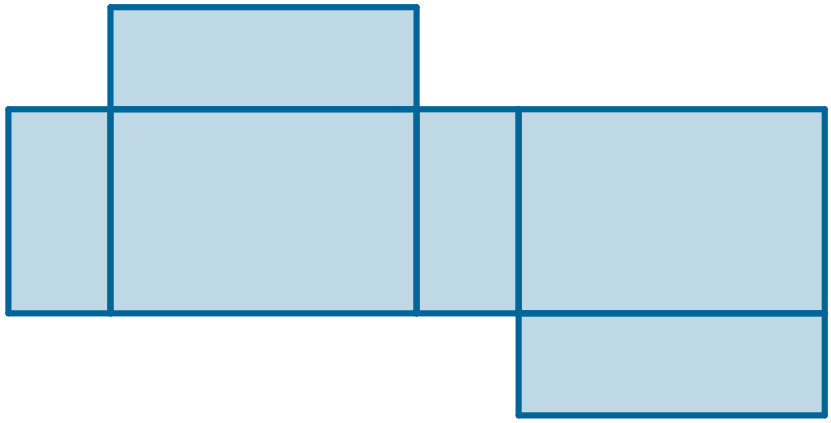
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2.



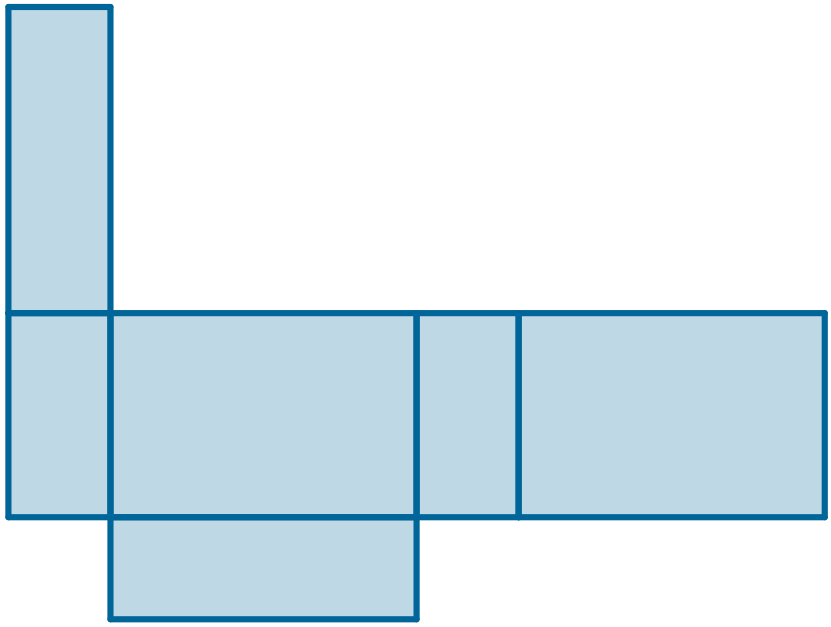
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

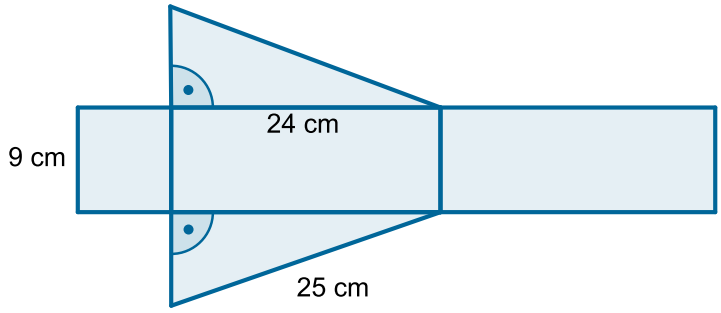
4.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 1**

Rysunek przedstawia siatkę graniastosłupa prostego. Oblicz sumę długości krawędzi tego graniastosłupa.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wszystkie krawędzie boczne graniastosłupa są równe i mają długość 9 cm. Suma ich długości jest równa

$$3 \cdot 9 \text{ cm} \ = \ 27 \text{ cm}$$

Podstawą jest trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 24 cm i przeciwprostokątnej długości 25 cm. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczymy długość $x$ drugiej przyprostokątnej.

$$24^2 + x^2 = 25^2$$

$$576 + x^2 \ = \ 625$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \sqrt{49} = 7$$

$$x = 7 \text{ cm}$$

Obliczamy sumę długości krawędzi podstaw.

$$2 \cdot (24 + 7 + 25) \text{ cm} \ = 112 \text{ cm}$$

Obliczamy sumę długości wszystkich krawędzi.

$$27 \text{ cm} \ + \ 112 \text{ cm} \ = \ 139 \text{ cm}$$

Odpowiedź:
Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa wynosi 139 cm.

# Pole powierzchni graniastosłupa

Znajomość siatki graniastosłupa pozwala wyznaczyć jego pole powierzchni. Jest ono równe sumie pól wszystkich wielokątów, z których składa się siatka.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje sześcian, który rozkłada się na siatkę sześcianu o krawędzi długości a. Zapis P = 6 razy a do kwadratu.

---

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje prostopadłościan, który rozkłada się na siatkę prostopadłościanu. Zaznaczone są pola poszczególnych ścian: P = a razy b, P = b razy c, P = a razy c. Zapis: P = 2a razy b +2b razy c +2a razy c.

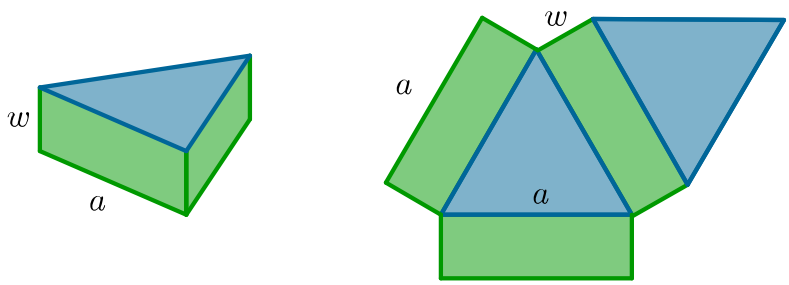
---

**Ważne!**

Wzór na pole powierzchni graniastosłupa

$$P = 2 \cdot P_p + P_b$$

$P$- pole powierzchni graniastosłupa
$P_p$- pole podstawy
$P_b$ – pole powierzchni bocznej

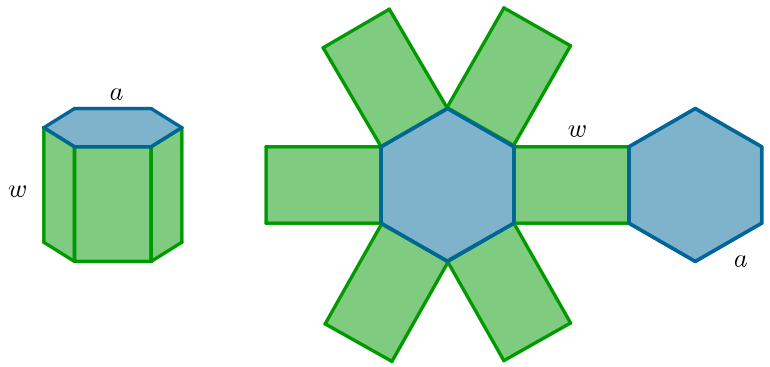



$$P = 3aw + 2\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości w i krawędzi podstawy $a$

$$P = 3a \cdot w + 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$




$$P = 6aw + 3a^2\sqrt{3}$$

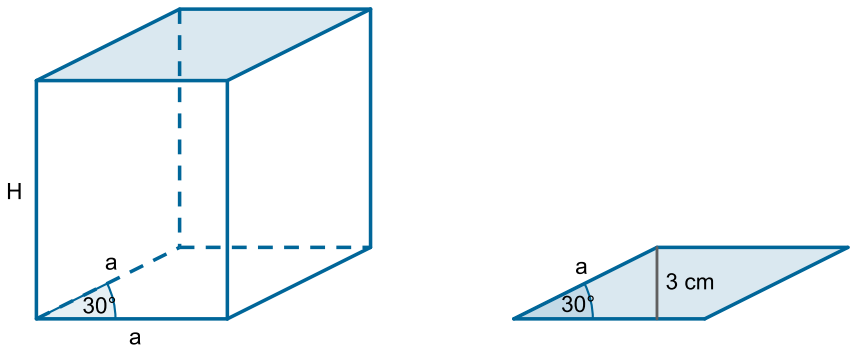
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy $a$ i wysokości $w$

$$P = \ 6a \cdot w + 3a^2\sqrt{3}$$

**Przykład 2**

Podstawą graniastosłupa jest romb o wysokości $3\ \text{cm}$ i kącie ostrym $30^\circ$. Pole powierzchni bocznej jest równe $168\ cm^2$. Oblicz wysokość graniastosłupa i jego pole powierzchni całkowitej.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Podstawą graniastosłupa jest romb, w którym kąt ostry ma miarę $30^\circ$, a wysokość jest równa $3$ cm. Z własności trójkąta prostokątnego o przyprostokątnej $3$ cm

i kącie ostrym leżącym naprzeciw tej przyprostokątnej o mierze $30^\circ$ wynika, że długość przeciwprostokątnej jest równa $6$ cm.
Zatem bok rombu ma długość $6$ cm.

- Obliczymy wysokość $H$ graniastosłupa, korzystając z tego, że pole powierzchni bocznej jest równe $168$ $cm^2$.

$$4 \cdot 6 \cdot H = 168$$

$$24H = 168$$

$$H = 7 \text{ cm}$$

- Obliczamy pole podstaw graniastosłupa.

$$2P_p = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$$

$$2P_p = 36 \ cm^2$$

- Obliczamy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jako sumę pola podstaw i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

$$P_c = 36 + 168 = 204$$

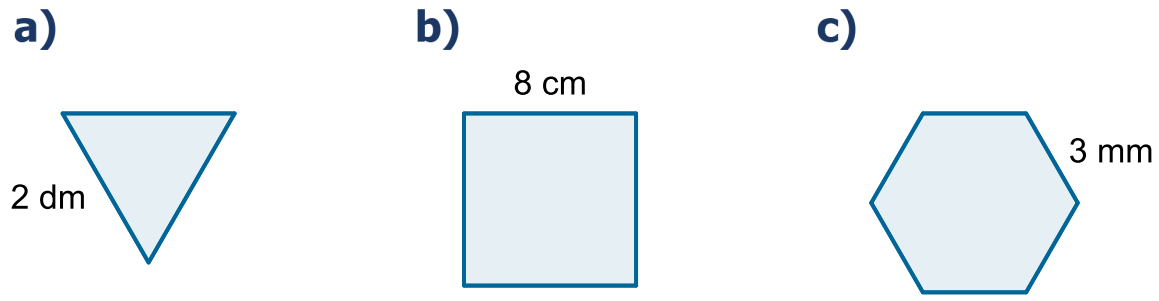
$$P_c = 204 \ cm^2$$

Odpowiedź:
Wysokość graniastosłupa jest równa $7$ cm, a pole powierzchni jest równe $204$ $cm^2$.

Zadania

**Ćwiczenie 1**

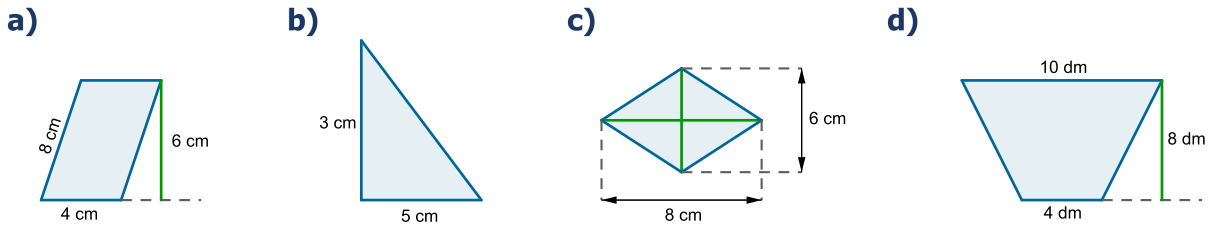
Oblicz pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego o wysokości $5\ \mathrm{cm}$ i podstawie przedstawionej na rysunku.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 2**

Wysokość graniastosłupa jest równa $6{,}5\ \mathrm{dm}$. Podstawą jest wielokąt przedstawiony na rysunku. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 3**

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe $60\ cm^2$, a pole powierzchni bocznej
$48\mathrm{c}\ m^2$. Oblicz pole podstawy.

**Ćwiczenie 4**

Pole powierzchni podstawy graniastosłupa jest równe $6\ \mathrm{d}m^2$, a pole powierzchni bocznej jest siedmiokrotnie większe . Oblicz pole powierzchni całkowitej.

**Ćwiczenie 5**

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego ma długość $4\ \mathrm{cm}$. Wysokość graniastosłupa jest równa $6\ \mathrm{cm}$. Narysuj siatkę tego graniastosłupa, wiedząc, że jego podstawą jest

1. trójkąt
2. czworokąt
3. pięciokąt
4. sześciokąt

**Ćwiczenie 6**

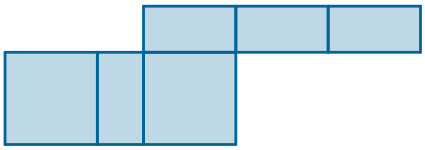
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 7**

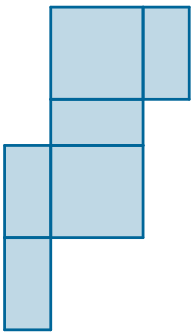
Pudełko ma kształt graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $12\ \mathrm{cm}$ i $16\ \mathrm{cm}$. Wysokość pudełka jest równa $10\ \mathrm{cm}$. Dobierz odpowiednią skalę i narysuj siatkę, z której można zbudować pudełko. Oblicz, ile kartonu użyto na jego wykonanie.

**Ćwiczenie 8**

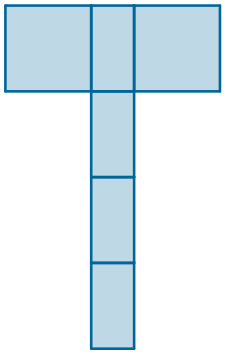
Które figury są siatkami prostopadłościanu?



