

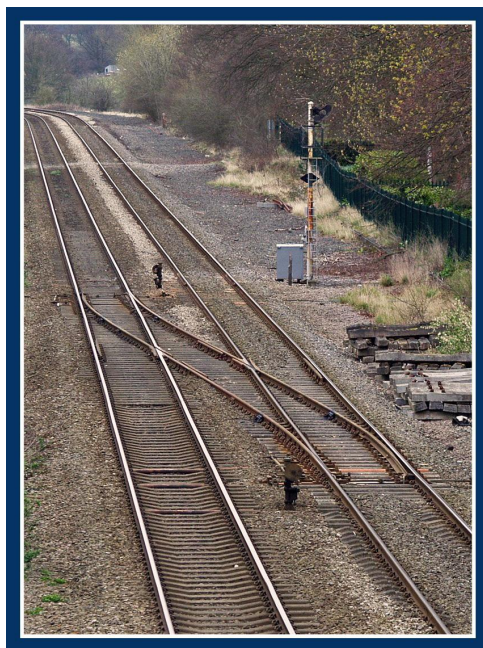
Kąty utworzone przez dwie proste przecięte trzecią prostą

Kąty utworzone przez dwie proste przecięte trzecią prostą

Analizując przykłady zawarte w tym materiale:

- poznasz kąty przy prostych równoległych przeciętych trzecią prostą oraz własności tych kątów,
- obliczysz miary kątów przy prostych równoległych przeciętych trzecią prostą. Rozwiązując ćwiczenia – sprawdzisz ukształtowane umiejętności.

Przybliżonym modelem prostych równoległych przeciętych trzecią prostą mogą być rozjazdy na torach kolejowych.



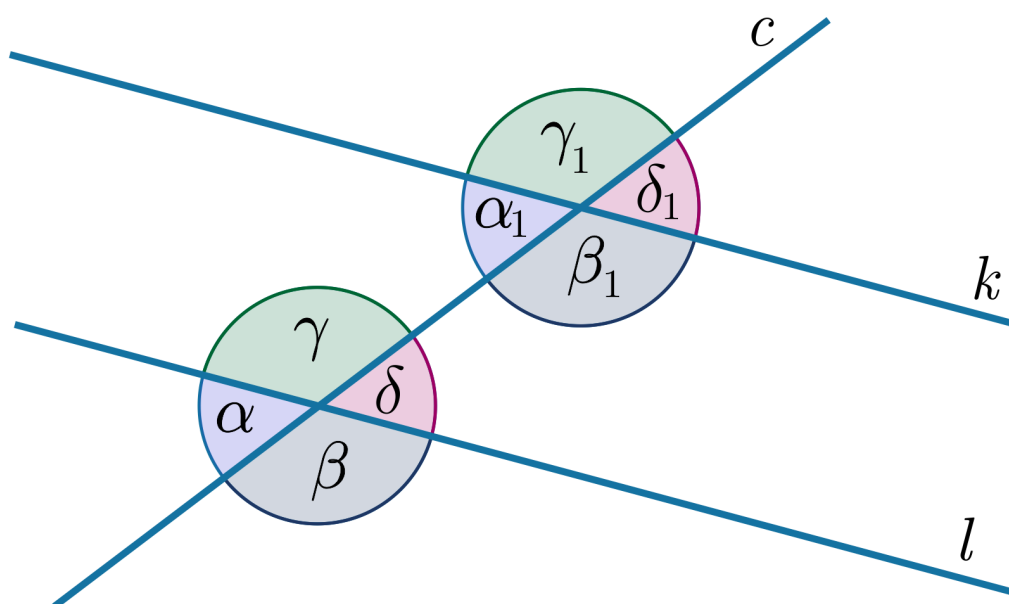
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Kąty odpowiadające i naprzemianległe

Proste k i l są przecięte prostą c .

- Kąty: α i α_1 , β i β_1 , γ i γ_1 oraz δ i δ_1 to pary kątów odpowiadających.

