



Dowodzenie twierdzeń z teorii podzielności

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Dowodzenie twierdzeń z teorii podzielności

Źródło: dostępny w internecie: [Free-Photos](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Aby stwierdzić, czy dana liczba naturalna jest podzielna przez inną liczbę naturalną, można skorzystać z cech podzielności. Nie zawsze jednak jest to takie proste, gdyż często należy określić podzielność nie jednej konkretnej liczby, ale całego zbioru liczb, spełniających dane warunki.

Wtedy musimy przeprowadzać bardziej skomplikowane rozumowania. Właśnie takimi rozumowaniami zajmiemy się w tym materiale. Pokażemy różnego typu zadania, prowadzące do udowodnienia własności związanych z podzielnością liczb naturalnych. W tym celu posłużymy się aparatem algebraicznym, opartym między innymi na wzorach skróconego mnożenia.

Twoje cele

- Udowodnisz niektóre własności związane z podzielnością liczb naturalnych.
- Przekształcisz równoważnie wyrażenia algebraiczne, grupując wyrazy, wyłączając wspólny czynnik przed nawias.
- Zastosujesz wzory skróconego mnożenia, przekształcając wyrażenia algebraiczne.

Przeczytaj

Zagadnienia związane z podzielnością liczb naturalnych od wieków były przedmiotem badań wielu wybitnych matematyków. Aparat matematyczny, którym dysponujemy nie pozwala na prowadzenie bardziej zaawansowanych rozważań, zatem w tym materiale rozważymy tylko niektóre z podstawowych zagadnień z teorii podzielności.

Na początek zadania dotyczące liczb pierwszych, które uważane są za „królowe” wszystkich rodzajów liczb naturalnych.

Definicja: Liczba pierwsza

Liczba pierwsza to liczba naturalna większa od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki – jedynkę i samą siebie.

Ważne!

Liczba 0 nie jest ani liczbą pierwszą, ani złożoną.

Liczba 1 nie jest ani liczbą pierwszą, ani złożoną.

Przykład 1

Wykażemy, że istnieje tylko jedna liczba pierwsza p taka, że liczby $A = 4p^2 + 1$ i $B = 6p^2 + 1$ są liczbami pierwszymi.

Obliczmy kilka wartości liczb A i B dla kolejnych początkowych liczb pierwszych.

- Jeśli $p = 2$, to

$$A = 4 \cdot 4 + 1 = 17 - \text{liczba pierwsza,}$$

$$B = 6 \cdot 4 + 1 = 25 - \text{liczba złożona.}$$

Liczba 2 nie spełnia warunków zadania.

- Jeśli $p = 3$, to

$$A = 4 \cdot 9 + 1 = 37 - \text{liczba pierwsza,}$$

$$B = 6 \cdot 9 + 1 = 55 - \text{liczba złożona.}$$

Liczba 3 nie spełnia warunków zadania.

- Jeśli $p = 5$, to

$$A = 4 \cdot 25 + 1 = 101 - \text{liczba pierwsza,}$$

$$B = 6 \cdot 25 + 1 = 151 - \text{liczba pierwsza.}$$

Liczba 5 spełnia warunki zadania. Jest więc szukaną liczbą.

Pozostaje zatem wykazać, że nie istnieje inna liczba, większa od 5, dla której liczby A i B są jednocześnie liczbami pierwszymi.

Każdą liczbą naturalną większą od 5 można zapisać w postaci

$$5n, 5n + 1, 5n + 2, 5n + 3 \text{ lub } 5n + 4,$$

gdzie n jest liczbą naturalną dodatnią.