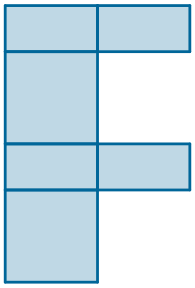
☐

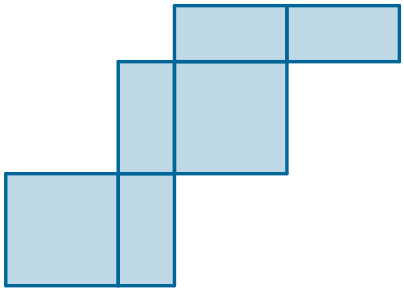


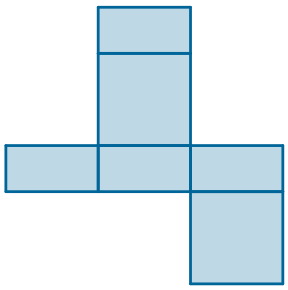
☐



☐

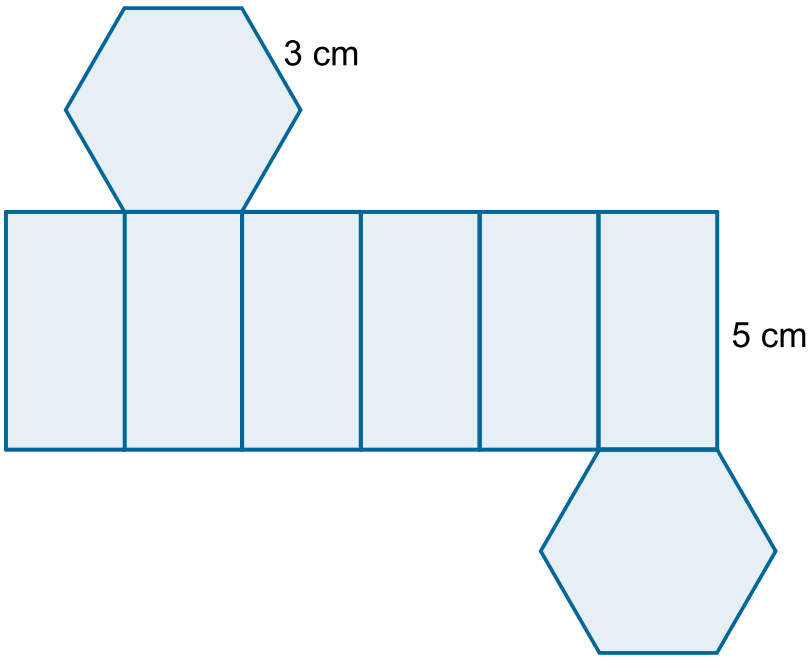






**Ćwiczenie 9**

Rysunek przedstawia siatkę graniastosłupa. Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- [ ] Pole powierzchni podstawy jest równe $13{,}5\sqrt{3}\ cm^2$.
- [ ] Krawędź boczna graniastosłupa jest nachylona do podstawy pod kątem $72^\circ$.
- [ ] Suma długości krawędzi graniastosłupa jest o $30\ \mathrm{cm}$ większa od sumy długości krawędzi bocznych.
- [ ] Pole powierzchni całkowitej jest o $75\ cm^2$ większe od sumy pól powierzchni podstaw.

**Ćwiczenie 10**

Siatka graniastosłupa prostego składa się z odcinków, których suma długości jest równa $200\ \mathrm{cm}$. Oblicz, jaka jest długość wysokości tego graniastosłupa, jeśli podstawa jest

1. trójkątem prostokątnym o przyprostokątnej długości $6\ \mathrm{cm}$ i przeciwprostokątnej długości $10\ \mathrm{cm}$
2. rombem o boku długości $5\ \mathrm{cm}$,
3. pięciokątem foremnym o boku długości $10\ \mathrm{cm}$,

**Ćwiczenie 11**

Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa:

1. którego podstawą jest trójkąt , w którym dwa kąty mają miary $30^\circ$ i $60^\circ$, a najdłuższy bok ma długość $10\ \mathrm{cm}$. Wysokość graniastosłupa jest równa $1{,}5\ \mathrm{dm}$.
2. którego podstawą jest trapez prostokątny o wysokości $4\ \mathrm{cm}$ i podstawach długości $5\ \mathrm{cm}$ i $8\ \mathrm{cm}$. Wysokość graniastosłupa stanowi $20\%$ najdłuższego boku podstawy.

**Ćwiczenie 12**

Podstawą graniastosłupa jest trapez równoramienny, w którym kąt ostry ma miarę $45^\circ$. Boki równoległe trapezu są równe $8\ \mathrm{cm}$ i $10\ \mathrm{cm}$. Pole powierzchni całkowitej jest równe $24\left(6+\sqrt{2}\right)cm^2$. Oblicz wysokość graniastosłupa.

**Ćwiczenie 13**

Podstawą graniastosłupa jest prostokąt o obwodzie $20$. Dwie ściany boczne są kwadrami, o polu $36$ każda. Wynika z tego, że

- [ ] pole podstawy jest mniejsze od pola powierzchni bocznej o $20$.
- [ ] pole powierzchni całkowitej jest równe $84$.
- [ ] pole podstawy graniastosłupa jest większe od $20$.
- [ ] pole powierzchni bocznej jest równe $120$.

**Ćwiczenie 14**

Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, którego krawędź boczna ma długość $10\ \mathrm{cm}$, a podstawa jest rombem o przekątnych długości $6\ \mathrm{cm}$ i $8\ \mathrm{cm}$.

**Ćwiczenie 15**

Wysokość graniastosłupa jest równa $10\ \mathrm{cm}$. Podstawą jest trapez równoramienny o bokach długości $5\ \mathrm{cm},\ 3\ \mathrm{cm},\ 2\ \mathrm{cm},\ 2\ \mathrm{cm}$.
Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

**Ćwiczenie 16**

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego ma długość $4\sqrt{10}$ i tworzy z krawędzią boczną kąt $60^\circ$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

**Ćwiczenie 17**

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny o bokach długości $5\ \mathrm{cm},\ 5\ \mathrm{cm}$ i $6\ \mathrm{cm}$. Przekątna największej ściany bocznej tworzy z krawędzią postawy kąt $45^\circ$. Oblicz pole powierzchni tego graniastosłupa.

**Ćwiczenie 18**

Ściana boczna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest kwadratem o przekątnej długości $8$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

**Ćwiczenie 19**

Suma długości wszystkich krawędzi każdego z dwóch graniastosłupów prawidłowych: trójkątnego oraz czworokątnego jest równa $36\ \mathrm{cm}$. Wszystkie krawędzie mają jednakową długość. Który z tych graniastosłupów ma większe pole powierzchni całkowitej?

**Ćwiczenie 20**

Betonowy blok ma kształt sześcianu o krawędzi długości $50\ \mathrm{cm}$.
W bloku wycięto otwór, tak jak na rysunku. Otwór ma kształt prostopadłościanu o krawędzi długości $10\ \mathrm{cm}$. Oblicz pole powierzchni pozostałej części bloku.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 21**

Dno basenu jest prostokątem o wymiarach $15\ \mathrm{m}$ i $10\ \mathrm{m}$. Basen ma głębokość $3\ \mathrm{m}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej basenu.

**Ćwiczenie 22**

Oceń prawdziwość poniższych zdań.

- [ ] Jeśli wszystkie krawędzie prostopadłościanu zwiększymy dwukrotnie, to jego powierzchnia całkowita zwiększy się czterokrotnie.
- [ ] Pola powierzchni dwóch sześcianów są równe. Wynika z tego, że ich krawędzie też są równe.
- [ ] Jeśli krawędzie jednego graniastosłupa są odpowiednio równe krawędziom drugiego graniastosłupa, to graniastosłupy te mają jednakowe pola powierzchni.

**Ćwiczenie 23**

Oceń prawdziwość poniższego wniosku.

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość $10$. Wysokość graniastosłupa jest równa $0{,}5$. Zatem pole jego powierzchni całkowitej wyraża się liczbą naturalną.

# Jednostki objętości. Objętość graniastosłupa

## Jednostki objętości. Zamiana jednostek

**Przykład 1**

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje krążące jednakowe sześciany, które łączą się w prostopadłościan złożony z dwudziestu czterech sześcianów.

---

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

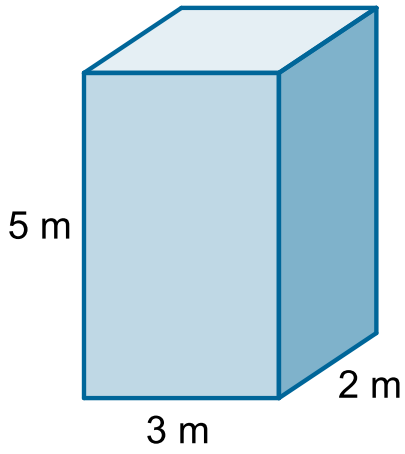
Animacja 3D pokazuje krążące jednakowe sześciany, które łączą się w duże sześciany - jeden złożony z ośmiu sześcianów oraz drugi złożony z dwudziestu siedmiu sześcianów.

---

**Przykład 2**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Multimedialny Park Fontann w Warszawie tworzą dwie fontanny, z których tryska prawie 30 tysięcy litrów wody na minutę.
Dzięki laserom w strumieniach wody oświetlanej kolorowym światłem pojawiają się bajkowe animacje.
Woda tryskająca z fontann w ciągu minuty napełniłaby prostopadłościan o wymiarach $3\ \mathrm{m}$ i $2\ \mathrm{m}$ i $5\ \mathrm{m}$.
W jaki sposób można to obliczyć?




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jeden litr to 1 decymetr sześcienny, więc $30\ 000\ \mathrm{l} = 30\ 000\ \mathrm{d}m^3$.
Zamieniamy teraz $dm^3$ na $m^3$

$$1\ \mathrm{dm} = 0{,}1\ \mathrm{m},$$

stąd

$$(1\ \mathrm{dm})^3 = (0{,}1\ \mathrm{m})^3 = 0{,}001\ m^3 \text{ czyli} 30\ 000\ \mathrm{d}m^3 = 30\ 000 \cdot 0{,}001\ m^3 = 30\ m$$

Obliczamy objętość prostopadłościanu.

$$V = 3\ \mathrm{m} \cdot 2\ \mathrm{m} \cdot 5\ \mathrm{m} = 30\ m^3$$

Najczęściej stosowane jednostki objętości to $km^3$, $m^3$, $\mathrm{d}m^3$, $cm^3$ i $mm^3$.
W wielu przypadkach zachodzi konieczność zamiany jednostek objętości. Korzystamy

wtedy z zależności między jednostkami długości.

**Przykład 3**

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 4**

- $1\ \mathrm{km}^3 = 1\ \mathrm{km} \cdot 1\ \mathrm{km} \cdot 1\ \mathrm{km} = 1000\ \mathrm{m} \cdot 1000\ \mathrm{m} \cdot 1000\ \mathrm{m} = \left(10^3 \cdot 10^3 \cdot 1\right.$
- $1\ m^3 = 1\mathrm{m} \cdot 1\mathrm{m} \cdot 1\mathrm{m} = 10\ \mathrm{dm} \cdot 10\ \mathrm{dm} \cdot 10\ \mathrm{dm} = 1000\ \mathrm{d}m^3 = 10^3\ \mathrm{d}n$
- $1\ \mathrm{d}m^3 = 1\ \mathrm{dm} \cdot 1\ \mathrm{dm} \cdot 1\ \mathrm{dm} = 10\ \mathrm{cm} \cdot 10\ \mathrm{cm} \cdot 10\ \mathrm{cm} = 1000\ cm^3 = 10$
- $1\ cm^3 = 1\ \mathrm{cm} \cdot 1\ \mathrm{cm} \cdot 1\ \mathrm{cm} = 10\ \mathrm{mm} \cdot 10\ \mathrm{mm} \cdot 10\ \mathrm{mm} = 1000\ \mathrm{m}m^3 =$
- $1\ m^3 = 10^3\ dm^3 = (10\ \mathrm{dm})^3 = \left(10 \cdot 10\,\mathrm{cm}\right)^3 = 10^6\ cm^3$

**Przykład 5**

- $600\ cm^3 = 600 \cdot 0{,}000001\ m^3 = 0{,}006\ m^3$
- $5\ cm^3 = 5 \cdot 0{,}001\ \mathrm{d}m^3 = 0{,}005\ \mathrm{d}m^3$

Ilość ciał sypkich lub płynów określa się w jednostkach pojemności: mililitr, litr, hektolitr.

**Przykład 6**

- $1\ \mathrm{l} = 1\ \mathrm{d}m^3 = 1\ \mathrm{dm} \cdot 1\ \mathrm{dm} \cdot 1\ \mathrm{dm} = 10\ \mathrm{cm} \cdot 10\ \mathrm{cm} \cdot 10\ \mathrm{cm} = 1000\ cn$
- $1\ \mathrm{ml} = 1\ cm^3 = 0{,}001\ \mathrm{l}$

- $1\ \mathrm{hl} = 100\ \mathrm{l}$
- $75{,}8\ \mathrm{l} = 75,\ 8 \bullet 1\ \mathrm{l} = 75{,}8 \cdot 0{,}01\ \mathrm{hl} = 0{,}758\ \mathrm{hl}$
- $2,3\ \mathrm{hl} = 2,3 \cdot 1\ \mathrm{hl} = 2,3 \cdot 100\ l = 230\ l$

Tabela. Dane

| Jednostki objętości | Jednostki pojemności |
|---|---|
| $1\ \mathrm{m}m^3$ | |
| $1\ \mathrm{c}m^3 = 1000\ \mathrm{m}m^3$ | $1\ \mathrm{ml}$ |
| $1\ \mathrm{d}m^3 = 1000\ \mathrm{c}m^3$ | $1\ \mathrm{l} = 1\ \mathrm{d}m^3$ |
| $1\ m^3 = 1000\ \mathrm{d}m^3$ | $1\ \mathrm{hl} = 100\ \mathrm{l}$ |
| $1\ \mathrm{k}m^3 = 1\ 000\ 000\ 000\ m^3$ | $1\ \mathrm{l} = 0{,}01\ \mathrm{hl}$ |
| $1\ \mathrm{c}m^3 = 0\ 001\ m^3$ | $1\ \mathrm{ml} = 0{,}001\ \mathrm{l}$ |
| $1\ \mathrm{d}m^3 = 0{,}000001\ m^3$ | $1\ m^3 = 1000\ \mathrm{d}m^3 = 1000\ \mathrm{l}$ |
| $1\ m^3 = 0{,}000\ 000\ 001\ \mathrm{k}m^3$ | |

# Objętość graniastosłupa

**Ważne!**

Objętość graniastosłupa jest równa iloczynowi pola jego podstawy przez wysokość.

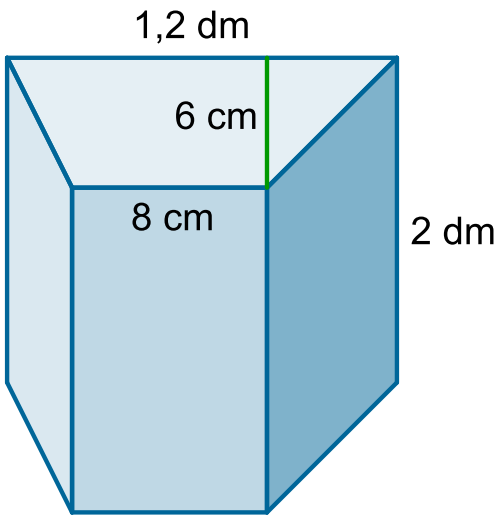
$$V = P_p \cdot H$$

- $V$ – objętość
- $P_p$ - pole podstawy
- $H$- wysokość graniastosłupa

Obliczając objętość graniastosłupa, należy pamiętać, aby wszystkie jego wymiary wyrażone były w tej samej jednostce.

**Przykład 7**

Podstawą graniastosłupa jest trapez o wysokości 6 cm, a podstawy mają długości 1,2 dm i 8 cm.
Wysokość graniastosłupa jest równa 2 dm.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zapisujemy wymiary podstawy i wysokość graniastosłupa w centymetrach.

$$1{,}2 \text{ dm} = 12 \text{ cm}$$

$$2 \text{ dm} = 20 \text{ cm}$$

Obliczamy pole podstawy graniastosłupa – pole trapezu.

$$P_p = \frac{1}{2}(12 + 8) \cdot 6$$

$$P_p = 60 \text{ } cm^2$$

Obliczamy objętość graniastosłupa.

$$V = P_p \cdot H$$

$$V = 60 \cdot 20$$

$$V = 1200\ \mathrm{c}m^3$$

Odpowiedź:
Objętość graniastosłupa jest równa $1200\ \mathrm{c}m^3$.

**Przykład 8**

W krajach anglosaskich jedną z miar pojemności jest galon. Galon amerykański to około $3800\ \mathrm{c}m^3$.
Pojemność baku samochodu Bogdana wynosi $72{,}2\ \mathrm{l}$. Ile kanistrów paliwa o pojemności $1$ galona trzeba by nalać do baku tego samochodu, aby go napełnić?
Zapisujemy pojemność baku w $\mathrm{cm}^3$.

$$72{,}2\ \mathrm{l} \ = \ 72{,}2\ \mathrm{d}m^3 \ = \ 72\ 200\ \mathrm{c}m^3$$

Obliczamy, ile potrzeba kanistrów paliwa, by wypełnić bak.

$$72\ 200\ : 3800 = 19$$

Odpowiedź:
Potrzeba $19$ kanistrów paliwa.