- Kąty α_1 i δ oraz β_1 i γ to pary kątów naprzemianległych wewnętrznych.
- Kąty β i γ_1 oraz α i δ_1 to pary kątów naprzemianległych zewnętrznych.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 1



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcNtDT0Hs>

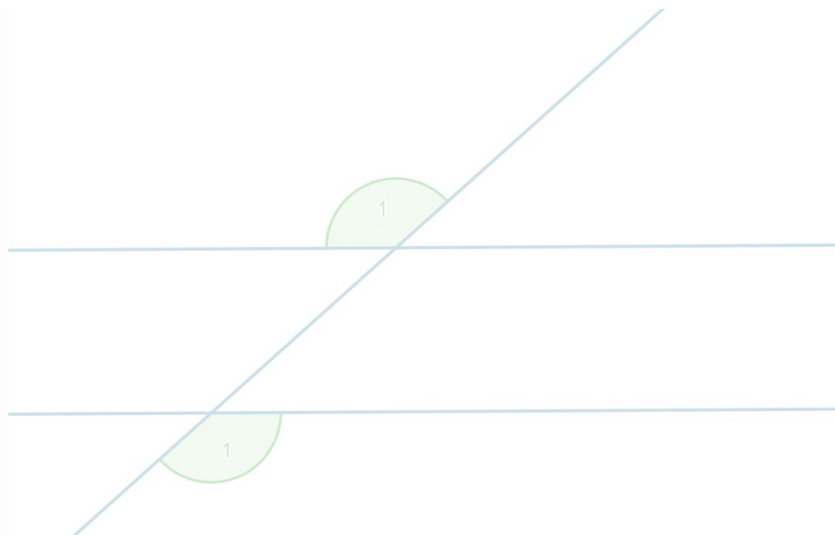
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

Pary kątów naprzemianległych



Poznaj wszystkie pary kątów naprzemianległych.

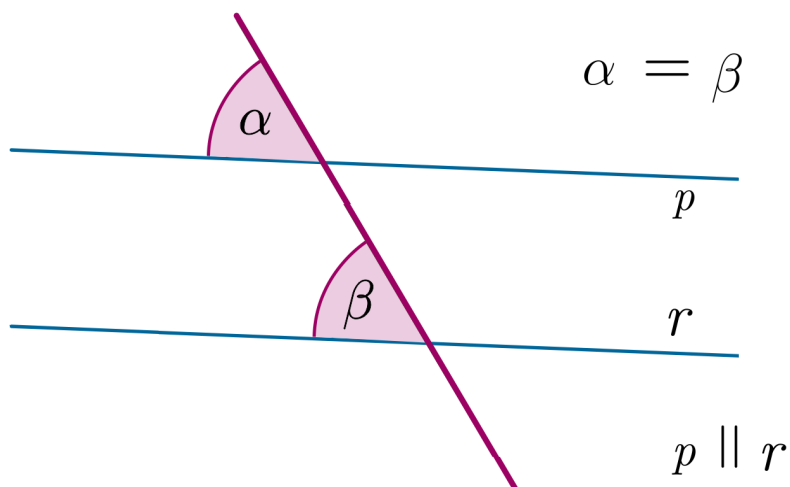


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcNtDT0Hs>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

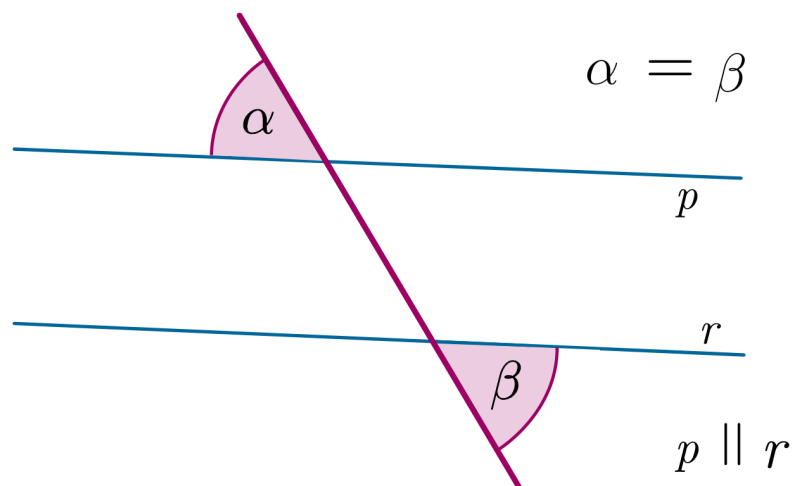
Twierdzenie: Kąty przy prostych równoległych

- Jeżeli dwie proste równoległe przetniemy trzecią prostą, to tak utworzone kąty odpowiadające są równe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

- Jeżeli dwie proste równoległe przetniemy trzecią prostą, to tak utworzone kąty naprzemianległe wewnętrzne są równe oraz kąty naprzemianległe zewnętrzne są równe.



