



Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie?

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Poznaliśmy już definicję granicy funkcji w punkcie zarówno według Heinego, jak i według Cauchy'ego, a także podstawowe sposoby sprawdzania, czy funkcja posiada granicę w zadanym punkcie. Dotychczas, aby stwierdzić, czy funkcja posiada granicę w danym punkcie, korzystaliśmy z definicji lub z granic jednostronnych. Często wygodniej jest spróbować obliczyć granicę bezpośrednio. Temat ten poświęcimy na przedstawienie metod obliczania granic pewnych typów funkcji.

Twoje cele

- Dowiesz się, co to są funkcje elementarne.
- Obliczysz granice wybranych funkcji elementarnych w punktach należących do ich dziedziny.
- Obliczysz granice wybranych funkcji elementarnych w punktach nienależących do ich dziedziny.

Przeczytaj

Czym są funkcje elementarne?

Zanim przejdziemy do metod obliczania granic funkcji, dowiemy się, jakie funkcje zaliczamy do tzw. funkcji elementarnych.

Funkcje elementarne

Do funkcji elementarnych zaliczamy następujące funkcje

- wielomiany (w szczególności funkcje liniowe i kwadratowe),
- funkcje wymierne,
- funkcje wykładnicze,
- funkcje logarytmiczne,
- funkcje trygonometryczne,
- funkcje typu $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Ponadto funkcją elementarną jest suma, różnica, iloczyn, iloraz oraz złożenie dowolnych dwóch funkcji elementarnych.

Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie?

Dla funkcji elementarnych prawdziwa jest następująca własność?

Własność: Granica funkcji elementarnej w punkcie

Jeżeli funkcja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją elementarną oraz $x_0 \in D_f$, to funkcja f posiada granicę w punkcie x_0 oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Przykład 1

Korzystając z powyższej własności, obliczmy poniższe granice.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3}{x-1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} 3^{2x-1}$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} \log_4(x^2 + 7)$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x + \pi)$$

Rozwiązanie

Ad 1.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{(-1)^2+3}{-1-1} = \frac{4}{-2} = -2.$$

Ad 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3^{2x-1} = 3^{2 \cdot 0 - 1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Ad 3.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \log_4(x^2 + 7) = \log_4(3^2 + 7) = \log_4 16 = 2.$$

Ad 4.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x + \pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1.$$

Powyższą własność możemy stosować jedynie w przypadku, gdy punkt w którym liczymy granicę należy do dziedziny funkcji elementarnej. Poniższe przykłady pokazują, w jaki sposób możemy próbować obliczyć granice pewnych typów funkcji w punktach nienależących do ich dziedziny.

Przykład 2

Obliczmy granicę

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+3x-2}{x^2+3x+2}.$$

Rozwiązanie

Rozpocznijmy od wyznaczenia dziedziny funkcji $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^2+3x+2}$. W tym celu wyznaczamy miejsca zerowe mianownika.

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1.$$

Stąd

$$x_1 = \frac{-3-1}{2} = -2 \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

Zatem $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$. Punkt $x_0 = -2$ nie należy do dziedziny funkcji f , więc nie możemy zastosować wcześniejszej własności. Aby obliczyć granicę funkcji f uprościmy jej

wzór. W tym celu zapisujemy licznik i mianownik w **postaci iloczynowej**. Miejsca zerowe mianownika już policzyliśmy, policzmy zatem miejsca zerowe licznika.

$$\Delta = 3^2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 + 16 = 25.$$

Stąd

$$x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2 \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}.$$

Wzór funkcji f możemy więc zapisać następująco

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^2+3x+2} = \frac{(x+2)(2x-1)}{(x+2)(x+1)} = \frac{2x-1}{x+1}.$$

dla $x \in D_f$. Zatem

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+3x-2}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2 \cdot (-2) - 1}{-2 + 1} = 5.$$

Przykład 3

Obliczymy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x-1}}.$$

Rozwiązanie

Na początek wyznaczmy dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x-1}}$. Pierwiastek kwadratowy możemy obliczyć tylko z liczb nieujemnych. Zatem musi być spełniony warunek $x - 1 \geq 0$. Ponadto nie możemy dzielić przez zero, czyli $x - 1 \neq 0$. Ostatecznie $D_f = (1, +\infty)$. Widzimy stąd, że w punkcie $x_0 = 1$ możemy obliczyć tylko granicę prawostronną. Ponieważ $x_0 = 1 \notin D_f$, więc nie możemy podstawić liczby 1 do wzoru funkcji. Spróbujmy zatem ją uprościć. W tym celu zapiszemy licznik w **postaci iloczynowej**. Ponieważ $\Delta = 1 + 8 = 9$ więc