**Ciekawostka**

W światowym przemyśle naftowym jednostką objętości jest baryłka.
$1$ baryłka $= 42$ galony$\approx\ 160\ \mathrm{l}$
W Europie jednak ilość ropy wyraża się w tonach. Z jednej baryłki ropy otrzymuje się około $20$ galonów benzyny.

## Ćwiczenie 1

Uzupełnij.

a) $5,79\ \mathrm{dm}^3 =$ _____ $\mathrm{cm}^3$

b) $98\ \mathrm{mm}^3 =$ _____ $\mathrm{cm}^3$

c) $2\ \mathrm{m}^3 =$ _____ $\mathrm{cm}^3$

d) $0,00045\ \mathrm{km}^3 =$ _____ $\mathrm{m}^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 2

4,5 l to

- ○ 0,45 hl
- ○ 0,0045 $m^3$
- ○ 45 d$m^3$
- ○ 450 m$m^3$

## Ćwiczenie 3

Uzupełnij.

a) $22\ \mathrm{dm}^3 =$ _____ l

b) $7800\ \mathrm{mm}^3 =$ _____ l

c) $658\ \mathrm{ml} =$ _____ l

d) $3,34\ \mathrm{hl} =$ _____ l

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 4

Uzupełnij.

Litr soku waży $1,04\ \mathrm{kg}$. Zatem $0,4\ \mathrm{dm}^3$ soku waży _____ $\mathrm{kg}$, $65\ \mathrm{dm}^3$ soku waży _____ $\mathrm{kg}$, natomiast $5600\ \mathrm{cm}^3$ soku waży _____ $\mathrm{kg}$.

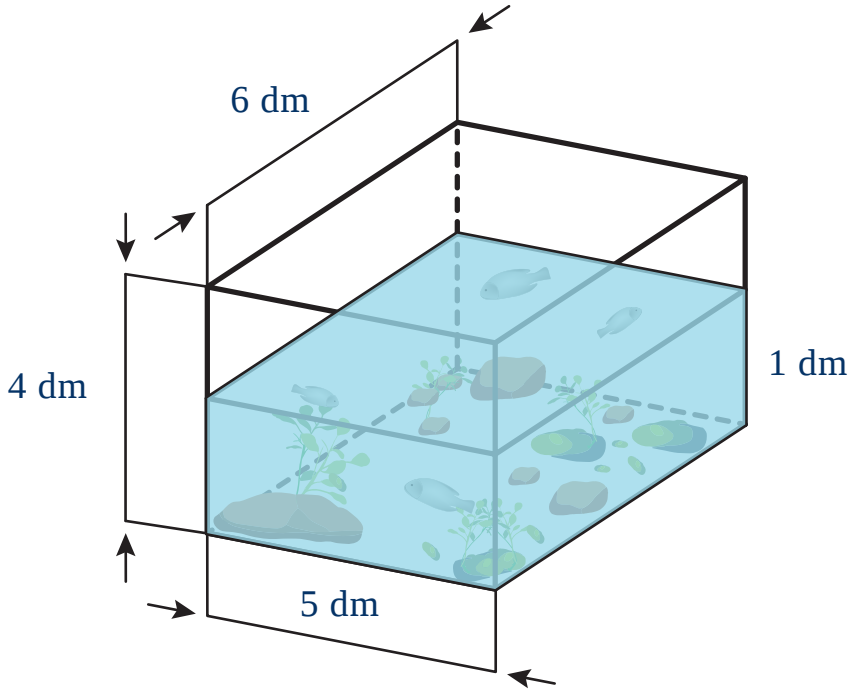
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 5

Metr sześcienny betonu waży około $2500\ \mathrm{kg}$. Ile waży beton zawarty w prostopadłościennej taczce o wymiarach $80\ \mathrm{cm}$ i $60$ i $20\ \mathrm{cm}$?

## Ćwiczenie 6

Do akwarium wrzucono dwie sześcienne kostki o objętości $0{,}5\ \mathrm{l}$ każda. O ile centymetrów podniesie się poziom wody ?




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 7**

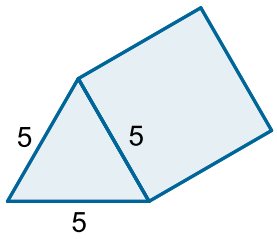
Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego są równe i mają długość $4\ \mathrm{cm}$. Oblicz objętość takiego graniastosłupa, jeśli jego podstawa jest

1. trójkątem
2. czworokątem
3. sześciokątem

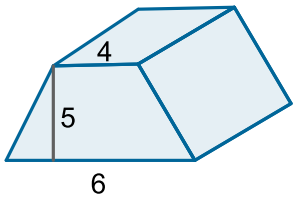
**Ćwiczenie 8**

Wysokość każdego z graniastosłupów prostych jest równa $10$. Oblicz ich objętości.

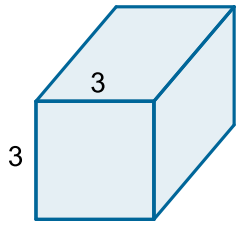
**a)**




**b)**




**c)**




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 9**

W graniastosłupie prostym krawędź boczna ma długość $6$. Oblicz objętość graniastosłupa, wiedząc, że jego podstawą jest

1. trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej długości $2$
2. równoległobok, w którym wysokość jest równa $2$, a podstawa $3$
3. trapez prostokątny o wysokości $7$ oraz podstawach długości $6$ i $8$
4. romb o przekątnych długości $4$ i $8$

**Ćwiczenie 10**

Objętość graniastosłupa jest równa $120$. Oblicz sumę długości jego krawędzi bocznych, wiedząc, że jego podstawą jest

1. kwadrat o obwodzie $20$
2. trapez równoramienny, którego krótsza podstawa ma długość $6$, kąt ostry $45^\circ$, a ramię ma długość $3\sqrt{2}$
3. prostokąt o bokach długości $4$ i $5$
4. sześciokąt foremny o boku długości $1$

**Ćwiczenie 11**

Jak zmieni się objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, gdy

1. jego wysokość zwiększy się dwukrotnie
2. długość krawędzi jego podstawy zwiększy się dwukrotnie
3. jego wysokość zwiększy się dwukrotnie, a długość krawędzi zmniejszy się dwukrotnie

**Ćwiczenie 12**

Objętość pudełka w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $90\sqrt{3}\ cm^3$. Wysokość ściany bocznej jest równa $10\ \mathrm{cm}$. Oblicz sumę długości jego krawędzi.

**Ćwiczenie 13**

Ile litrów wody zmieści się w pudle o wymiarach $120\ \mathrm{cm},\ 80\ \mathrm{cm},\ 30\ \mathrm{cm}$ i wysokości równej $40\ \mathrm{cm}$?

**Ćwiczenie 14**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 15**

Objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa $24\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$. Wysokość graniastosłupa ma długość $6\ \mathrm{cm}$. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

**Ćwiczenie 16**

Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi $64\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$. Oblicz wysokość graniastosłupa, wiedząc, że jest ona czterokrotnie dłuższa od krawędzi podstawy.

**Ćwiczenie 17**

Podstawą graniastosłupa jest romb. Stosunek długości przekątnych podstawy i wysokości graniastosłupa jest równy $1 : 3 : 4$. Objętość graniastosłupa jest równa $384\ \mathrm{cm}^3$. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

**Ćwiczenie 18**

Suma długości wszystkich krawędzi każdego z trzech graniastosłupów prawidłowych: trójkątnego, czworokątnego oraz sześciokątnego jest równa $36\ \mathrm{cm}$. Wszystkie krawędzie w każdym z graniastosłupów mają jednakową długość. Oblicz objętość każdego z graniastosłupów.

**Ćwiczenie 19**

Pole podstawy graniastosłupa jest równe $36\ \mathrm{cm}^2$. Wysokość tego graniastosłupa jest równa $6\ \mathrm{cm}$. O ile procent należy zmniejszyć wysokość tego graniastosłupa, aby jego objętość zmniejszyła się o $10\%$?

**Ćwiczenie 20**

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $5\ \mathrm{cm}$. Jego dłuższa przekątna nachylona jest do podstawy pod kątem $45^\circ$. Oblicz jego objętość.

**Ćwiczenie 21**

Podstawą graniastosłupa prostego jest deltoid o polu $100\ \mathrm{cm}^2$. Jedna przekątna deltoidu jest dwa razy dłuższa od drugiej. Wysokość graniastosłupa stanowi $20\%$ sumy długości przekątnych deltoidu. Oblicz objętość graniastosłupa.

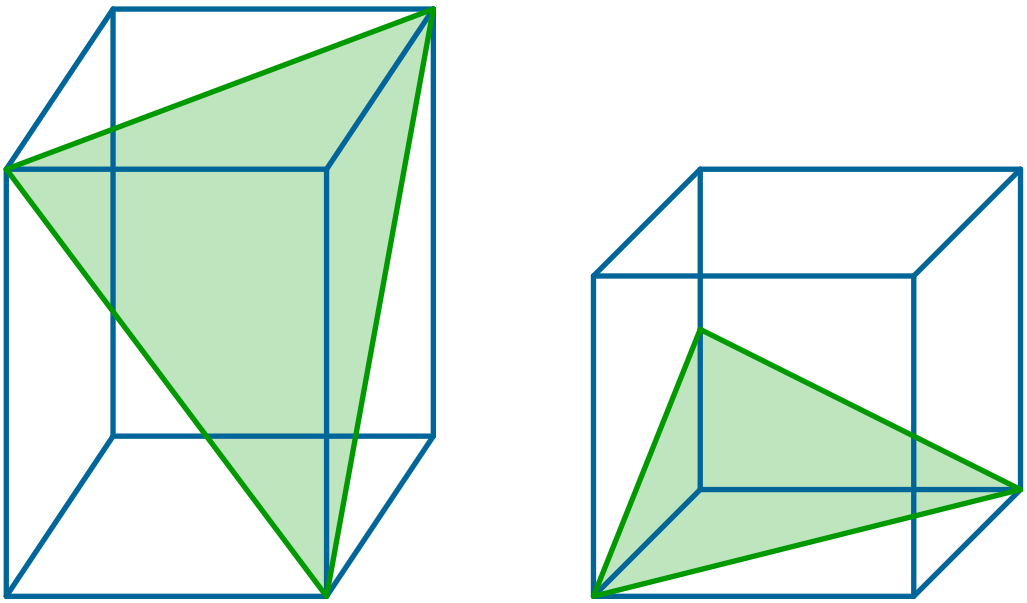
**Ćwiczenie 22**

Podstawą graniastosłupa pochyłego jest kwadrat o boku $5$. Wszystkie krawędzie boczne mają długość $10$ i są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem $45^\circ$ Oblicz objętość graniastosłupa.

# Ostrosłup – opis bryły

## Ostrosłup – budowa

**Przykład 1**



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Prostopadłościany rozcięto, tak jak na rysunku.

- Ile ścian ma każda z brył zaznaczonych na niebiesko?
- W jakim kształcie są jej ściany boczne?
- Jak się nazywają takie bryły?

**Przykład 2**

Zmieniaj położenie suwaka i obserwuj, jakie bryły powstają.

- Jaki kształt ma podstawa pomarańczowej bryły?
- Jaki kształt mają jej ściany boczne? Jak nazywa się ta bryła?

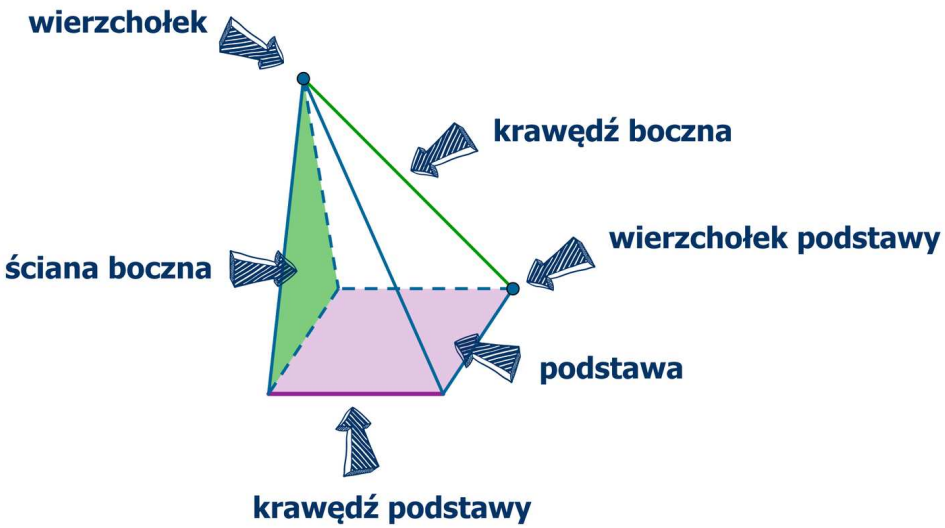
Zasób interaktywny dostępny pod adresem
https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Bryły zaznaczone kolorem niebieskim na rysunku to ostrosłupy. Ostrosłupy znane były już w starożytności w ich kształcie są np. egipskie grobowce faraonów.

**Ważne!**

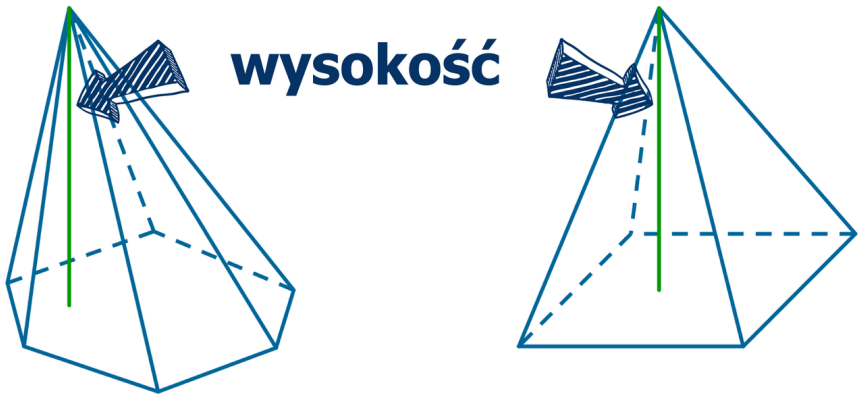
Ostrosłup ma podstawę w kształcie wielokąta. Ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku nazywanym wierzchołkiem ostrosłupa.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 3**

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z płaszczyzną podstawy i prostopadły do tej podstawy.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 4**

Sprawdź, z jakich elementów składa się ostrosłup.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Przykład 5

Zmieniając położenie wierzchołka ostrosłupa, można otrzymać trójkąt. Jakim elementem tego trójkąta jest wysokość ostrosłupa? Gdzie znajduje się spodek tej wysokości?




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Przykład 6

Gdzie znajduje się spodek wysokości ostrosłupa czworokątnego prostokątnego? Jaki kąt tworzy wysokość z podstawą? Jakim rodzajem trójkąta jest trójkąt utworzony przez wysokość ostrosłupa, krawędź boczną i połowę przekątnej podstawy?

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

# Rodzaje ostrosłupów

Ostrosłup, w zależności od wielokąta będącego jego podstawą, nazywamy ostrosłupem trójkątnym, sześciokątnym, czworokątnym itp.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 7**

Przykład ostrosłupa pięciokątnego.