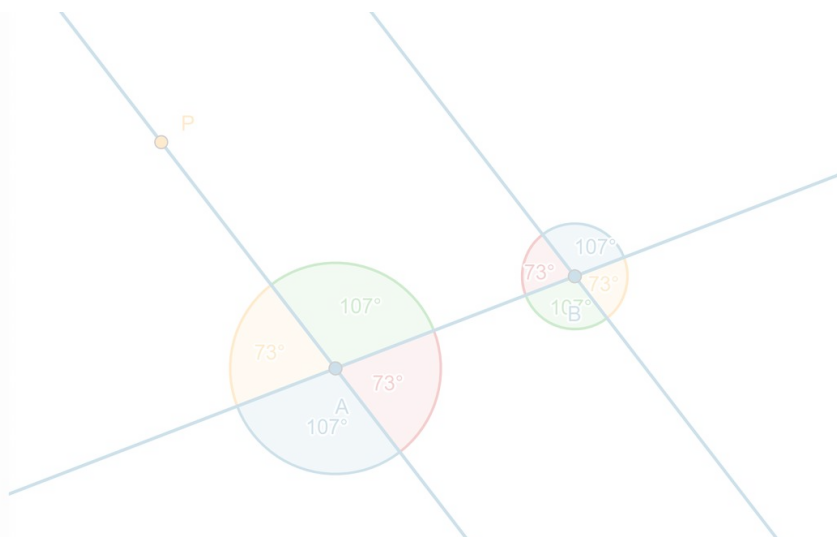
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Kąty naprzemianległe
przy prostych równoległych

Zmieniaj położenie punktu P.

Obserwuj miary zaznaczonych par
kątownaprzemianległych.



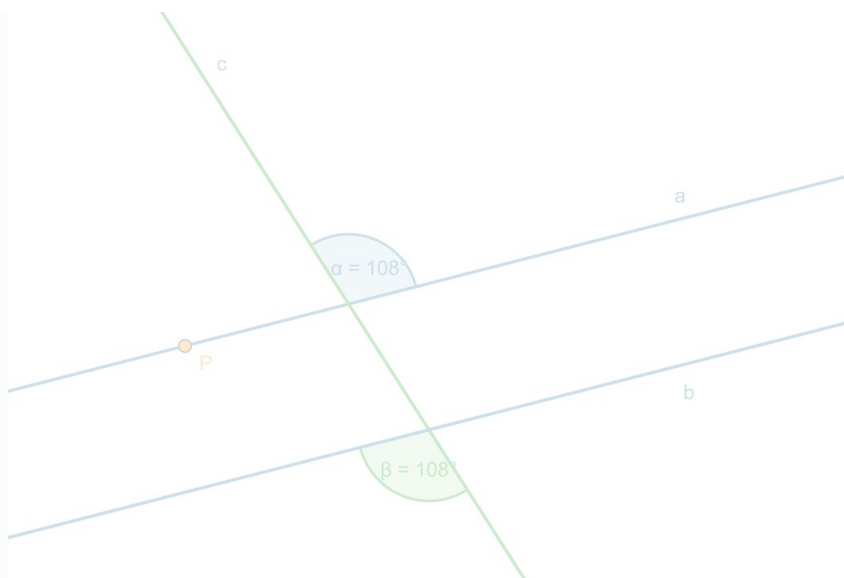
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcNtDT0Hs>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Kąty naprzemianległe

Proste a i b są równoległe.
Kąty α i β to para kątów
naprzemianległych.
Zmieniaj położenie punktu P .
Obserwuj zmiany miar kątów α oraz β .



