Co to jest szereg liczbowy?

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Pojęcie szeregu liczbowego, czyli wykonywania sumowania nieskończenie wielu składników, przez stulecia nastręczało trudności pokoleniom matematyków. Dopiero wykorzystanie pojęcia granicy ciągu sum częściowych spowodowało, że zniknęły problemy z interpretacją tego, jak sumować nieskończenie wiele elementów.

Twoje cele

- Zapoznasz się z pojęciem szeregu liczbowego.
- Nauczysz się obliczać sumy szeregów.

Przeczytaj

W tym materiale zastanowimy się, co to znaczy dodać do siebie nieskończenie wiele liczb i jaki jest wynik tego działania.

Weźmy przykład następujący:

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Może zrobimy tak:

$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 \ldots = 0.$

Czyli pogrupowaliśmy po dwa składniki sumy i dodalismy pogrupowane elementy i otrzymalismy 0.

A może spróbujemy tak:

$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 0) + \ldots = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 1.$

Tu równeż pogrupowaliśmy składniki, ale grupowanie zaczęliśmy od drugiego składnika. Ale tym razem wyszło nam 1, czyli wynik inny niż poprzednio.

A może oznaczmy sumę $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Wówczas zauważamy, że $s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots)$, czyli $s = 1 - s$, gdyż wyrażenie w nawiasie jest równe s.

Stąd otrzymujemy: $s = \frac{1}{2}$.

Zauważmy, że za każdym razem, w zależności od przyjętej metody, otrzymujemy inny wynik. To znaczy, że nasze podejście do sumowania nieskończenie wielu elementów jest niepoprawne - nie możemy dostawać różnych wyników przy sumowaniu tych samych elementów ustawionych w tej samej kolejności. Dodajmy, że wszystkie otrzymane wyniki w świetle przyjętej poniżej definicji są **BŁĘDNE**.

Musimy zdefiniować w taki sposób sumowanie, aby wynik był jednoznaczny.

> **Definicja: szeregu liczbowego**
>
> Szeregiem o wyrazach $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nazywamy ciąg, którego kolejnymi wyrazami są sumy początkowych wyrazów ciągu (a_n):
>
> $s_1 = a_1,$
>
> $s_2 = a_1 + a_2,$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$

...

Liczby $s_1, s_2, s_3, \ldots$ nazywane są sumami częściowymi szeregu o wyrazach $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Szereg o wyrazach $a_1, a_2, a_3, \ldots$ oznaczamy symbolem $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ lub symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jeżeli ciąg sum częściowych szeregu ma granicę, to nazywamy ją sumą szeregu, jeżeli suma szeregu jest skończona, to szereg nazywamy zbieżnym, jeżeli suma szeregu jest nieskończona lub jeżeli ciąg sum częściowych szeregu nie ma granicy, to szereg nazywamy rozbieżnym. Jeżeli szereg ma sumę skończoną, to oznaczamy ją tak jak szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ lub symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Przykład 1

Wracamy do przykładu $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$.

Rozwiązanie

Mamy ciąg $a_n = (-1)^{n+1}$.

Zobaczmy jak wygląda ciąg sum częsciowych:

$s_1 = 1,$

$s_2 = 1 - 1 = 0,$

$s_3 = 1 - 1 + 1 = 1,$

$s_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0,$

i tak dalej.

Zatem ciąg (s_n) jest ciągiem $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ rozbieżnym.

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ jest szeregiem rozbieżnym.

Przykład 2

Zbadamy zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Rozwiązanie

Zapiszmy kolejne sumy częściowe ciągu $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$:

$s_1 = \sqrt{2} - \sqrt{1},$

$s_2 = \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{1},$

$s_3 = \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{4} - \sqrt{1},$

...

Zatem wzór ciągu sum częściowych jest następujący:

$s_n = \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \ldots + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) =$

$= \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1.$

Ponieważ

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}\right) = +\infty,$

zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ jest rozbieżny.

Przykład 3

Zbadamy zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Rozwiązanie

Zapiszmy kolejne sumy częściowe ciągu $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$:

$s_1 = \frac{1}{2}$

$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Możemy zauważyć, że sumy częściowe to sumy początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = \frac{1}{2}$ i ilorazie $q = \frac{1}{2}$. Zatem możemy zastosować wzór na sumę początkowych wyrazów:

$s_n = \frac{1}{2} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

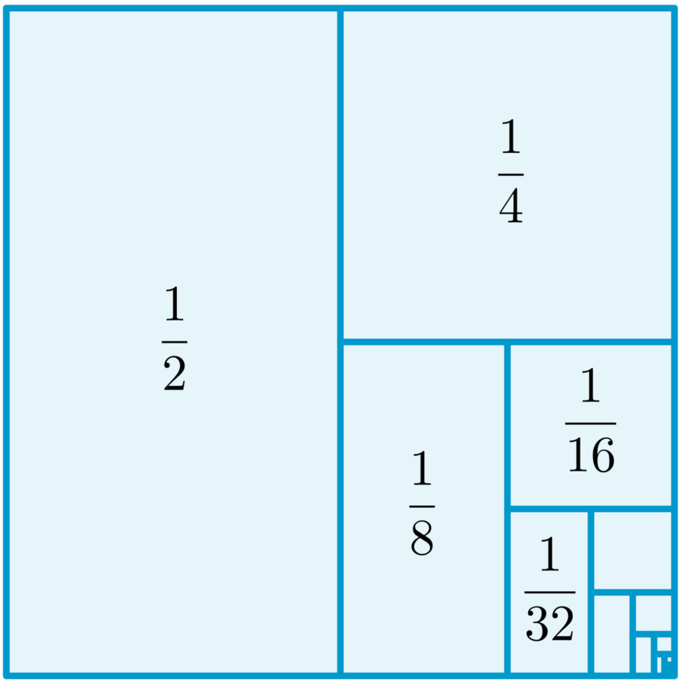
czyli

$s_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

Ponieważ ciąg $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ zmierza do 0, zatem granicą ciągu $s_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest 1.

Wobec tego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest zbieżny do 1.

Ten przykład możemy zwizualizować na poniższym rysunku: w kwadracie o boku 1 sumujemy pola prostokątów o polach kolejno: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ Łatwo zauważyć, że prostokąty te wypełniają cały kwadrat, czyli nieskończona suma wszystkich pól prostokątów jest równa 1.



Przykład 4

Zbadamy zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy znaną zależność: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Wówczas ciąg sum częściowych szeregu $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ma postać:

$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} =$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Zauważmy, że ciąg $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ jest zbieżny i jego granicą jest 1.

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ jest zbieżny.

Przykład 5

Zbadamy zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy zależność podobną do tej z poprzedniego przykładu:
$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$.

Wówczas ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ma postać:

$s_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

Zauważmy, że ciąg $s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$ jest zbieżny i jego granicą jest $\frac{1}{2}$.

Zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ jest zbieżny.

Przykład 6

Zbadamy zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

Rozwiązanie

Ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n$ ma postać:

$s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$,

czyli

$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Ciąg $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$ jest rozbieżny do $+\infty$, zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n$ jest rozbieżny.

Przykład 7

Mając dany ciąg sum częściowych $s_n = 2 - \frac{1}{n^2}$ szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ znaleźć wzór ciągu (a_n).

Rozwiązanie

Dla liczb naturalnych $n > 1$ możemy zauważyć, że zachodzi następująca zależność:

$s_n - s_{n-1} = (a_1 + a_2 + \ldots. + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots. + a_{n-1}) = a_n$.

Zatem w przypadku ciągu z zadania możemy zapisać:

$a_n = 2 - \frac{1}{n^2} - \left(2 - \frac{1}{(n-1)^2}\right) = \frac{n^2-(n-1)^2}{n^2(n-1)^2} = \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$.

Osobno obliczymy wzór na a_1:

$a_1 = s_1 = 1$.

Ważne!

Zwróćmy uwagę na to, że w ostatnim przykładzie wyraz a_1 był obliczany osobno. Dlaczego to jest takie ważne?

Zauważmy, że gdybyśmy wzięli ciąg sum częściowych $s_n = 1 - \frac{1}{n^2}$ szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, to dla liczb naturalnych $n > 1$, ciąg (a_n) ma taki sam wzór, jak w przykładzie poprzednim. Ciągi różnią się tylko pierwszym wyrazem.

Słownik

suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

- $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$, gdy $q \neq 1$,
- $s_n = n \cdot a_1$, gdy $q = 1$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie na tej podstawie wykonaj polecenie 2.

Polecenie 2

Zaznacz prawidłową odpowiedź. Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-1)(5n+4)}$ jest równa:

- $\frac{1}{30}$.
- $\frac{1}{25}$.
- $\frac{1}{20}$.
- $\frac{1}{15}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Co to jest szereg liczbowy?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy. Uczeń:

1. oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
2. oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach:
   a) $\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n(1 - a_n) \end{cases}$,
   b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2. rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje pojęcie szeregu liczbowego,
- oblicza sumy szeregów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat zajęć: „Co to jest szereg liczbowy?”
2. uczniowie tworząc mapę myśli przypominają pojęcia ciągu, ciągu arytmetycznego, ciągu geometrycznego oraz granicy ciągu.
3. Uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Uczniowie w parach wykonują pozstałe ćwiczenia interaktywne, a następnie porównują swoje odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

3. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie analizują infografikę i wykonują polecenia z nią związane.

Materiały pomocnicze:

- Granica ciągu nieskończonego
- Przykłady ciągów zbieżnych

Wskazówki metodyczne:

Infografika można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy na temat pojęcia szeregu liczbowego.