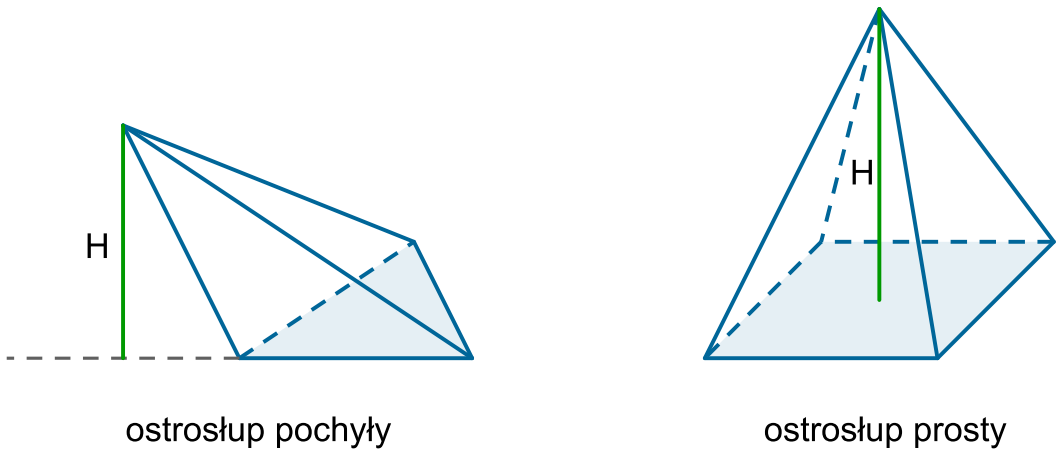



Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Definicja: Ostrosłup prosty, ostrosłup pochyły**

Ostrosłup nazywamy prostym, gdy jego wszystkie krawędzie boczne są równe. W przeciwnym razie – ostrosłup nazywamy pochyłym. Ściany boczne ostrosłupa prostego są trójkątami równoramiennymi.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 8**

Określ rodzaj ostrosłupa przedstawionego na rysunku. Określ położenie wysokości ostrosłupa.

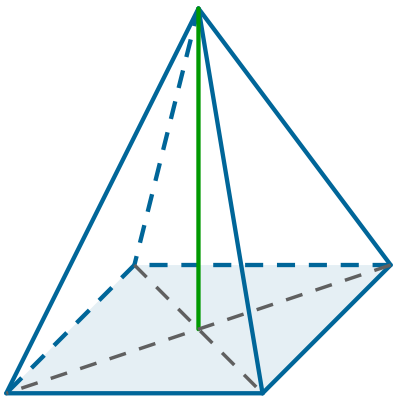



Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

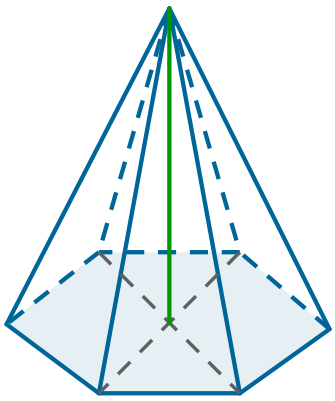
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Definicja: Ostrosłup prawidłowy**

Ostrosłup prosty nazywamy prawidłowym, gdy jego podstawą jest wielokąt foremny.
Ściany boczne takiego ostrosłupa są przystającymi trójkątami równoramiennymi.



ostrosłup prawidłowy czworokątny



ostrosłup prawidłowy sześciokątny

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 9**

Czy ostrosłup ABCDEW jest ostrosłupem prostym? A prawidłowym?




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Definicja: Czworościan**

Czworościan to ostrosłup trójkątny. Czworościan ma 4 wierzchołki i 6 krawędzi. Jeżeli wszystkie ściany czworościanu są trójkątami równobocznymi, to czworościan nazywamy czworościanem foremnym.

**Ważne!**

**Spodek wysokości ostrosłupa prawidłowego** jest środkiem okręgu opisanego na wielokącie, będącym podstawą ostrosłupa.

**Zapamiętaj!**

Dwa jednakowe ostrosłupy prawidłowe foremne tworzą ośmiościan foremny.

**Przykład 10**

Zmień położenie wierzchołka czworościanu, tak aby uzyskać ostrosłup zbliżony kształtem do czworościanu foremnego.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Przykład 11**

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w punkcie oddalonym od krawędzi podstawy o $a = 3$ cm. Oblicz promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.
Spodek wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego znajduje się na przecięciu przekątnych podstawy – na rysunku w punkcie $O$. Wynika z tego, że długość krawędzi podstawy jest równa

$$2a = 2 \cdot 3 \text{ cm } = \text{ 6 cm}$$

Promień $r$ okręgu opisanego na kwadracie, będącym podstawą ostrosłupa, jest równy połowie przekątnej $d$ tego kwadratu. Natomiast przekątna kwadratu o boku długości 6 cm jest równa
$6\sqrt{2}$ cm.

$$r = \frac{1}{2}\mathrm{d}$$

$$\mathrm{r} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$r = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

Odpowiedź:
Promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa jest równy $3\sqrt{2}$ cm.

# Rysowanie ostrosłupów

Rysowanie ostrosłupa rozpoczynamy zwykle od naszkicowania podstawy. Następnie obieramy punkt, który będzie wierzchołkiem ostrosłupa i łączymy ten punkt z wierzchołkami podstawy.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

**Przykład 12**

Sprawdź, w jaki sposób można narysować ostrosłup prosty.




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Chcąc narysować ostrosłup prosty, po narysowaniu podstawy, zaznaczamy wysokość – odcinek prostopadły do płaszczyzny podstawy. Koniec wysokości, który nie leży na podstawie, łączymy z wierzchołkami podstawy.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Przykład 13**

W przypadku ostrosłupów prawidłowych, po narysowaniu podstawy, zaznaczamy spodek wysokości, który jest środkiem okręgu opisanego na podstawie, a następnie rysujemy wysokość i krawędzie boczne.
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym spodek wysokości leży na przecięciu wysokości podstawy.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja

---

**Ćwiczenie 1**

Określ, gdzie leży spodek wysokości w ostrosłupie prawidłowym

1. czworokątnym
2. sześciokątnym
3. ośmiokątnym

**Ćwiczenie 2**

Na rysunku zaznaczony jest kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do podstawy. Jakie elementy wyznaczają ten kąt?




Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 3

Na rysunku zaznaczony jest kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do podstawy. Jakie elementy wyznaczają ten kąt?

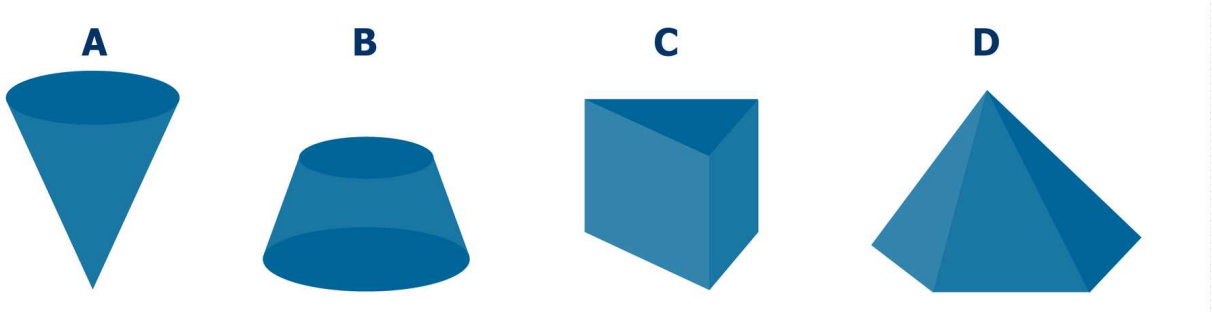



Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

## Ćwiczenie 4

Która z figur przedstawiona na rysunku to ostrosłup?




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Rysunek D
- Rysunek C
- Rysunek A
- Rysunek B

### Ćwiczenie 5

Ostrosłup ma $126$ krawędzi. Ile ma wszystkich wierzchołków?

- ◯ $64$
- ◯ $127$
- ◯ $62$
- ◯ $63$

### Ćwiczenie 6

Ostrosłup ma $79$ wszystkich wierzchołków. Ile ma wszystkich ścian?

- ◯ $80$
- ◯ $156$
- ◯ $78$
- ◯ $79$

### Ćwiczenie 7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

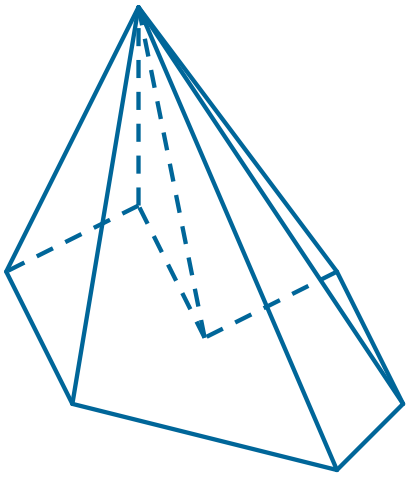
**Ćwiczenie 8**

Ostrosłup ma $n$ ($n$- liczba naturalna dodatnia) ścian bocznych. Ile ma wszystkich krawędzi?

- $n+1$
- $2n$
- $2n+1$
- $n-1$

**Ćwiczenie 9**

Na rysunku przedstawiony jest ostrosłup

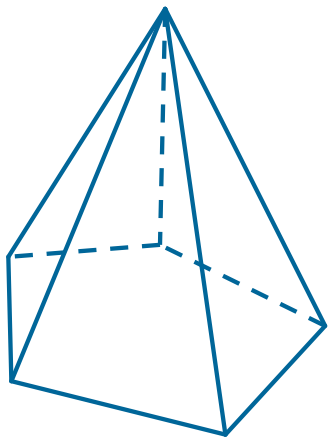


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- czworokątny
- siedmiokątny
- trójkątny
- sześciokątny

**Ćwiczenie 10**

Ostrosłup na rysunku ma



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- 6 ścian bocznych
- 6 wszystkich ścian
- 10 wszystkich krawędzi
- 7 wierzchołków podstawy

**Ćwiczenie 11**

Suma długości wszystkich krawędzi czworościanu jest równa $12$. Pole powierzchni jednej ściany bocznej jest równe

- $2\sqrt{3}$
- $6\sqrt{3}$
- $6$
- $\sqrt{3}$

**Ćwiczenie 12**

Ściana boczna każdego ostrosłupa prawidłowego jest trójkątem

- równoramiennym
- rozwartokątnym
- równobocznym
- prostokątnym

**Ćwiczenie 13**

Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkąt

- rozwartokątny
- prostokątny
- równoboczny
- różnoboczny

## Ćwiczenie 14

Rozstrzygnij, czy zdanie jest fałszywe, czy prawdziwe.

- [ ] Wysokość ostrosłupa jest zawsze większa od długości krawędzi podstawy.
- [ ] Spodek wysokości ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego znajduje się na przecięciu krótszych przekątnych podstawy.
- [ ] Spodek wysokości ostrosłupa prostego należy zawsze do podstawy ostrosłupa.

## Ćwiczenie 15

Rozstrzygnij, czy zdanie jest fałszywe, czy prawdziwe.

- [ ] Czworościan ma tyle wierzchołków, ile ma ścian.
- [ ] Czworościan ma $4$ wierzchołki.
- [ ] Każda ściana czworościanu może być jego podstawą.
- [ ] Ściana boczna czworościanu jest zawsze trójkątem równobocznym.

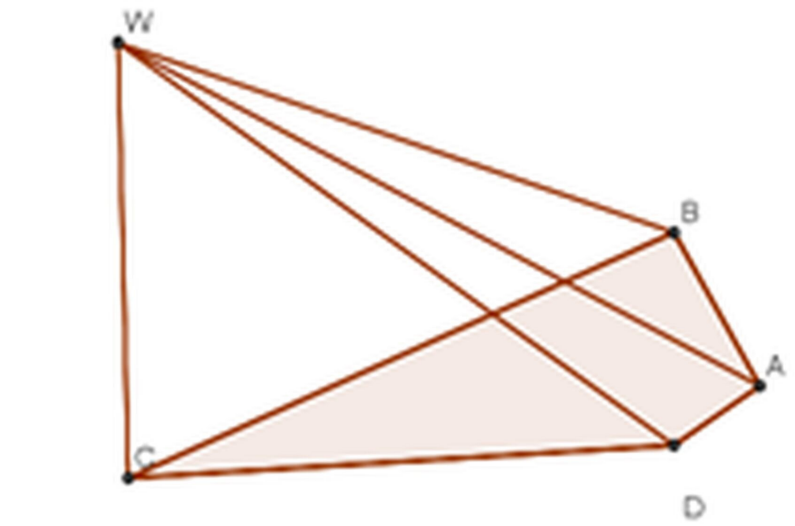



Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DPGv99wos

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

**Ćwiczenie 16**

Wysokością ostrosłupa $ABCDW$ jest krawędź




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- $AW$
- $DW$
- $BC$
- $CW$

**Ćwiczenie 17**

Naszkicuj ostrosłup.

1. pięciokątny
2. prawidłowy czworokątny
3. siedmiokątny

**Ćwiczenie 18**

Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równa $60$. Krawędź boczna ma długość 6.
Oblicz długość krawędzi podstawy, wiedząc, że jest to ostrosłup prawidłowy

1. trójkątny
2. czworokątny
3. pięciokątny
4. ośmiokątny

**Ćwiczenie 19**

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 20**

Suma długości odcinków, z których zbudowano szkielet ostrosłupa prawidłowego, wynosi $120\ \mathrm{cm}$.Określ, jaką długość ma krawędź boczna tego ostrosłupa, jeśli podstawa jest

1. kwadratem o boku długości $6\ \mathrm{cm}$
2. sześciokątem o boku długości $8\ \mathrm{cm}$
3. trójkątem o boku długości $12\ \mathrm{cm}$

**Ćwiczenie 21**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest fałszywe, czy prawdziwe.

- [ ] W ostrosłupie prawidłowym ściany boczne są do siebie przystające.
- [ ] Czworościan foremny jest ostrosłupem prawidłowym trójkątnym.
- [ ] W czworościanie foremnym wszystkie krawędzie mają jednakową długość.

**Ćwiczenie 22**

Rozstrzygnij, czy zdanie jest fałszywe, czy prawdziwe.

- [ ] Spodek wysokości ostrosłupa leży na przecięciu symetralnych boków podstawy.
- [ ] W ostrosłupie wszystkie krawędzie mają wspólny punkt.
- [ ] Wszystkie ściany boczne ostrosłupa są trójkątami.
- [ ] Spodek wysokości ostrosłupa leży na jego podstawie.
- [ ] W ostrosłupie liczba wszystkich krawędzi jest parzysta.
- [ ] W ostrosłupie liczba wszystkich ścian jest nieparzysta.

**Ćwiczenie 23**

Czy istnieje ostrosłup, który ma $37$ wierzchołków? Uzasadnij odpowiedź.

**Ćwiczenie 24**

Czy istnieje ostrosłup, który ma $37$ krawędzi? Uzasadnij odpowiedź.

**Ćwiczenie 25**

1. Czy można zbudować ostrosłup prawidłowy, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, a nie jest on czworościanem foremnym?
2. Czy można zbudować ostrosłup prawidłowy, którego wszystkie krawędzie mają jednakową długość, a nie jest on czworościanem foremnym?
3. Czy można zbudować ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat, a nie jest on ostrosłupem prawidłowym?

**Ćwiczenie 26**

Określ liczbę krawędzi oraz liczbę wierzchołków ośmiościanu foremnego.