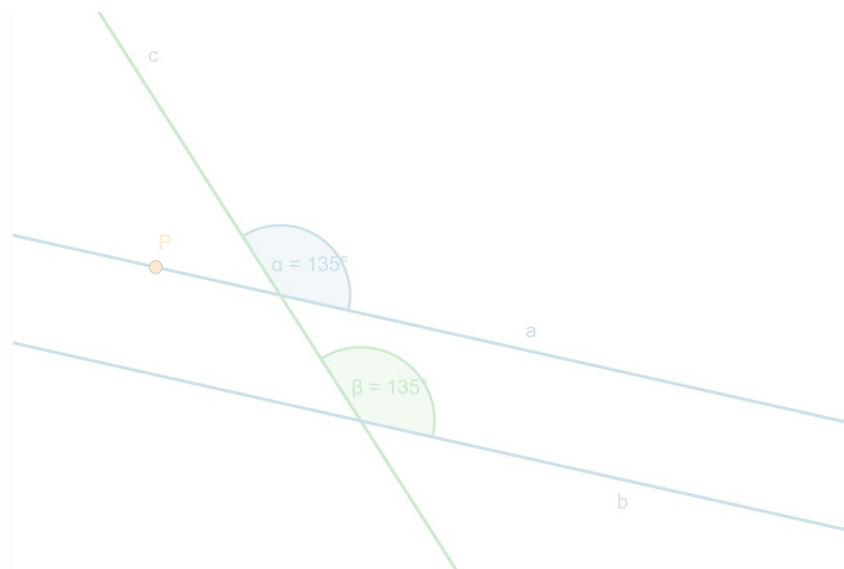
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcNtDT0Hs>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 5

Kąty odpowiadające

Proste a i b są równoległe.
Kąty α i β to para kątów
odpowiadających.
Zmieniaj położenie punktu P .
Obserwuj zmiany miar kątów α oraz β .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcNtDT0Hs>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Równoległość prostych

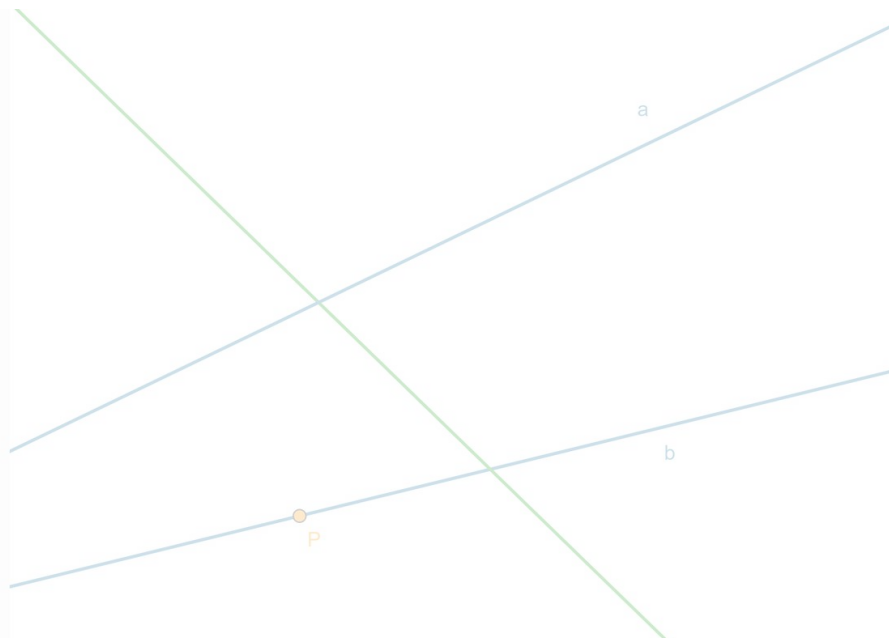
Przykład 6

Zmień położenie punktu P, aby zmienić wzajemne położenie prostych a i b.

Wyświetl kąty naprzemianległe lub odpowiadające.

☐ kąty naprzemianległe

☐ kąty odpowiadające



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcNtDT0Hs>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

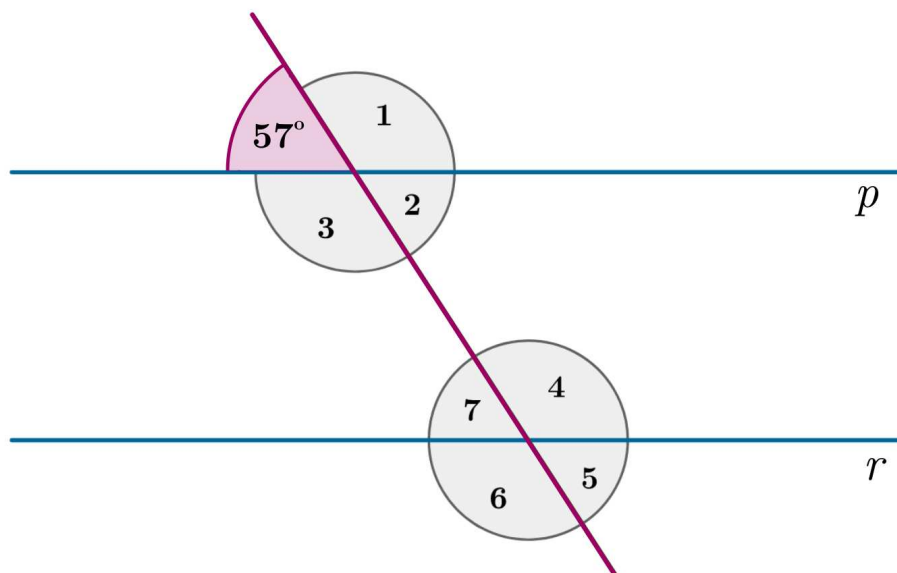
Twierdzenie: Dwie proste przecięte trzecią prostą