Ponieważ p jest liczbą pierwszą większą od 5, zatem

$$p = 5n + 1, p = 5n + 2, p = 5n + 3 \text{ lub } p = 5n + 4.$$

- Jeśli $p = 5n + 1$, to

$$A = 4p^2 + 1 = 4(5n + 1)^2 + 1,$$

$$A = 100n^2 + 40n + 5,$$

$$A = 5(20n^2 + 8n + 1) - \text{liczba złożona.}$$

- Jeśli $p = 5n + 2$, to

$$B = 6p^2 + 1 = 6(5n + 2)^2 + 1,$$

$$B = 150n^2 + 120n + 25,$$

$$B = 5(30n^2 + 24n + 5) - \text{liczba złożona.}$$

- Jeśli $p = 5n + 3$, to

$$B = 6p^2 + 1 = 6(5n + 3)^2 + 1,$$

$$B = 150n^2 + 180n + 55,$$

$$B = 5(30n^2 + 36n + 11) - \text{liczba złożona.}$$

- Jeśli $p = 5n + 4$, to

$$A = 4p^2 + 1 = 4(5n + 4)^2 + 1,$$

$$A = 100n^2 + 160n + 65,$$

$$A = 5(20n^2 + 32n + 13) - \text{liczba złożona.}$$

Wykazaliśmy więc, że jeśli liczba p jest liczbą pierwszą, większą od 5, to liczba A lub liczba B jest złożona. Zatem tylko dla $p = 5$ każda z liczb A i B to **liczba pierwsza**, co należało udowodnić.

Przykład 2

Wykażemy, że nie istnieją różne liczby pierwsze p, q, r takie, że liczba

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \text{ jest liczbą naturalną.}$$

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Zakładamy, że liczba $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ jest liczbą naturalną. Zatem istnieje taka liczba naturalna t , że

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = t$$

Przekształcamy lewą stronę zapisanej równości.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = t$$

$$\frac{qr+pr+pq}{pqr} = t \quad | \cdot pqr$$

$$qr + pr + pq = tpqr$$

$$qr = tpqr - pr - pq$$

$$qr = p(tpq - r - q)$$

Wynika z tego, że liczba qr dzieli się przez p . Otrzymujemy sprzeczność, bo liczby p, q, r to różne liczby pierwsze.

Zatem liczby p, q, r o żądanej własności nie istnieją, co należało wykazać.

Następny problem, którym się zajmiemy, związany jest z określaniem reszt z dzielenia liczb naturalnych.

Przykład 3

Liczba A w dzieleniu przez 7 daje resztę 4, a liczba B w dzieleniu przez 7 daje resztę 5. Wykażemy, że suma kwadratów liczb A i B w dzieleniu przez 7 daje resztę 6.

Liczba A w dzieleniu przez 7 daje resztę 4, zatem można ją zapisać w postaci

$$A = 7k + 4, \text{ gdzie } k \in \mathbb{N}.$$

Liczba B w dzieleniu przez 7 daje resztę 5, zatem można ją zapisać w postaci

$B = 7t + 5$, gdzie $t \in \mathbb{N}$.

Zapisujemy i przekształcamy sumę kwadratów liczb A i B .

$$A^2 + B^2 = (7k + 4)^2 + (7t + 5)^2$$

$$A^2 + B^2 = 49k^2 + 56k + 16 + 49t^2 + 70t + 25$$

$$A^2 + B^2 = 49k^2 + 56k + 49t^2 + 70t + 41$$

$$A^2 + B^2 = 7(7k^2 + 8k + 7t^2 + 10t + 5) + 6$$

Liczbę $A^2 + B^2$ można więc przedstawić w postaci

$A^2 + B^2 = 7w + 6$, gdzie $w = 7k^2 + 8k + 7t^2 + 10t + 5$ i jako suma liczb naturalnych w jest liczbą naturalną.

Oznacza to, że reszta z dzielenia sumy kwadratów liczb A i B w dzieleniu przez 7 daje resztę 6, co należało wykazać.

Pokażemy teraz wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia w teorii podzielności.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DRHXgc8kJ>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący zastosowania wzorów skróconego mnożenia w teorii podzielności liczb.

Przykład 4

Dane są liczby naturalne a, b, c . Wykażemy, że liczba $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielna przez 6, wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a + b + c$ jest podzielna przez 6.

Zauważmy, że

$a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1)$ – liczby $a - 1$, a , $a + 1$ to kolejne liczby naturalne, zatem ich iloczyn jest liczbą podzielną przez 6. Wynika z tego, że liczba $a^3 - a$ jest podzielna przez 6.