# Pole powierzchni ostrosłupa

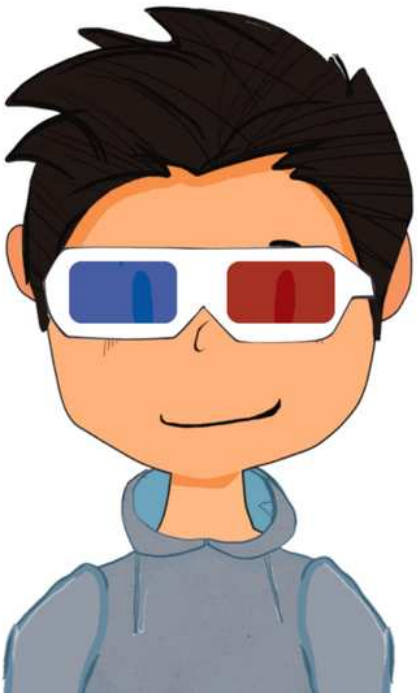
## Siatka ostrosłupa

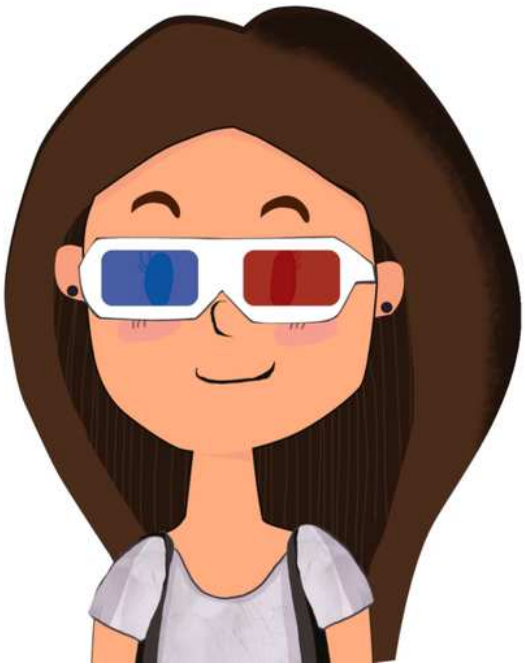
**Przykład 1**

Jeżeli chcemy zbudować pudełko, takie jak na rysunku, najpierw należy przygotować jego siatkę.
Łatwo wtedy obliczyć, ile $cm^2$ kartonu potrzeba, aby wykonać pudełko.

**Przykład 2**

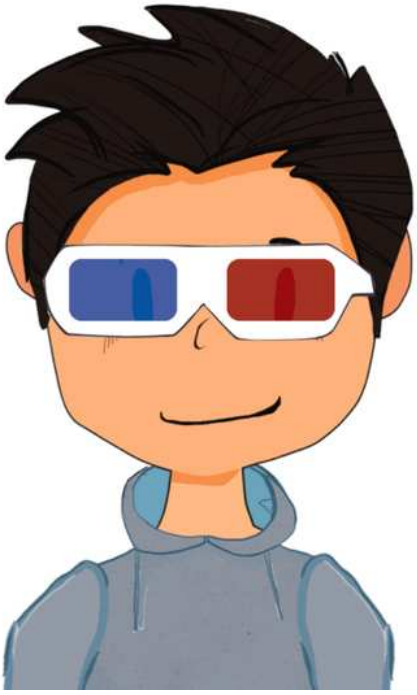
Rozcinając kartonowy model ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i rozprostowując go na płaszczyźnie, tworzymy jego siatkę.

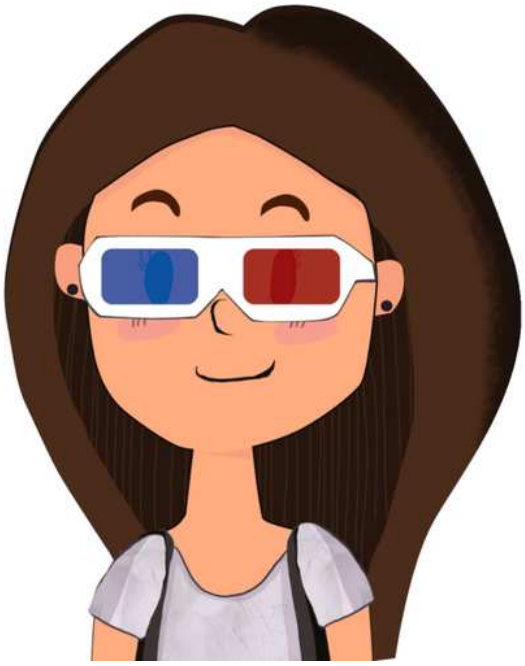




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje drewniane klocki w kształcie brył. Kreślone są krawędzie jednego klocka – powstaje ostrosłup. Następnie dwa jednakowe ostrosłupy rozkładają się na dwie różne siatki ostrosłupa.





Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja 3D pokazuje dwie siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, które składają się w jednakowe ostrosłupy. Ostrosłup zamienia się w drewniany klocek leżący między innymi klockami.

---

**Przykład 3**

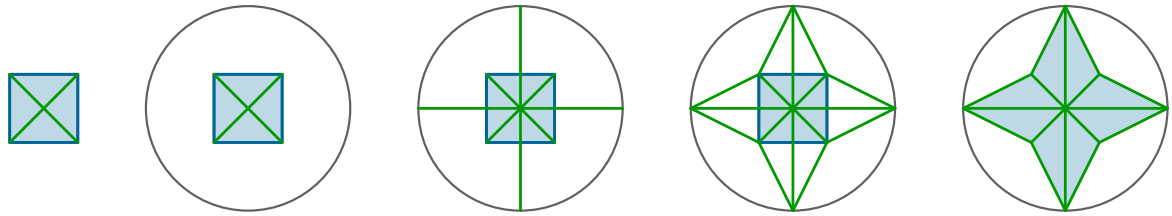
Zaproponuj, jak na podstawie siatki ostrosłupa określić, czy jest to ostrosłup prawidłowy.

**Przykład 4**

W kształcie jakich trójkątów są ściany boczne ostrosłupa?
Jak położone są względem podstawy ściany boczne?

**Przykład 5**

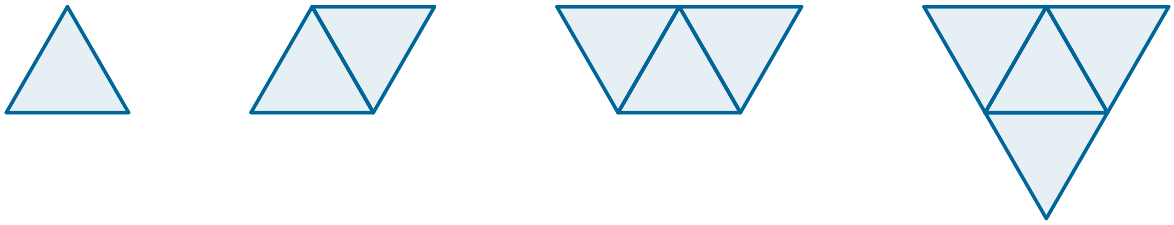
Objaśnij na podstawie rysunku, jak narysować siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.
Z jakich figur składa się ta siatka?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 6**

Objaśnij na podstawie rysunku, jak narysować siatkę czworościanu foremnego. Z ilu elementów składa się ta siatka? Jakie mają one wymiary? Co zauważasz?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

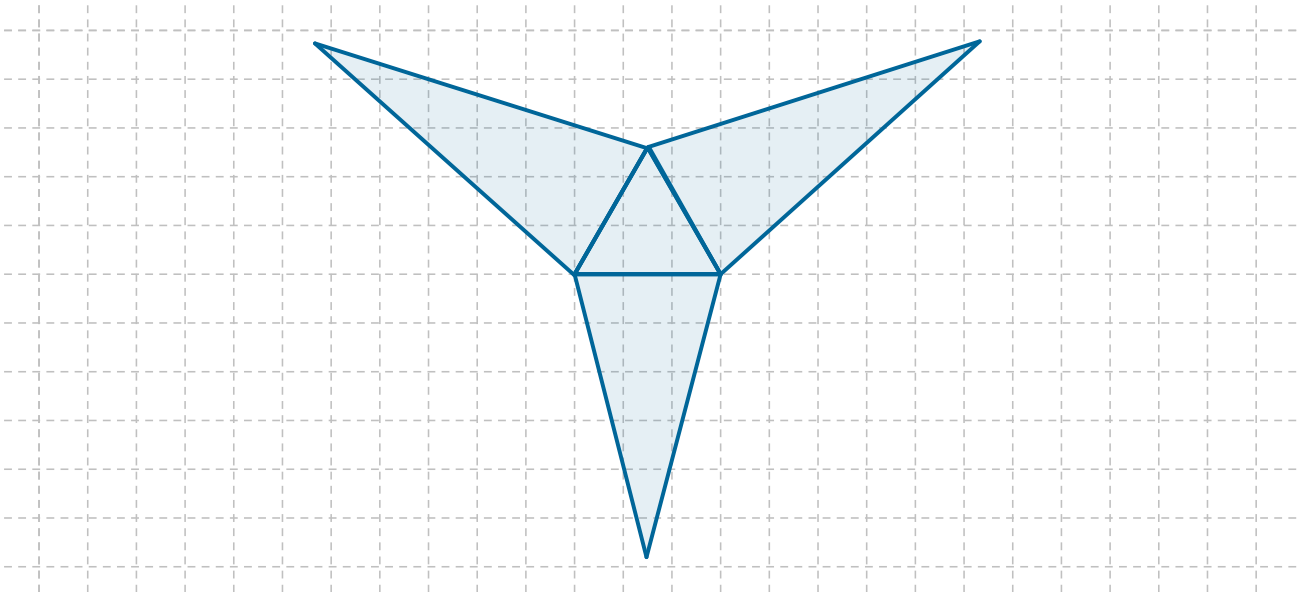
Siatka ostrosłupa składa się z wielokąta będącego podstawą ostrosłupa i trójkątów – ścian bocznych.

# Pole powierzchni ostrosłupa

**Przykład 7**

Rysunek przedstawia siatkę, z której można skleić model ostrosłupa prawidłowego.
Wykonaj odpowiednie pomiary i określ długość boku podstawy i wysokość ściany

bocznej.
Oblicz pole podstawy i pole ściany bocznej.
Czy potrafisz obliczyć pole powierzchni całkowitej ostrosłupa? Jeśli tak – oblicz je.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

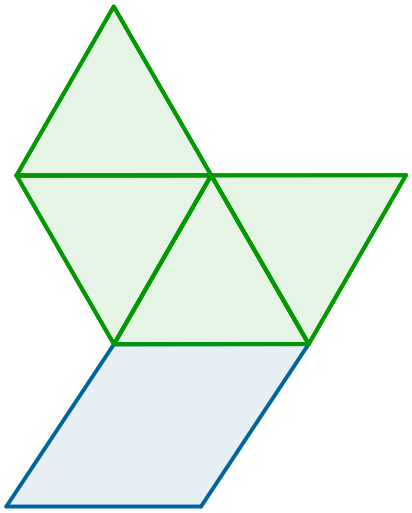
Mając siatkę ostrosłupa, można obliczyć jego pole powierzchni.

**Ważne!**

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest sumą pola podstawy i sumą pół trójkątów, będących ścianami bocznymi.

$$Pc = Pp + Pb$$

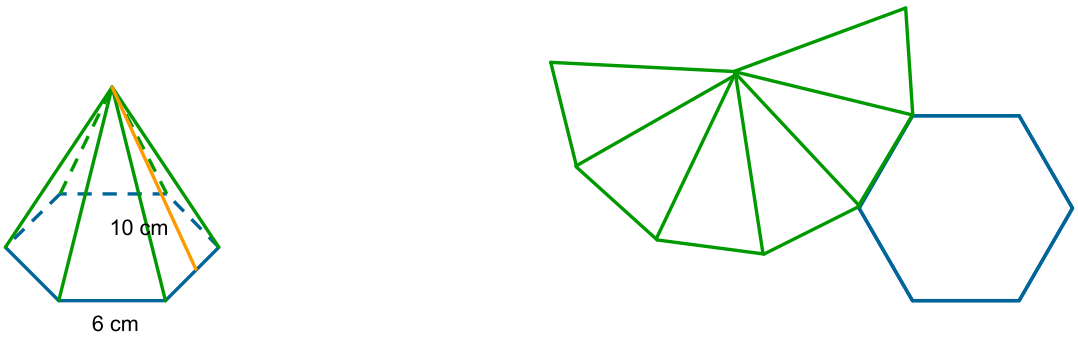
Pc – pole powierzchni całkowitej
Pp – pole podstawy
Pb - pole powierzchni bocznej



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Przykład 8**

Oblicz pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a wysokość ściany bocznej jest równa 10 cm.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Podstawą ostrosłupa jest sześciokąt foremny. Obliczamy jego pole – jako sumę pól sześciu przystających trójkątów równobocznych o boku długości 6 cm.

$$P_p = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2$$

$$P_p = 54\sqrt{3}\ cm^2$$

Każda ze ścian bocznych ostrosłupa jest trójkątem o podstawie długości 6 cm i wysokości 10 cm. Obliczamy pole powierzchni bocznej, czyli sumę pól sześciu przystających trójkątów.

$$P_b = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10$$

$$P_b = 180 \text{ cm}^2$$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej – sumę pola podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

$$P_c = 54\sqrt{3} + 180$$

$$P_c = 18\left(3\sqrt{3} + 10\right) \text{ cm}^2$$

Odpowiedź:

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe $18\left(3\sqrt{3} + 10\right) \text{ cm}^2$.

Zadania

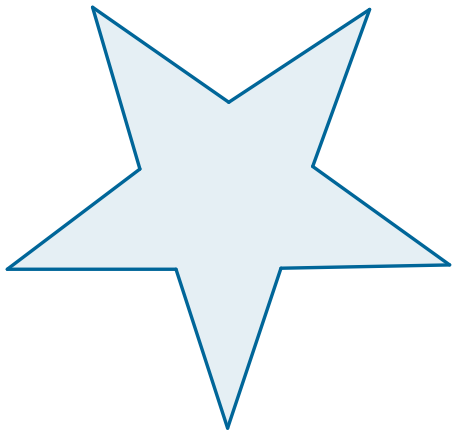
**Ćwiczenie 1**

Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego, wiedząc, że wysokość jego ściany bocznej jest równa $5 \text{ cm}$, a krawędź podstawy ma długość $4 \text{ cm}$ i jest

1. trójkątem
2. czworokątem
3. pięciokątem
4. sześciokątem

**Ćwiczenie 2**

Rysunek przedstawia siatkę, z której sklejono pudełko.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pudełko ma kształt ostrosłupa o podstawie

- pięciokąta
- trapezu
- sześciokąta
- trójkąta

**Ćwiczenie 3**

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat. Wysokością ostrosłupa jest jedna z krawędzi bocznych. Każda ściana boczna tego ostrosłupa jest zatem trójkątem

- prostokątnym
- rozwartokątnym
- równobocznym
- równoramiennym

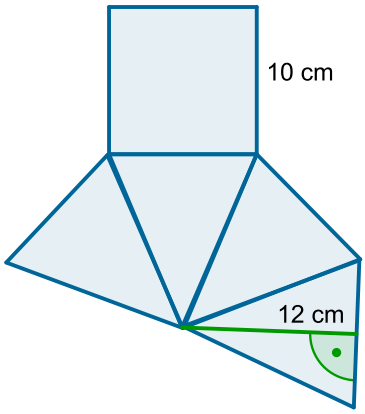
**Ćwiczenie 4**

Pole powierzchni czworościanu foremnego jest równe $4\sqrt{3}$. Suma długości krawędzi tego czworościanu jest równa

- 48
- 24
- $6\sqrt{3}$
- 12

**Ćwiczenie 5**

Oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego, którego siatkę przedstawia rysunek.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Ćwiczenie 6**

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego. Wysokość ściany bocznej jest równa $8\ \mathrm{cm}$, długość krawędzi podstawy jest równa $4\ \mathrm{cm}$. Podstawą jest

1. trójkąt
2. czworokąt
3. sześciokąt

**Ćwiczenie 7**

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe $39\ \mathrm{d}m^2$. Podstawą jest kwadrat o boku $3\ \mathrm{dm}$. Pole powierzchni jednej ściany bocznej jest równe

- $6\ \mathrm{d}m^2$
- $5\ \mathrm{d}m^2$
- $7,\ 5\ \mathrm{d}m^2$
- $12{,}5\ \mathrm{d}m^2$

**Ćwiczenie 8**

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $3$. Krawędź podstawy ma długość $0{,}5$. Oblicz wysokość ściany bocznej.