- Jeżeli dwie proste przecięte są trzecią prostą i utworzone w ten sposób kąty odpowiadające są równe, to proste te są równoległe.
- Jeżeli dwie proste przecięte są trzecią prostą i utworzone w ten sposób kąty naprzemianległe są równe, to proste te są równoległe.

Obliczanie miar kątów przy prostych równoległych

Przykład 7

Proste p i r są równoległe. Jeden z kątów wyznaczonych przez te proste ma miarę 57° . Obliczmy miary pozostałych kątów przy prostych p i r .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąt o mierze 57° i kąt 2 to kąty wierzchołkowe – ich miary są równe.

$$|\sphericalangle 2| = 57^\circ$$

Kąt o mierze 57° i kąt 7 to kąty odpowiadające przy prostych równoległych – ich miary są równe.

$$|\sphericalangle 7| = 57^\circ$$

Kąt 7 i kąt 5 to kąty wierzchołkowe – ich miary są równe.

$$|\sphericalangle 5| = |\sphericalangle 7| = 57^\circ$$

Kąt o mierze 57° i kąt 1 to kąty przyległe. Suma ich miar jest równa 180° .

$$|\sphericalangle 1| + 57^\circ = 180^\circ$$

Więc $|\sphericalangle 1| = 123^\circ$

Pary kątów przyległych to również:

kąt 3 i kąt 2, kąt 7 i kąt 4 oraz kąt 6 i kąt 5.

Stąd

$$|\sphericalangle 3| = |\sphericalangle 4| = |\sphericalangle 6| = 123^\circ$$

Odpowiedź:

$$|\sphericalangle 2| = |\sphericalangle 7| = |\sphericalangle 5| = 57^\circ$$

$$|\sphericalangle 1| = |\sphericalangle 3| = |\sphericalangle 4| = |\sphericalangle 6| = 123^\circ$$

Ćwiczenie 1



Podaj miary kątów przy prostych równoległych.

$\beta = 68^\circ$

Zapisz miary pozostałych kątów.

miara kąta 1 =

miara kąta 2 =

miara kąta 3 =

miara kąta 4 =

miara kąta 5 =

miara kąta 6 =

miara kąta 7 =

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcNtDT0Hs>

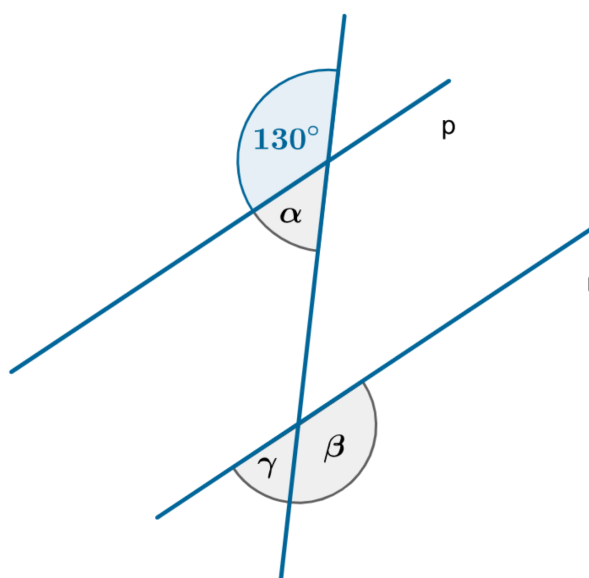
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Proste p i r są równoległe. Uzupełnij zdania pod grafikami, przeciągając w luki odpowiednie miary kątów lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

1.

