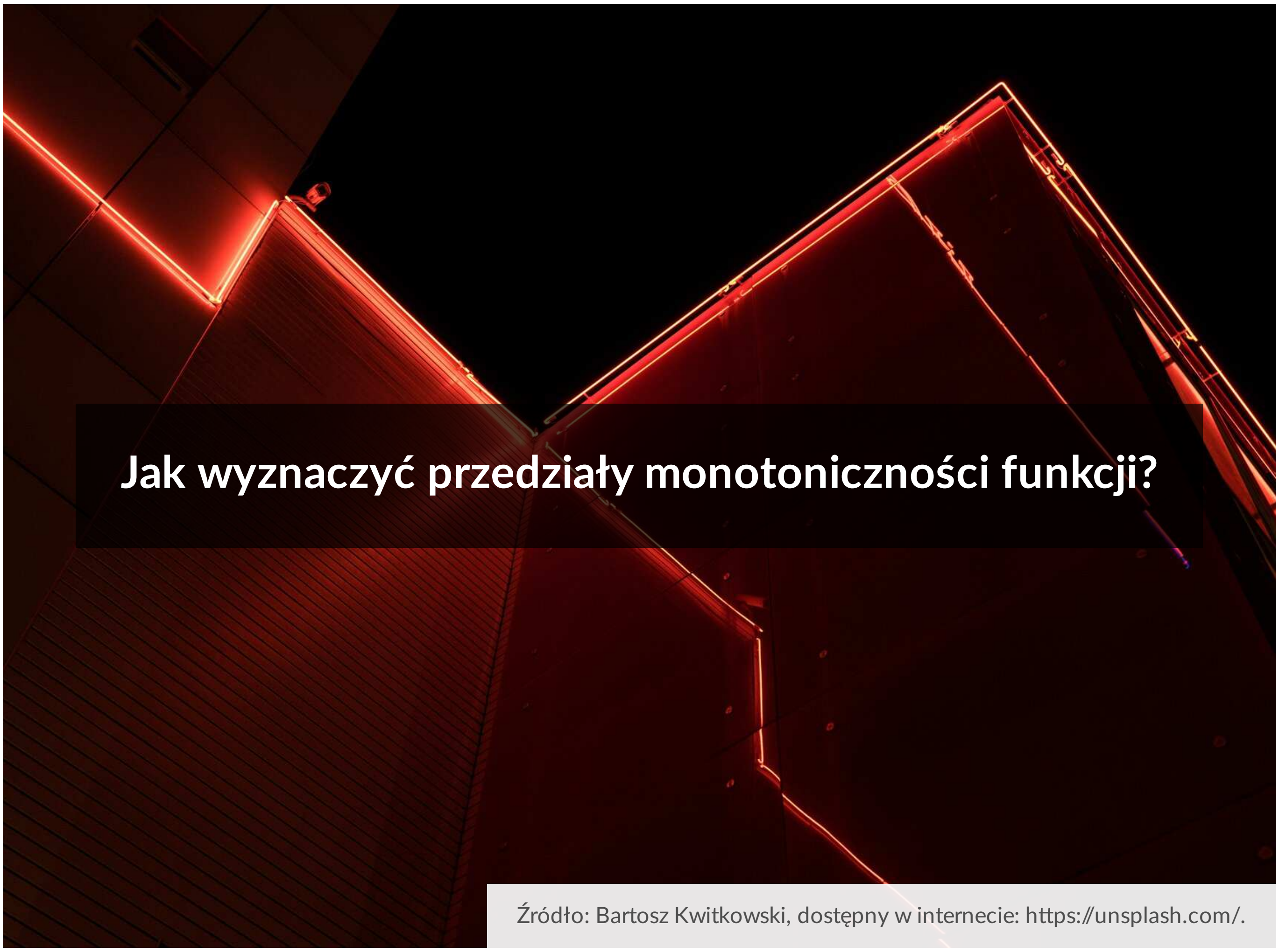
Jak wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji?