**Ćwiczenie 9**

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym wysokość ściany bocznej jest równa $10\ \mathrm{cm}$, a pole powierzchni bocznej jest równe $160\ cm^2$.

**Ćwiczenie 10**

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy jest równa $14\ \mathrm{cm}$, a krawędź boczna ma długość $10\ \mathrm{cm}$.

**Ćwiczenie 11**

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym pole podstawy jest równe $36\ \mathrm{cm}^2$, a krawędź boczna ma długość $10\ \mathrm{cm}$.

**Ćwiczenie 12**

Krawędź czworościanu foremnego ma długość $4\ \mathrm{cm}$. Pole powierzchni tego czworościanu jest równe

- $16\ \mathrm{cm}^2$
- $16\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$
- $12\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$
- $12\ \ \mathrm{cm}^2$

**Ćwiczenie 13**

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $8\sqrt{3}$. Kąt między wysokością ostrosłupa i wysokością ściany bocznej ma miarę $60^\circ$. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa.

**Ćwiczenie 14**

Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $20\ \mathrm{cm}$ i jest nachylona do podstawy pod kątem $45^\circ$. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa.

**Ćwiczenie 15**

Podstawą ostrosłupa jest romb. Spodek wysokości ostrosłupa leży na przecięciu przekątnych podstawy. Dłuższa krawędź boczna ma $24\ \mathrm{cm}$ i jest nachylona do podstawy pod kątem $30^\circ$. Kąt nachylenia krótszej krawędzi bocznej do podstawy ma miarę $60^\circ$. Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa.

**Ćwiczenie 16**

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego, czworokątnego ma długość $8\ \mathrm{cm}$. Dwie przeciwległe krawędzie boczne ostrosłupa oraz przekątna podstawy tworzą trójkąt równoramienny. Ramię tego trójkąta ma długość $6\ \mathrm{cm}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

**Ćwiczenie 17**

Ośmiościan foremny to bryła, którą otrzymujemy, sklejając podstawami dwa jednakowe ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których wszystkie krawędzie mają jednakową długość. Oblicz pole powierzchni ośmiościanu foremnego, którego krawędzie mają długość $8\ \mathrm{cm}$.

**Ćwiczenie 18**

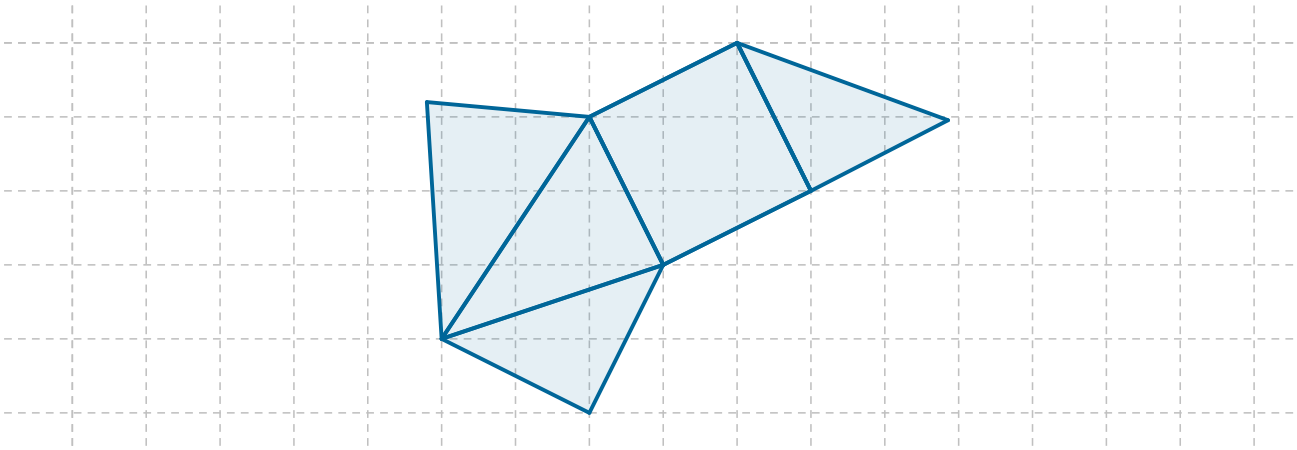
Piramida Cheopsa przypomina kształtem ostrosłup prawidłowy czworokątny. Krawędź jej podstawy ma długość $230\ \mathrm{m}$, a wysokość $146\ \mathrm{m}$. Oblicz pole powierzchni bocznej piramidy.

# Objętość ostrosłupa

## Wzór na objętość ostrosłupa

**Przykład 1**

Rysunek przedstawia siatkę ostrosłupa.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

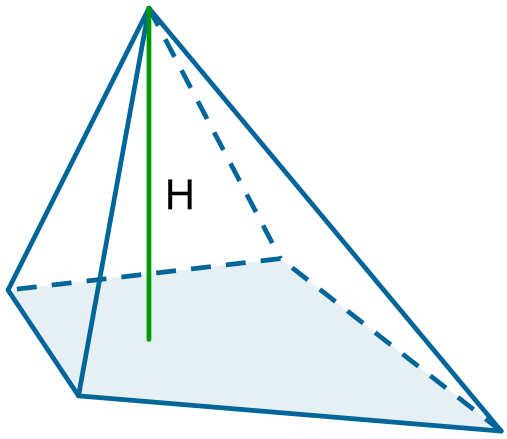
Korzystając z tej siatki, wykonaj modele trzech jednakowych ostrosłupów. Zbuduj z nich sześcian.
Ile razy objętość tego sześcianu jest większa od objętości każdego z ostrosłupów?

**Ważne!**

Objętość ostrosłupa jest równa trzeciej części iloczynu pola podstawy przez wysokość.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

$V$ - objętość
$P_p$ - pole podstawy
$H$ - wysokość

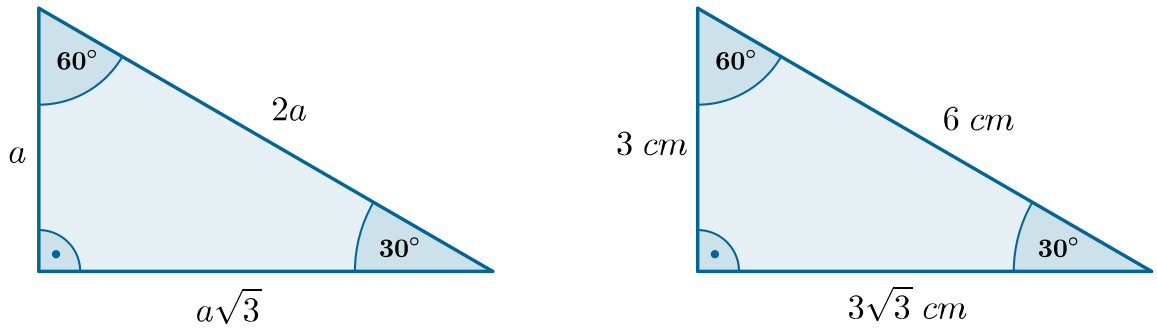



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

# Obliczanie objętości ostrosłupa

**Przykład 2**

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość $6$ cm, a miara jednego z kątów ostrych jest równa $30^\circ$. Wysokość ostrosłupa jest czterokrotnością krótszej przyprostokątnej. Oblicz objętość ostrosłupa.
Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, w którym miara jednego z kątów ostrych jest równa $30^\circ$. O takim trójkącie wiemy, że przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta $30^\circ$ jest dwukrotnie krótsza od przeciwprostokątnej, a druga przyprostokątna jest $\sqrt{3}$ razy od niej większa.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem przyprostokątne trójkąta, będącego podstawą ostrosłupa, są równe $3$ cm i $3\sqrt{3}$ cm. Obliczamy pole podstawy ostrosłupa.

$$P_p = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3}$$

$$P_p = 4{,}5\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$$

Wysokość ostrosłupa jest równa czterokrotności krótszej przyprostokątnej, ma zatem długość

$$4 \cdot 3\ \mathrm{cm} = 12\ \mathrm{cm}.$$

Obliczamy objętość ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4{,}5\sqrt{3} \cdot 12$$

$$V = 18\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$$

Odpowiedź:
Objętość ostrosłupa jest równa $18\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$.

Znając objętość ostrosłupa i pole jego podstawy, można obliczyć jego wysokość.

**Przykład 3**

Wazon ma kształt ostrosłupa, którego podstawą jest prostokąt o polu $150\ \mathrm{cm}^2$. W wazonie mieści się litr wody. Jaką wysokość ma ten wazon?
Zapisujemy pojemność wazonu w $\mathrm{cm}^3$.

$$1\ \mathrm{l} \ = \ 1\ \mathrm{d}m^3 \ = \ 1000\ \mathrm{cm}^3$$

Korzystamy ze wzoru na objętość ostrosłupa i obliczamy jego wysokość.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

$$1000 = \frac{1}{3} \cdot 150 \cdot H$$

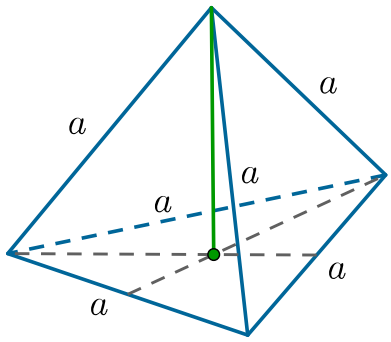
$$H = \frac{3000}{150}$$

$$H = 20\ \mathrm{cm}$$

Odpowiedź:
Wysokość wazonu ma 20 cm.

# Objętość czworościanu foremnego

Obliczymy objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości a.

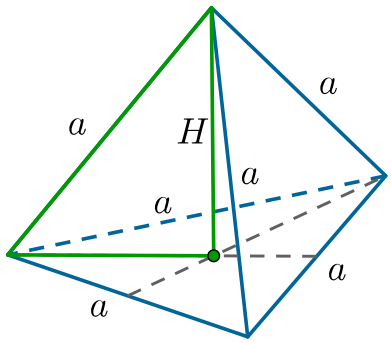



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny. Zatem pole podstawy jest równe

$$P_p = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Obliczmy teraz wysokość ostrosłupa jako przyprostokątną trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątna jest krawędzią czworościanu, a druga przyprostokątna to $\frac{2}{3}$ wysokości podstawy (czyli wysokości trójkąta równobocznego).




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$H^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 = a^2$$

$$H^2 + \frac{1}{3} a^2 = a^2$$

$$H^2 = \frac{2}{3} a^2$$

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} a$$

$$H = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

Obliczamy objętość czworościanu.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

$$V = \frac{\sqrt{18}}{36} a^3$$

$$V = \frac{3\sqrt{2}}{36} a^3$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

> **Ważne!**
>
> Objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości a jest równa
>
> $$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

Przyjmijmy, że długość krawędzi sześcianu jest równa b, zaś a to długość krawędzi czworościanu.
Oprócz czworościanu foremnego w sześcianie można umieścić cztery inne jednakowe czworościany. Objętość każdego z nich jest równa

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b^3 = \frac{1}{6} b^3.$$

Zatem objętość czworościanu foremnego jest równa

$$V = b^3 - 4 \cdot \frac{1}{6} b^3 = b^3 - \frac{4}{6} b^3 = \frac{2}{6} b^3 = \frac{1}{3} b^3$$

Ponieważ $a$ jest przekątną kwadratu o boku $b$ , zatem $a = b\sqrt{2}$.
Stąd

$$b = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}b^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{8} \cdot 2\sqrt{2}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

**Przykład 4**

Czy 15 $\mathrm{d}m^2$ kartonu wystarczy, aby wykonać pudełko w kształcie czworościanu foremnego o objętości $\frac{9}{4}\sqrt{2}\ \mathrm{d}m^3$?
Aby odpowiedzieć na pytanie zawarte w zadaniu, musimy znaleźć pole powierzchni czworościanu.
Znając objętość czworościanu, obliczymy najpierw długość a jego krawędzi .

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

$$\frac{9}{4}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

$$a^3 = \frac{9}{4}\sqrt{2} : \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$a^3 = \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$a^3 = 27$$

$$a = \sqrt[3]{27}$$

$$a = 3\ \mathrm{dm}$$

Obliczamy pole powierzchni czworościanu.

$$P = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$P = \sqrt{3} \cdot 3^2$$

$$P = 9\sqrt{3}$$

$$P = 9\sqrt{3} = 15{,}5884\ldots$$

$$P = 15{,}5884\ dm^2$$

Odpowiedź:
Ponieważ $15{,}5884\ldots > 15$, zatem $15\ \mathrm{d}m^2$ kartonu nie wystarczy na wykonanie pudełka.

Zadania

**Ćwiczenie 1**
Oblicz objętość ostrosłupa, którego pole podstawy jest równe $P$, a wysokość jest równa $H$.

$$V = \ \ldots.$$

Liczby $P$, $H$ naturalne ze zbioru $1-50$

**Ćwiczenie 2**
Wysokość ostrosłupa prawidłowego jest równa $12$ , a krawędź jego podstawy ma długość $2$. Oblicz objętość tego ostrosłupa, wiedząc, że jego podstawą jest

1. trójkąt
2. czworokąt
3. sześciokąt

**Ćwiczenie 3**
Pole podstawy ostrosłupa jest równe $P_p$, a jego objętość $V$. Oblicz wysokość ostrosłupa.
Liczby $P_p$ i $V$ naturalne z przedziału $1-\ 100$.

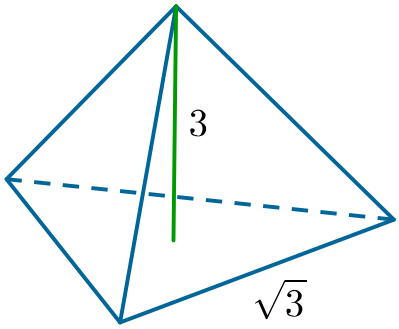
**Ćwiczenie 4**

Oblicz objętość ostrosłupa, którego wysokość jest równa $18\ \mathrm{cm}$, a podstawą jest

1. prostokąt o bokach długości $4\ \mathrm{cm}$ i $10\ \mathrm{cm}$
2. trójkąt prostokątny równoramienny, w którym suma długości przyprostokątnych jest równa $2\sqrt{5}\ \mathrm{cm}$
3. romb o przekątnych długości $7\ \mathrm{cm}$ i $8\ \mathrm{cm}$
4. równoległobok, w którym jeden z boków ma długość $6\ \mathrm{cm}$, a wysokość poprowadzona do tego boku jest równa $4\ \mathrm{cm}$

**Ćwiczenie 5**

Objętość ostrosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku jest równa




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- $27\sqrt{3}$
- $0{,}75\sqrt{3}$
- $2{,}25\sqrt{3}$
- $3$

**Ćwiczenie 6**

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości $6\ \mathrm{mm}$ i $8\ \mathrm{mm}$. Objętość ostrosłupa wynosi $80\ \mathrm{m}m^3$. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

**Ćwiczenie 7**

Objętość ostrosłupa jest dwukrotnie większa od objętości graniastosłupa o takiej samej podstawie. Wynika z tego, że stosunek wysokości graniastosłupa do wysokości ostrosłupa jest równy

- ◯ $2:3$
- ◯ $2:1$
- ◯ $1:6$
- ◯ $1:3$

**Ćwiczenie 8**

Oblicz objętość czworościanu foremnego, wiedząc, że

1. krawędź ma długość $2$
2. wysokość jego ściany bocznej jest równa $3$
3. pole jego ściany bocznej jest równe $\frac{\sqrt{3}}{4}$
4. pole jego powierzchni jest równe $81\sqrt{3}$

**Ćwiczenie 9**

Wysokość ostrosłupa jest równa $H$. Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny o podstawach długości $3H$ oraz $H$. Obwód podstawy jest równy $2H\left(2+\sqrt{2}\right)$. Wykaż, że objętość tego ostrosłupa jest mniejsza od $H^3$.