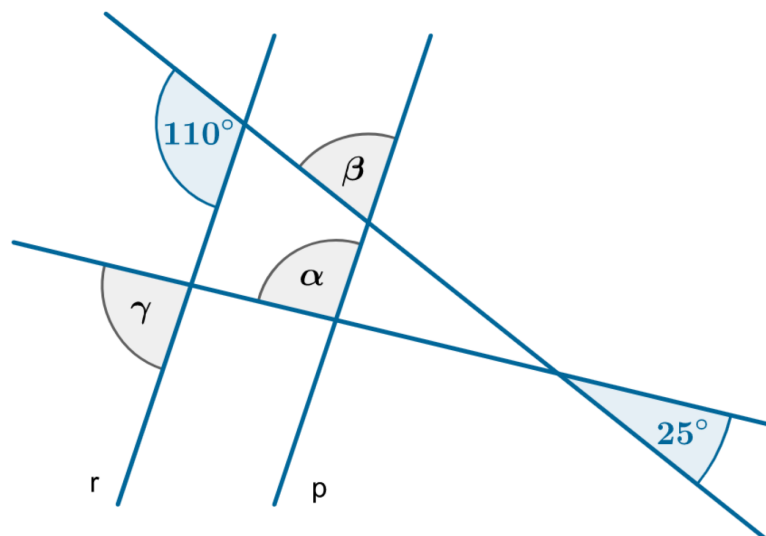


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąt α ma miarę , kąt β ma miarę , a kąt γ ma miarę .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąt α ma miarę , kąt β ma miarę , a kąt γ ma miarę .

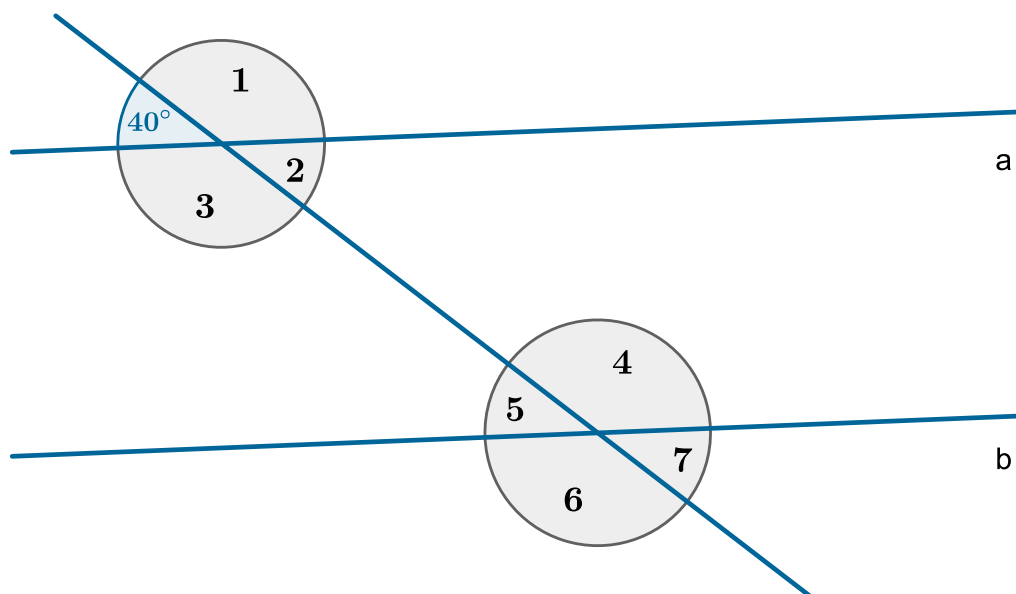
-

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Proste a i b są równoległe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz zdanie prawdziwe.

☐ Miara kąta 6 jest równa 40° .

☐ Miara kąta 4 jest równa 120° .

☐ Miara kąta 1 jest równa 120° .