Jak wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji?



Źródło: Bartosz Kwitkowski, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Jednym z najważniejszych dzieł naukowych w historii nauki jest książka Izaaka Newtona *Matematyczne zasady filozofii przyrody*. W swoim słynnym dziele Newton przedstawił nowe narzędzie matematyczne służące m.in. do opisu praw fizyki i astronomii. Te nowatorskie metody, znane dziś jako rachunek różniczkowy, są szeroko wykorzystywane w różnych gałęziach nauki.

Badanie własności pochodnej funkcji jest pomocne między innymi w określaniu monotoniczności tej funkcji czy ustalaniu jej wartości największej lub najmniejszej. W tym materiale skupimy się na badaniu monotoniczności różnych funkcji.

> **Twoje cele**
>
> - Poznasz warunki wystarczające monotoniczności funkcji.
> - Nauczysz się jak wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji.

Przeczytaj

Twierdzenie: warunki wystarczające monotoniczności funkcji

Niech U oznacza dowolny przedział. Jeżeli dla każdego $x \in U$ funkcja różniczkowalna f spełnia warunek:

1. $f'(x) = 0$, to f jest stała na U;
2. $f'(x) > 0$, to f jest rosnąca na U;
3. $f'(x) \geqslant 0$, to f jest niemalejąca na U;
4. $f'(x) < 0$, to f jest malejąca na U;
5. $f'(x) \leqslant 0$, to f jest nierosnąca na U.

Zauważmy, że jeżeli $f'(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in U$, przy czym równość $f'(x) = 0$ zachodzi tylko dla skończonej liczby punktów tego przedziału, to funkcja jest rosnąca na U. Podobnie mamy dla funkcji malejącej.

Wniosek

Jeśli funkcja f jest rosnąca (malejąca) w przedziale (a, b) i jest ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$, to jest rosnąca (malejąca) w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Przykład 1

Wyznaczymy przedziały otwarte monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 - 3x$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \mathbb{R}$.

Obliczymy pochodną funkcji f.

Mamy $f'(x) = 3x^2 - 3$, $D_{f'} = D_f$.

Aby wyznaczyć przedziały monotoniczności sprawdzamy, kiedy pochodna funkcji f jest dodatnia, a kiedy ujemna (badamy "znak" pochodnej). W tym celu rozwiązujemy kolejno nierówności:

$f'(x) > 0$, czyli $x^2 - 1 > 0$.

Rozwiązaniem tej nierówności jest zbiór $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Następnie mamy $f^{'}(x) < 0$, czyli $x^2 - 1 < 0$.

Rozwiązaniem tej nierówności jest zbiór $x \in (-1, 1)$.

Stąd funkcja f rośnie w przedziałach otwartych $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$, a maleje w przedziale otwartym $(-1, 1)$.

Przykład 2

Zbadamy monotoniczność funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x \text{ dla } x \in \left\langle \frac{-1}{2}, 0 \right\rangle \\ \sin x \text{ dla } x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \end{cases}.$$

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \left\langle \frac{-1}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Funkcja jest przedziałami rosnąca.

W przedziale $\left\langle \frac{-1}{2}, 0 \right\rangle$ pochodna funkcji $f'(x) = 2x + 1 \geqslant 0$, więc funkcja jest rosnąca w tym przedziale.

W przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ pochodna funkcji $\cos x \geqslant 0$, więc funkcja jest również rosnąca w tym przedziale.

Przykład 3

Wyznaczymy przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

Zbadamy teraz „znak” pochodnej funkcji f.

Mamy:

$$f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}, D_{f^{'}} = D_f.$$

Funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów dziedziny, bo

$$\frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0$$

dla $|x| \neq 1$. (Wyrażenie w mianowniku jest zawsze dodatnie dla $|x| \neq 1$, a wyrażenie w liczniku zawsze ujemne, zatem cały ułamek przyjmuje tylko wartości ujemne).