Podobnie

$b^3 - b = b(b^2 - 1) = b(b - 1)(b + 1)$ – liczba podzielna przez 6

$c^3 - c = c(c^2 - 1) = c(c - 1)(c + 1)$ – liczba podzielna przez 6

Suma liczb podzielnych przez 6 jest też podzielna przez 6.

$a^3 - a + b^3 - b + c^3 - c = (a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c)$ – liczba podzielna przez 6

Jeśli liczba $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielna przez 6 to i liczba $a + b + c$ musi być podzielna przez 6 i odwrotnie.

Zatem $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielna przez 6, wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a + b + c$ jest podzielna przez 6, co należało wykazać.

Przykład 5

Wykażemy, że liczba $A = n^5 - n$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1, jest podzielna przez 30.

Korzystając dwukrotnie ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, zapisujemy w postaci iloczynu wyrażenie określające liczbę A .

$$A = n^5 - n$$

$$A = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$$

$$A = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$$

Liczby $(n - 1)$, n , $(n + 1)$ to kolejne liczby naturalne, zatem ich iloczyn jest wielokrotnością liczby 6.

Teraz musimy tak przekształcić $n^2 + 1$, aby pokazać, że liczba A jest również wielokrotnością liczby 5 (bo $6 \cdot 5 = 30$).

$$A = (n - 1)n(n + 1)(n^2 - 4 + 5)$$

Zapisujemy iloczyn w postaci równoważnej sumy.

$$A = (n - 1)n(n + 1)(n^2 - 4) + 5(n - 1)n(n + 1)$$

$$A = (n - 1)n(n + 1)(n - 2)(n + 2) + 5(n - 1)n(n + 1)$$

$$A = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5(n - 1)n(n + 1)$$

Liczby $(n - 2)$, $(n - 1)$, n , $(n + 1)$, $(n + 2)$ to pięć kolejnych liczb naturalnych, zatem ich iloczyn dzieli się przez 6 i przez 5, a więc i przez 30.

Iloczyn $5(n - 1)n(n + 1)$ też jest podzielny przez 30.

Suma liczb podzielnych przez 30 jest też podzielna przez 30. Zatem liczba A jest podzielna przez 30, co należało wykazać.

Słownik

liczba pierwsza

liczba naturalna większa od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki – jedynkę i samą siebie

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady zamieszczone w animacji, pokazujące zastosowania wzorów skróconego mnożenia stopnia trzeciego w zadaniach związanych z podzielnością liczb naturalnych.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DqnMQXlBx>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej dowodzenia twierdzeń z teorii podzielności.

Polecenie 2

Wykaż, że każda z liczb $A = n^3 + 5n$, $B = n^3 - 19n$, $C = n^3 + 11n$ dla $n \in \mathbb{N}$ jest podzielna przez 6.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Dla $n \in \mathbb{N}_+$ kwadrat liczby naturalnej nieparzystej jest postaci:

☐ $8n + 4$

☐ $8n$

☐ $8n + 3$

☐ $8n + 1$

☐ $8n + 2$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Liczby p, q są liczbami pierwszymi. Wówczas równanie $p(p^2 + p + 1) - 3 = q$

☐ ma jedno rozwiązanie takie, że p to liczba parzysta, q – liczba nieparzysta.☐ nie ma rozwiązania.☐ ma jedno rozwiązanie takie, że obie liczby p, q są liczbami parzystymi.☐ ma nieskończenie wiele rozwiązań takich, że liczby p, q są liczbami nieparzystymi.

Ćwiczenie 3



Każda z liczb a, b, c daje w dzieleniu przez 3 inną resztę. Zaznacz wszystkie liczby podzielne przez 3.

☐ $D = a^2 + b^2 + c^2$

☐ $C = (a + b)(b + c)(c + a)$

☐ $A = a + b + c$

☐ $B = abc$

Ćwiczenie 4



Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie liczby.

Reszta z dzielenia liczby A przez 2 jest równa 1, a reszta z dzielenia tej liczby przez 3 jest równa 2. Wynika z tego, że reszta z dzielenia tej liczby przez 6 jest równa .