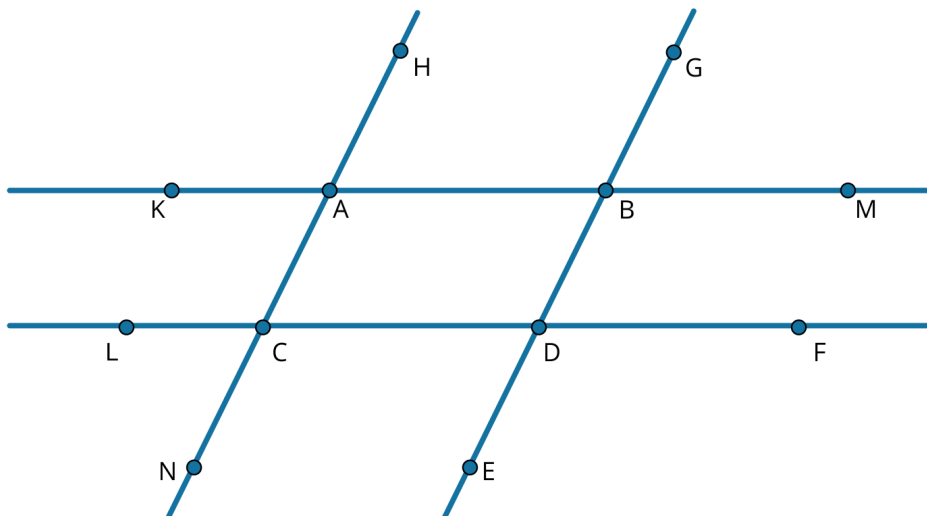
☐ Miara kąta 5 jest równa 40° .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Proste HA i GB są równoległe oraz proste KA i LC są równoległe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

1. Wypisz wszystkie pary kątów naprzemianległych.
2. Wypisz wszystkie pary kątów odpowiadających.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Proste równoległe m i s przecina prosta w . Jeden z kątów utworzonych przez proste w i s ma miarę 22° . Oblicz miary kątów utworzonych przez proste w i m . Odpowiedzi wpisz w puste luki w kolejności rosnącej.

Odpowiedź: Miary kątów utworzonych przez proste w i m wynoszą $^\circ$ oraz $^\circ$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Kąty μ i φ to para kątów naprzemianległych przy prostych równoległych przeciętych trzecią prostą. Zatem kąty te są równe.

☐

Kąty α i β to para kątów odpowiadających przy prostych równoległych, przeciętych trzecią prostą. Zatem kąty te są równe.

☐

Kąty γ i δ to para kątów naprzemianległych przy nierównoległych prostych, przeciętych trzecią prostą. Zatem kąt γ jest dwa razy większy od kąta δ .

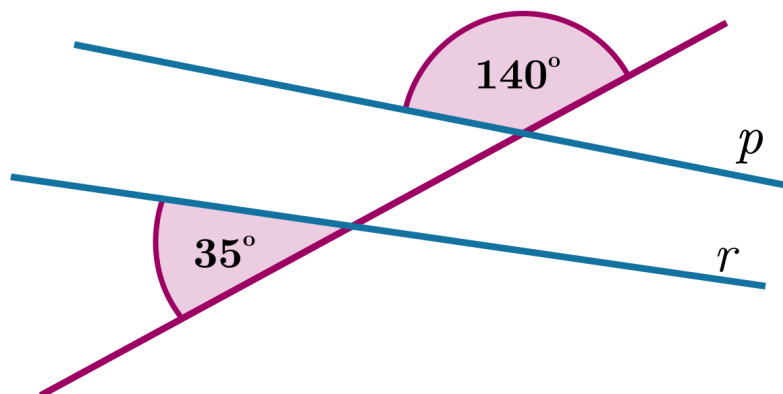
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Czy proste p i r są równoległe? Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie wyrażenia lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

1.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Te proste równoległe, ponieważ .

kąty naprzemianległe są równe

kąty wierzchołkowe są równe

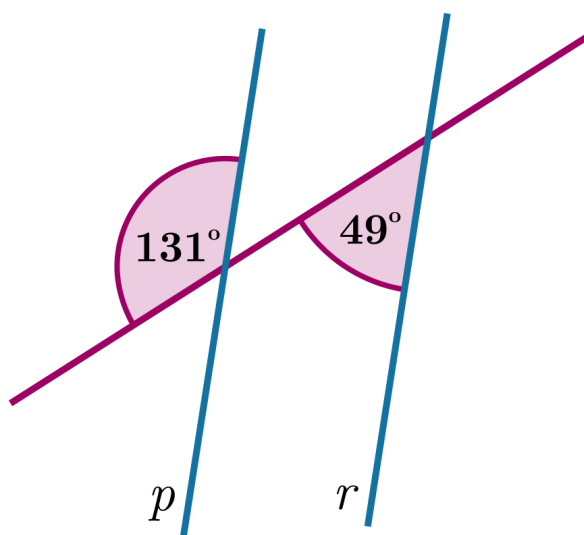
kąty odpowiadające nie są równe

nie są

są

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Te proste równoległe, ponieważ .