Przykład 4

Wykażemy, że funkcja $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-2}$ jest rosnąca w każdym z przedziałów należących do dziedziny.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Obliczamy pochodną funkcji

$f'(x) = \frac{x^2-4x+7}{(x-2)^2}, D_{f'} = D_f$.

Zauważmy, że wyrażenie w liczniku przyjmuje wartości dodatnie w całej dziedzinie (ramiona paraboli skierowane ku górze, brak miejsc zerowych: $\Delta = -12 < 0$). Zatem pochodna funkcji jest w każdym z przedziałów należących do dziedziny dodatnia. Stąd funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów należących do dziedziny, czyli w każdym z przedziałów $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$.

Przykład 5

Wyznaczymy maksymalne przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Obliczymy pochodną funkcji:

$f' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}, D_{f'} = D_f$.

Zauważmy, że wyrażenie w mianowniku przyjmuje wartości dodatnie w całej dziedzinie. Zbadamy "znak" wyrażenia w liczniku. Rozwiązujemy kolejno nierówności:

$x^2 - 2x \geqslant 0, x(x-2) \geqslant 0$, stąd $x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty)$,

$x^2 - 2x \leqslant 0, x(x-2) \leqslant 0$, stąd $x \in \langle 0, 1) \cup (1, 2\rangle$.

Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, 0\rangle$, $\langle 2, \infty)$ oraz malejąca w przedziałach $\langle 0, 1)$, $(1, 2\rangle$.

Słownik

funkcja ciągła w przedziale domkniętym

> funkcję f nazywamy ciągłą w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału, tj. dla każdego punktu $x_0 \in \langle a, b \rangle$ istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem, a następnie wykonaj polecenia zamieszczone pod nim.

Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji.

Polecenie 2

Polecenie 3

Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 11$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Pewna funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna dla każdego $x \in (0, 4)$, a jej pochodna jest równa $f'(x) = \frac{30x}{\sqrt{4x-x^2}}$. Wyznacz maksymalne przedziały, w których ta funkcja jest rosnąca.

Ćwiczenie 6

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x-3}$.

Ćwiczenie 7

Zbadaj monotoniczność funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ dla } x \in \langle 0, 1\rangle \\ x - 1 \text{ dla } x \in (1, 2\rangle \end{cases}.$$

Czy funkcja jest rosnąca w całej swojej dziedzinie?

Ćwiczenie 8

Wykaż, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ dla } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 2 \text{ dla } x \in (2, 4\rangle \end{cases}$$

nie jest funkcją stałą na zbiorze $U = \langle 0, 1 \rangle \cup (2, 4\rangle$.

Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Niemczynowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony.

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3. stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;
4. oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;
5. stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne;
- kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna pojęcie pochodnej funkcji w punkcie;
- zna pojęcie stycznej do wykresu funkcji;
- zna pojęcie monotoniczności funkcji;
- wykorzystuje podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego do obliczania pochodnej funkcji;
- interpretuje współczynnik kierunkowy prostej;

- wyznacza przedziały monotoniczności funkcji stosując narzędzia rachunku różniczkowego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- liga zadaniowa
- metoda tekstu przewodniego

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale;
- tablica interaktywna/tablica;
- pisaki/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji o temacie: “Jak wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji?”.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3-4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z działu „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji “Film samouczek”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie Polecenia 1-2 z sekcji „ Film samouczek”. Następnie nauczyciel omawia je wraz z uczniami wyjaśniając ewentualne wątpliwości.

4. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 1-5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-7 z działu „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

- Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Monotoniczność funkcji
- Określanie przedziałów monotoniczności funkcji opisanej za pomocą wzoru
- Określanie przedziałów monotoniczności funkcji na podstawie wykresu

Wskazówki metodyczne:

- Film samouczek można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału wyznaczaniu przedziałów monotoniczności funkcji.