**Ćwiczenie 10**

Dwa jednakowe ostrosłupy prawidłowe czworokątne o krawędzi podstawy długości $5\ \mathrm{cm}$ połączono podstawami. Odległość między wierzchołkami ostrosłupów wynosi $40\ \mathrm{cm}$. Oblicz objętość otrzymanej bryły.

**Ćwiczenie 11**

Oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o objętości $125\ \mathrm{cm}^3$ i krawędzi podstawy długości $5$.

**Ćwiczenie 12**

Oblicz pole podstawy ostrosłupa ośmiokątnego o wysokości $10\ \mathrm{cm}$, którego objętość jest równa $169\ \mathrm{cm}^3$.

**Ćwiczenie 13**

Jaką długość ma krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości $36\ \mathrm{cm}$ i objętości $3\sqrt{3}\ m^3$?

**Ćwiczenie 14**

Graniastosłup i ostrosłup mają takie same podstawy. Objętość graniastosłupa jest dwa razy większa od objętości ostrosłupa. Wysokość graniastosłupa jest równa $8\ \mathrm{cm}$. Jaką wysokość ma ostrosłup?

- ○ $18\ \mathrm{cm}$
- ○ $14\ \mathrm{cm}$
- ○ $12\ \mathrm{cm}$
- ○ $3\ \mathrm{cm}$

**Ćwiczenie 15**

Suma długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego wynosi $18\ \mathrm{cm}$. Oblicz objętość tego czworościanu.

**Ćwiczenie 16**

Suma długości krawędzi bocznej ostrosłupa oraz krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi $8\ \mathrm{cm}$. Długości tych krawędzi są w stosunku $3:1$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**Ćwiczenie 17**

Ostrosłup prawidłowy sześciokątny ma wysokość $1\ \mathrm{cm}$ oraz objętość $8\ \sqrt{3}cm^3$. Oblicz długości krawędzi tego ostrosłupa.

**Ćwiczenie 18**

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest $4$ razy mniejsze od jego powierzchni bocznej. Krawędź podstawy ma długość $6\ \mathrm{cm}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**Ćwiczenie 19**

Prostopadłościan ma wymiary $6$ i $6$ i $8$. Krawędzie ostrosłupa prawidłowego trójkątnego mają długości równe długościom przekątnych ścian prostopadłościanu. Oblicz objętość ostrosłupa. Ile różnych rozwiązań ma to zadanie?

Przekątne ścian tego prostopadłościanu mają długości

$$d_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, d_2 = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Ostrosłup ma 6 krawędzi, ale trzy z nich są krawędziami podstawy i są równe, a trzy są krawędziami bocznymi i też są sobie równe. Są dwie możliwości: albo krawędzie postawy mają długość $10$, a krawędzie boczne $6\sqrt{2}$, albo na odwrót. W pierwszym przypadku wysokość prostopadłościanu jest równa

$$H_1 = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{116}{3}} = \frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{3}}$$

Zaś w drugim

$$H_2 = \sqrt{(10)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

Objętość ostrosłupa w tych przypadkach wynosi:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{100\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{29}}{3}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{19} = \frac{1}{3} \cdot \text{mfrac} \cdot 2\sqrt{19} = 12\sqrt{57}$$

**Ćwiczenie 20**

Oblicz objętość ośmiościanu foremnego, którego każda krawędź ma długość $5\ \mathrm{cm}$.

**Ćwiczenie 21**

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość $8\ \mathrm{cm}$, a krawędź boczna jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem $30^\circ$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**Ćwiczenie 22**

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej ma długość $20\ \mathrm{cm}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30^\circ$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**Ćwiczenie 23**

Dwa pojemniki, jeden w kształcie prostopadłościanu o wymiarach: $4\ \mathrm{m}$ i $4m$ i $5m$, drugi w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości $9\ \mathrm{m}$ i krawędzi podstawy $6\ \mathrm{m}$ należy napełnić gazem.
W którym pojemniku będzie więcej gazu?
Sprawdź, czy do napełnienia obu pojemników wystarczy $200\ m^3$ gazu.
Odpowiedzi uzasadnij.

**Ćwiczenie 24**

Uzupełnij tabelkę.

Tabela. Dane

| Ostrosłup prawidłowy $n$-kątny | $n=3$ | $n=4$ | $n=6$ |
|---|---|---|---|
| Pole powierzchni bocznej ostrosłupa | | $20$ | $48\sqrt{6}$ |
| Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa | | | $48\sqrt{6}+24\sqrt{3}$ |
| Pole podstawy ostrosłupa | $4\sqrt{3}$ | $25$ | |
| Objętość ostrosłupa | $12$ | | |

# Słowniczek

**Reguła:**

Dla dowolnej liczby $a$ zachodzi równość $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$.
Na przykład

$$\sqrt[3]{-125} = -5, \; -\sqrt[3]{125} = -5,$$

czyli

$$\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -5.$$

**Definicja: Czworościan**

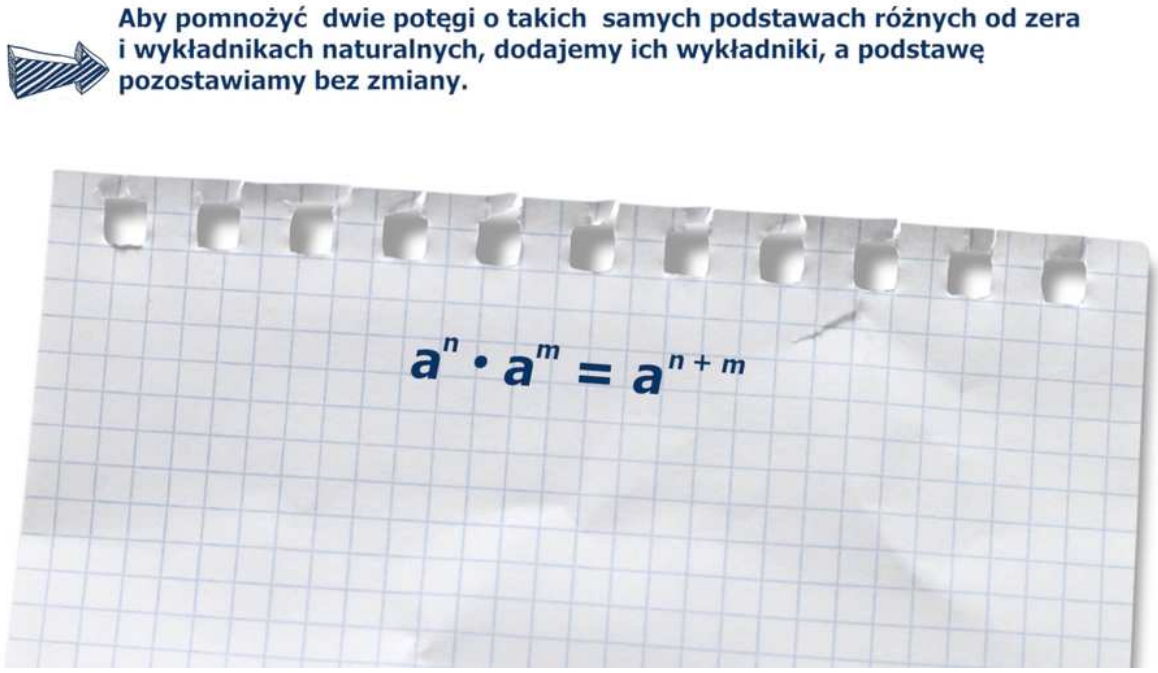
Czworościan to ostrosłup trójkątny. Czworościan ma 4 wierzchołki i 6 krawędzi. Jeżeli wszystkie ściany czworościanu są trójkątami równobocznymi, to czworościan nazywamy czworościanem foremnym.

**Twierdzenie: Działania na potęgach**

- **Iloczyn potęg o takich samych podstawach**

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych $n$ i $m$ prawdziwa jest równość

$$a^n \bullet a^m = a^{n+m}.$$




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

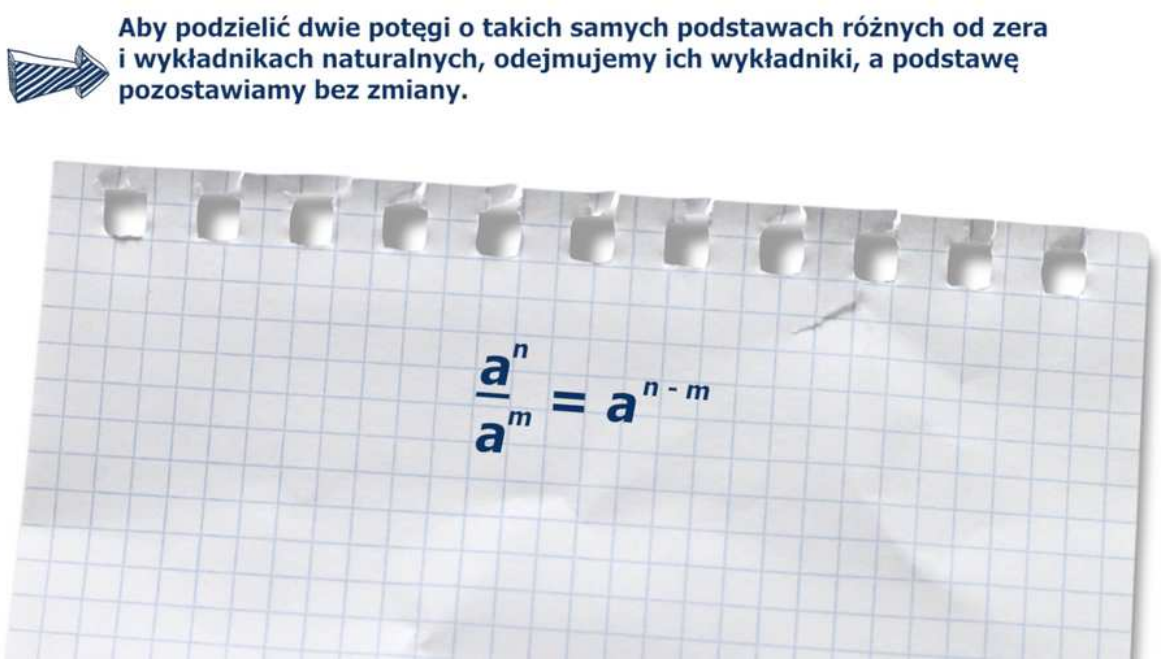
Animacja

---

- **Iloraz potęg o takich samych podstawach**

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych $n$ i $m$ prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

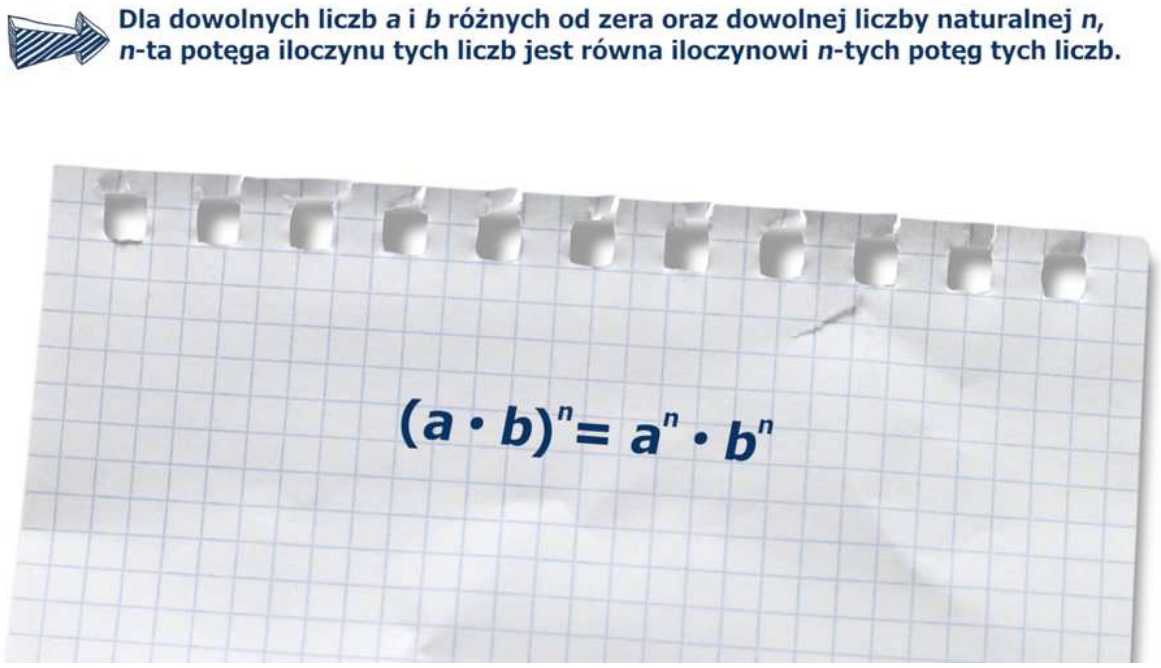
---

**Twierdzenie: Działania na potęgach**

- **Iloczyn potęg o takich samych wykładnikach**

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej $n$ prawdziwa jest równość

$$a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n.$$




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

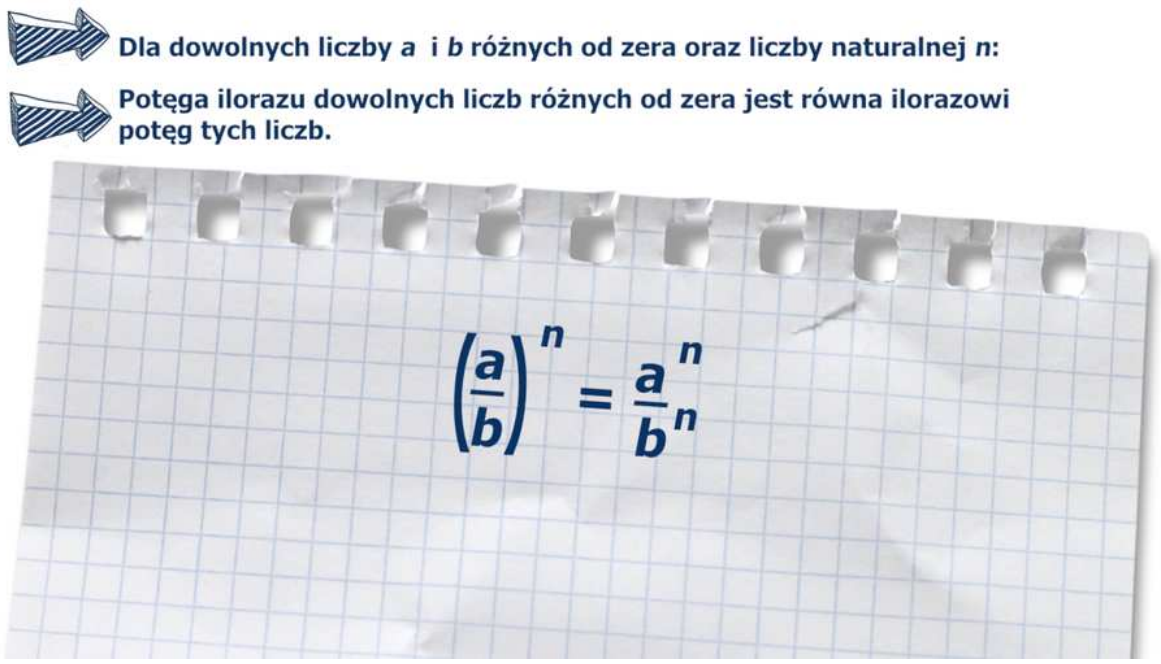
Animacja

---

- **Iloraz potęg o takich samych wykładnikach**

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i dowolnej liczby całkowitej $n$ prawdziwa jest równość

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$




[Film dostępny na portalu epodreczniki.pl]

Animacja

---

**Definicja: Dziedzina funkcji**

Zbiór $X$ nazywamy dziedziną funkcji, a jego elementy argumentami funkcji.