kąty odpowiadające nie są równe

są

kąty odpowiadające są równe

nie są

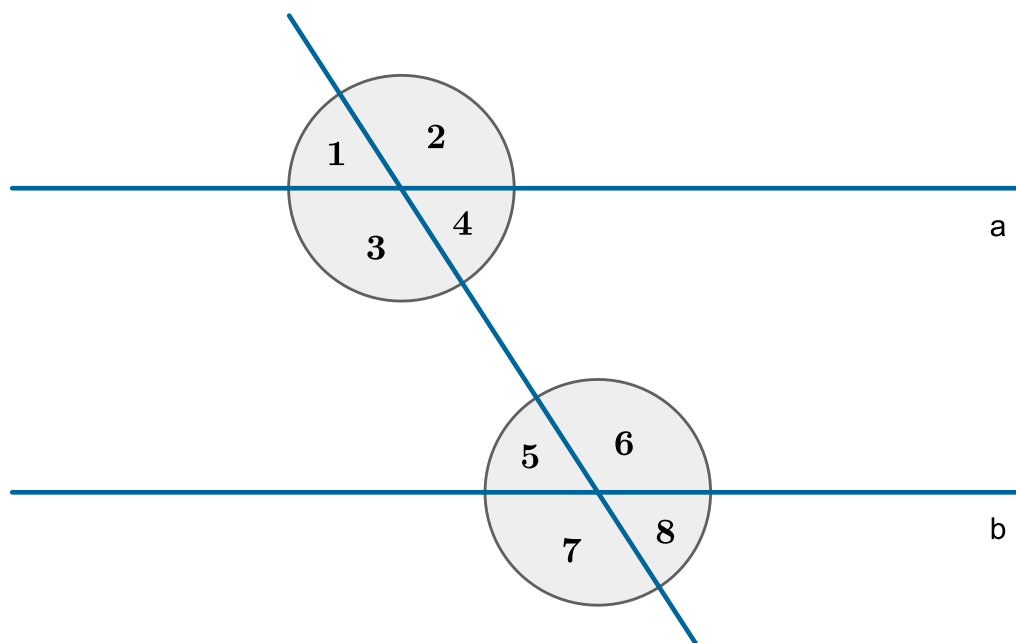
kąty wierzchołkowe są równe

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Proste a i b są równoległe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz $|\angle 1|$, a następnie uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie miary kątów lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Kiedy miara kąta 2 jest o 20° większa od miary kąta 1, to miara kąta 1 wynosi

- Kiedy $|\angle 2| + |\angle 7| = 200^\circ$, to miara kąta 1 wynosi .

- Kiedy $|\angle 7| - |\angle 5| = 8^\circ$, to miara kąta 1 wynosi .

- Kiedy $|\angle 6| = 108^\circ$, to miara kąta 1 wynosi .

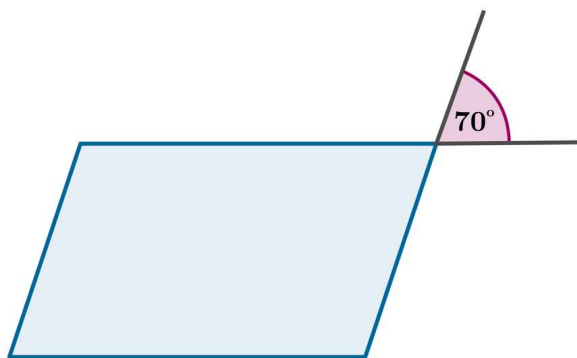
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

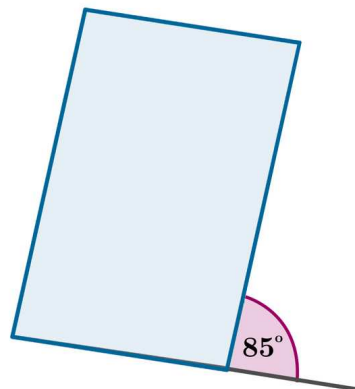


Oblicz miary kątów równoległoboku, korzystając z własności kątów przy prostych równoległych.

a)



b)



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Uzasadnij, że:

- a. dwie proste równoległe do trzeciej prostej są do siebie równoległe
- b. dwie proste prostopadłe do tej samej prostej są do siebie równoległe
- c. przeciwległe kąty równoległoboku są równe

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.