Reszta z dzielenia liczby B przez 2 jest równa 1, a reszta z dzielenia tej liczby przez 5 jest równa 3. Wynika z tego, że reszta z dzielenia tej liczby przez 10 jest równa .

Ćwiczenie 5



Liczby p i q są liczbami pierwszymi. Poukładaj w odpowiedniej kolejności rozwiązanie równania $p^2 - 2q^2 = 1$.

$$p^2 = 8 + 1$$



Prawa strona równania, czyli $2q^2$ jest też podzielna przez 8.



Zauważmy, że liczba p jest nieparzysta. Gdyby była to liczba parzysta, to strona prawa i lewa miałyby różną parzystość.



Liczby $p - 1$ i $p + 1$ to kolejne liczby parzyste.
Jedna z tych liczb jest podzielna przez 2, a druga przez 4.



$$p = -3 \text{ lub } p = 3$$



Iloczyn $(p - 1)(p + 1)$ jest podzielny więc przez 8.



Jedyna liczba parzysta pierwsza to 2, czyli $q = 2$.



Odpowiedź:

Jedyna para spełniająca warunki zadania to $p = 3, q = 2$.



$$p^2 - 1 = 2 \cdot 2^2$$



Przekształcamy równanie.

$$p^2 - 1 = 2q^2$$



Rozkładamy lewą stronę równania na czynniki.

$$(p - 1)(p + 1) = 2q^2$$



Zatem q jest liczbą parzystą.



$$p^2 = 9$$



Ponieważ p jest liczbą pierwszą, zatem $p = 3$.



Ćwiczenie 6



Liczby a, b, c, d są liczbami naturalnymi dodatnimi takimi, że $b^2 + c^2 = ad - bc$. Wykaż, że liczba $A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest złożona.

Ćwiczenie 7



Znajdź wszystkie liczby naturalne, dla których liczby $A = n^2 + n + 1$ i $B = n^2 + n + 3$ są liczbami pierwszymi.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że istnieje tylko jedna liczba pierwsza p , dla której liczba $A = 2^p + p^2$ jest liczbą pierwszą.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dowodzenie twierdzeń z teorii podzielności

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż:

- a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
- b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$;

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;

3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- udowadnia niektóre własności związane z podzielnością liczb naturalnych
- przekształca równoważnie wyrażenia algebraiczne, grupując wyrazy, wyłączając wspólny czynnik przed nawias
- stosuje wzory skróconego mnożenia, przekształcając wyrażenia algebraiczne
- stawia hipotezy i udowadnia je na drodze rozumowań wymagających stosowania nieszablonowych strategii
- wykorzystuje kompleksową wiedzę z teorii liczb, udowadniając twierdzenia z teorii podzielności

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- kłębek
- studium przypadku

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kłębek sznurka

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.
2. Uczniowie stoją w kręgu i rzucają do siebie kłębek sznurka. Uczeń, który złapie kłębek musi podać jedną informację dotyczącą podzielności liczb naturalnych, która może przydać się na lekcji. Uczeń, który odrzuca kłębek, zatrzymuje w dłoni kawałek sznurka. W ten sposób tworzy się sieć pajęczą, z której po wyczerpaniu informacji, uczniowie muszą się wypłatać – czym większa sieć, tym informacji było więcej.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj” i z animacjami. Następnie wybierają jeden z analizowanych

przypadków i układają oraz rozwiązują analogiczne zadanie.

2. Po zakończeniu tego etapu pracy, każda grupa prezentuje swoje zadanie na tablicy w formie twierdzenia i dowodu, uzasadniając przy tym wybór typu zadania.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
Liderzy grup przedstawiają refleksje na temat pracy grup, zaangażowania uczniów, problemów i ciekawych pomysłów.
2. Nauczyciel podsumowuje przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

[Dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacje można wykorzystać na zajęciach pokazujących zastosowanie wzorów skróconego mnożenia lub w czasie zajęć poświęconych metodom dowodzenia twierdzeń.