**Definicja: Funkcja**

- Funkcją $f$ ze zbioru $X$ w zbiór $Y$ nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru $X$ przyporządkowany jest dokładnie jeden element zbioru $Y$.

**Definicja: Funkcja malejąca**

Funkcję nazywamy malejącą, jeżeli wraz ze wzrostem argumentów maleją wartości funkcji.

**Definicja: Funkcja rosnąca**

Funkcję nazywamy rosnącą, jeżeli wraz ze wzrostem argumentów rosną wartości funkcji.

**Definicja: Funkcja stała**

Funkcję nazywamy stałą, jeżeli wraz ze wzrostem argumentów wartość funkcji pozostaje stała.

**Definicja: Graniastosłup prosty**

Graniastosłup prosty to taka figura przestrzenna, która ma

- dwie podstawy będące jednakowymi wielokątami,
- ściany boczne będące prostokątami.

Nazwa graniastosłupa zależy od rodzaju wielokąta w podstawie.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Definicja: Jednomian**

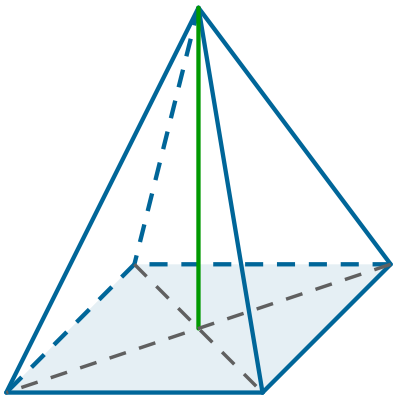
**Jednomianem** nazywamy wyrażenie algebraiczne, które jest liczbą, literą lub iloczynem liczb i liter.

**Definicja: Miejsce zerowe funkcji**

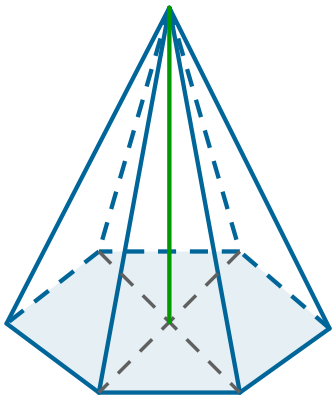
Miejscem zerowym funkcji nazywamy każdy argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0.

**Definicja: Ostrosłup prawidłowy**

Ostrosłup prosty nazywamy prawidłowym, gdy jego podstawą jest wielokąt foremny.
Ściany boczne takiego ostrosłupa są przystającymi trójkątami równoramiennymi.



ostrosłup prawidłowy czworokątny

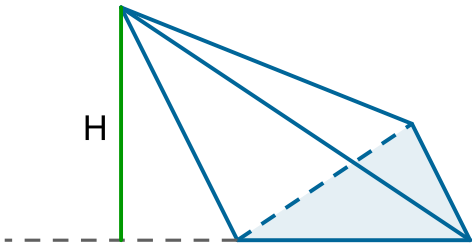


ostrosłup prawidłowy sześciokątny

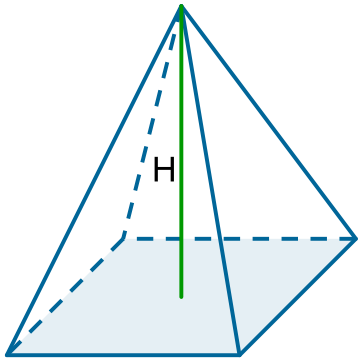
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Definicja: Ostrosłup prosty, ostrosłup pochyły**

Ostrosłup nazywamy prostym, gdy jego wszystkie krawędzie boczne są równe.
W przeciwnym razie – ostrosłup nazywamy pochyłym. Ściany boczne ostrosłupa prostego są trójkątami równoramiennymi.




ostrosłup pochyły




ostrosłup prosty

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Definicja: Pierwiastek kwadratowy**

Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej $a$ nazywamy taką liczbę nieujemną $b$, której kwadrat jest równy liczbie $a$. Pierwiastek ten oznaczamy symbolem $\sqrt{a}$.
Pierwiastek kwadratowy nazywany jest również pierwiastkiem stopnia drugiego.
Mówimy, że liczba $a$ w wyrażeniu $\sqrt{a}$ to liczba podpierwiastkowa.

**Definicja: Pierwiastek sześcienny**

- Pierwiastkiem sześciennym z liczby $a$ nazywamy taką liczbę $b$, której sześcian jest równy liczbie $a$. Pierwiastek ten oznaczamy symbolem $\sqrt[3]{a}$.
- Pierwiastek sześcienny nazywany jest również pierwiastkiem stopnia trzeciego.
- $\sqrt[3]{a} = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b^3 = a$.

**Twierdzenie: Pole sześciokąta foremnego**

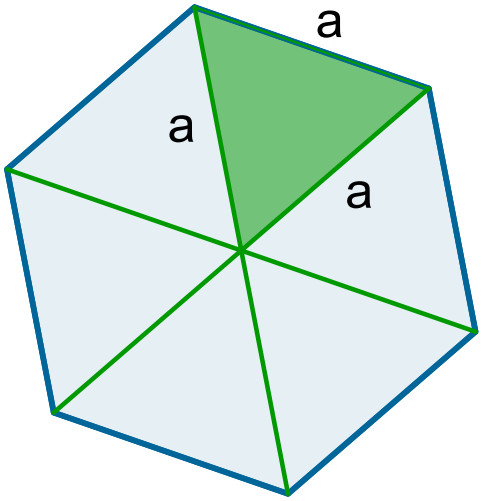
Pole sześciokąta foremnego o boku długości $a$ jest równe

$$P = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

**Dowód**

Sześciokąt foremny, którego bok ma długość $a$, można podzielić na 6 przystających trójkątów równobocznych. Długość boku takiego trójkąta jest równa $a$, zatem jego pole to $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
Pole sześciokąta foremnego jest sześciokrotnie większe od pola trójkąta, zatem

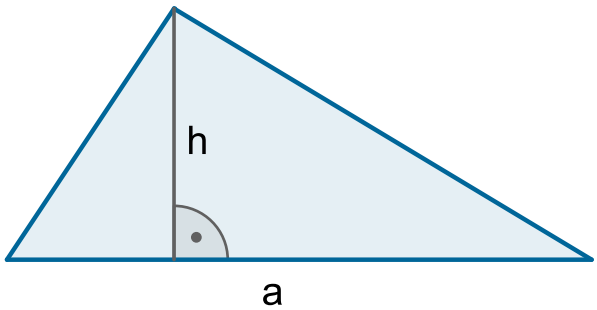
$$P = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Twierdzenie: Pole trójkąta**

Pole $P$ trójkąta o wysokości $h$ poprowadzonej do podstawy długości $a$ jest równe $P = \frac{a \bullet h}{2}$.

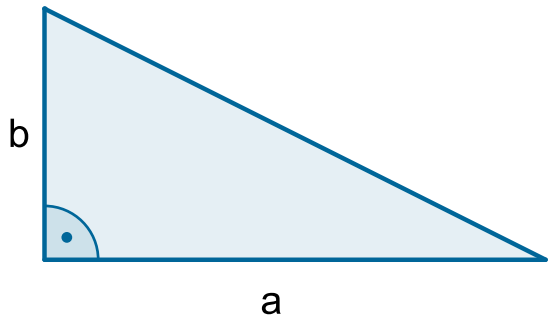



$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Twierdzenie: Pole trójkąta prostokątnego**

Pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości $a$ i $b$ jest równe $P = \frac{a \bullet b}{2}$

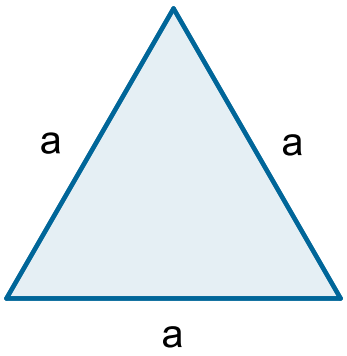



$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Twierdzenie: Pole trójkąta równobocznego**

Pole trójkąta równobocznego o boku długości $a$ jest równe $P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.




$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

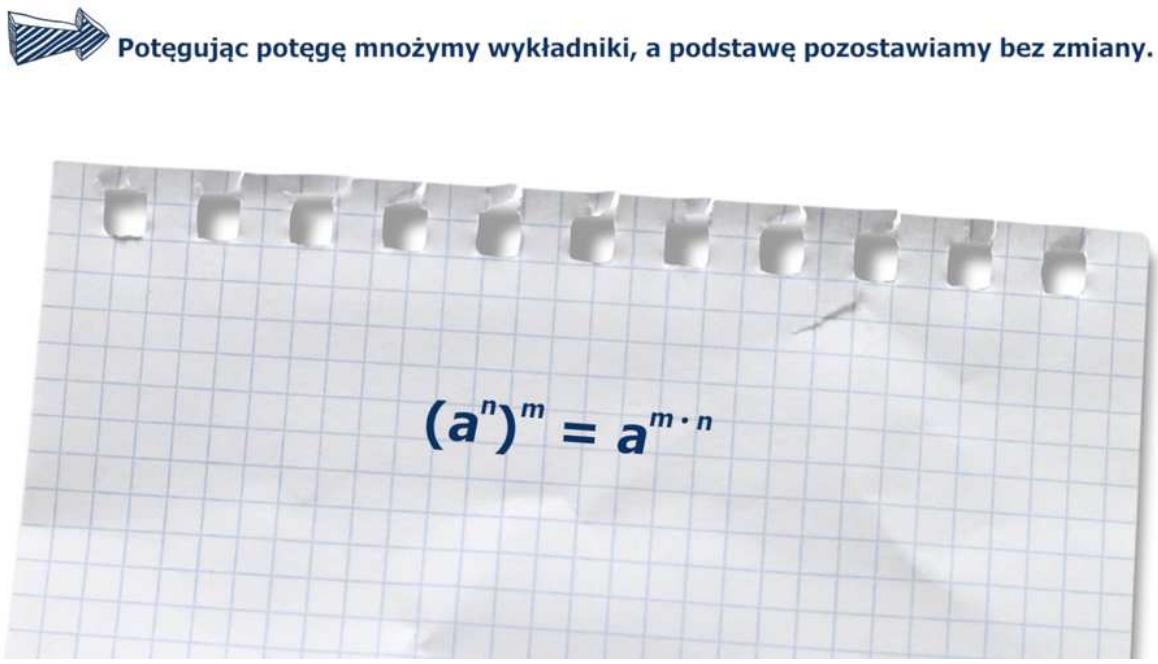
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Twierdzenie: Potęga potęgi**

- **Potęga potęgi**

Dla dowolnej liczby $a \neq 0$ i dowolnych liczb całkowitych $n$ i $m$ prawdziwa jest równość

$$(a^n)^m = a^{n \bullet m}.$$




Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja

---

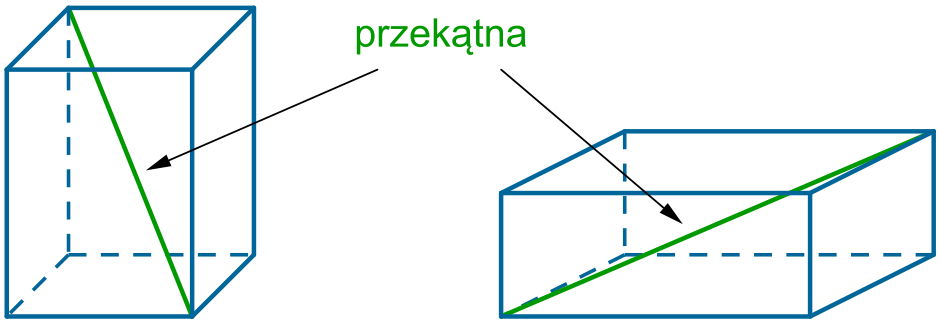
**Definicja: Przeciwdziedzina funkcji**

Zbiór $Y$ nazywamy przeciwdziedziną funkcji, a każdy element $y$ tego zbioru, który został przyporządkowany co najmniej jednemu argumentowi $x$, nazywamy wartością funkcji f dla argumentu $x$, co zapisujemy symbolicznie $y = f(x)$. Symbolicznie funkcję $f$ określoną w zbiorze $X$ o wartościach w zbiorze $Y$ zapisujemy w postaci

$$f : X \to Y$$

**Definicja: Przekątna prostopadłościanu**

Przekątną prostopadłościanu nazywamy odcinek łączący dwa wierzchołki prostopadłościanu leżące na różnych podstawach i różnych ścianach bocznych.




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Twierdzenie: Rodzaje trójkątów a długości boków**

Niech liczby $a, b, c$, gdzie $c > a$ i $c > b$ będą długościami boków trójkąta.

- Trójkąt ten jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = c^2$.
- Trójkąt ten jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 > c^2$.
- Trójkąt ten jest rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 < c^2$.

**Definicja: Równanie**

Równaniem nazywamy równość dwóch wyrażeń algebraicznych, przy czym przynajmniej w jednym z tych wyrażeń występuje co najmniej jedna zmienna, zwana niewiadomą.
Na przykład:

$$3\text{xy} = 5, 3x + t^2 = 10$$

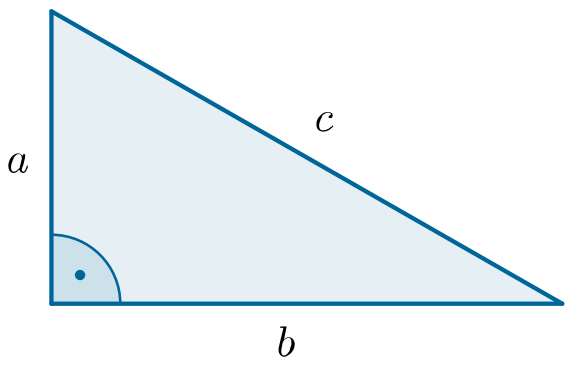
**Twierdzenie: Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa**

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

**Twierdzenie: Twierdzenie Pitagorasa**

Jeżeli $a$ i $b$ są długościami przyprostokątnych, zaś $c$ długością przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym, to zachodzi związek

$$a^2 + b^2 = c^2$$




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Twierdzenie: Wielokąt wklęsły**

Wielokąt jest **wklęsły**, jeżeli co najmniej jeden z jego kątów ma miarę większą od $180^\circ$. Wielokąt, który nie jest wklęsły, to **wielokąt wypukły.**

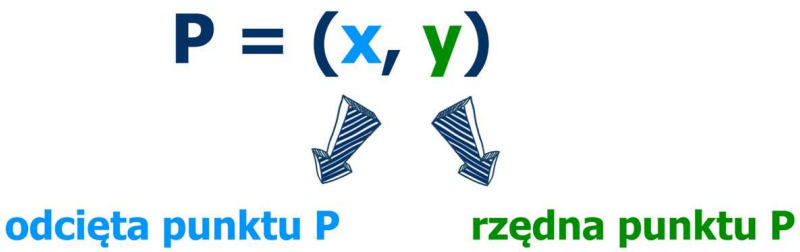
**Definicja: Wielokąt wypukły**

Jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty w wielokącie jest całkowicie w nim zawarty, to taki wielokąt nazywamy wypukłym.

**Definicja: Współrzędne**

Każdemu punktowi $P$ zaznaczonemu w układzie współrzędnych odpowiada uporządkowana para liczb $(x,\ \mathrm{y})$ nazywanych jego współrzędnymi.
Zapisujemy

$$P = (x,\ \mathrm{y})$$




Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

**Definicja: Zbiór miejsc zerowych funkcji**

Zbiorem miejsc zerowych nazywamy zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartość 0.

**Definicja: Zbiór wartości funkcji**

Zbiór złożony ze wszystkich elementów, które są wartościami funkcji $f$ dla wszystkich argumentów dziedziny, nazywamy zbiorem wartości funkcji $f$ i oznaczamy ZW.