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Stąd otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x-1}(x+2)) = 0 \cdot 3 = 0.$$

Przykład 4

Obliczymy granicę

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}}.$$

Rozwiązanie

Zaczniemy od wyznaczenia dziedziny funkcji $f(x) = \frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}}$. Mamy

$$1. x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$2. 2 - \sqrt{x+1} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 2 \Rightarrow x+1 \neq 4 \Rightarrow x \neq 3$$

Podsumowując: $D_f = \langle -1, 3 \rangle \cup (3, +\infty)$. Zatem, aby obliczyć granicę naszej funkcji w punkcie $x_0 = 3$, musimy najpierw przekształcić jej wzór do innej postaci. Dążymy do tego, aby dla $x_0 = 3$ mianownik nie był równy zero. W tym celu pomnożymy licznik i mianownik funkcji przez wyrażenie $2 + \sqrt{x+1}$. Otrzymamy wówczas

$$f(x) = \frac{(x-3)(2+\sqrt{x+1})}{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})}.$$

W mianowniku korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na [różnicę kwadratów](#)

$$f(x) = \frac{(x-3)(2+\sqrt{x+1})}{2^2 - \sqrt{x+1}^2} = \frac{(x-3)(2+\sqrt{x+1})}{3-x} = -2 - \sqrt{x+1}.$$

Stąd nasza granica jest równa

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} (-2 - \sqrt{x+1}) = -2 - \sqrt{3+1} = -4.$$

Słownik

różnica kwadratów

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

postać iloczynowa funkcji kwadratowej

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2), \text{ gdzie}$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą galerią, w której pokazano, w jaki sposób można obliczyć granice wybranych funkcji złożonych. Korzystając z przedstawionych w galerii metod, wykonaj polecenia zamieszczona poniżej.

Polecenie 2

Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left(\frac{x^3 - \pi x^2}{6x^2} \right).$$

Polecenie 3

Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow -4} [\log_8(4 - 7x) - \log_8(x + 8)].$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6} =$$

☐ 3

☐ 1

☐ -1

☐ 2

Ćwiczenie 2



Wskaż granice, które są równe 1.

☐ $\lim_{x \rightarrow -1} 3^{x+1}$

☐ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x+4}{x+4}$

☐ $\lim_{x \rightarrow 2} \log_2(3x - 4)$

☐ $\lim_{x \rightarrow 3} \sin(2x - 6)$

Ćwiczenie 3



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{1-\sqrt{5-2x}} =$$

☐ -2

☐ 1

☐ -4

☐ 4

Ćwiczenie 4



Wskaż granice, które są mniejsze od 1.

☐ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2x}{2x}$

☐ $\lim_{x \rightarrow 0} 3^{\cos(\pi+x)}$

☐ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

☐ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$

Ćwiczenie 5



$$\lim_{x \rightarrow 2} [\log_3(x+1) + 2\log_3(2x+5)] =$$

☐ 3

☐ 6

☐ 4

☐ 5

Ćwiczenie 6



Wskaż wartości podanych granic.

	$\frac{1}{2}$	2	-1
$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x^2+x+6}$	☐	☐	☐
$\lim_{x \rightarrow 2} 4^{\frac{x-3}{2}}$	☐	☐	☐
$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \log_3\left(\frac{x}{x+1}\right)$	☐	☐	☐

Ćwiczenie 7



Połącz w pary granice z ich poprawnymi wartościami.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2} =$$

5

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} =$$

-6

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3} =$$

0

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-6x+9}{x-3} =$$

12

Ćwiczenie 8



Przeciągnij w puste pola poprawne liczby.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{1-\sqrt{x+2}} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{2-\sqrt{3x-5}} = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{3-\sqrt{4x+1}} = \boxed{}$$

$\frac{1}{3}$

-2

-4

-6

$-\frac{4}{3}$

2

Ćwiczenie 9



Przenieś granice o tych samych wartościach do wskazanych obszarów.

$\frac{1}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \log_2(6x + 6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3^{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x^2 + x + 3}$$

3

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+5x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{6x-18}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3^{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \log_8\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$$

1

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza granice funkcji elementarnych poprzez podstawienie wartości granicznej do wzoru funkcji;
- wykorzystuje wzory skróconego mnożenia do upraszczania wzorów funkcji w celu obliczenia ich granicy.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda sytuacyjna;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie?” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązywania ćwiczeń w temacie: „Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie?”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Postać iloczynowa funkcji kwadratowej](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie?”.