Pierwiastek arytmetyczny drugiego stopnia

Pierwiastek arytmetyczny drugiego stopnia

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

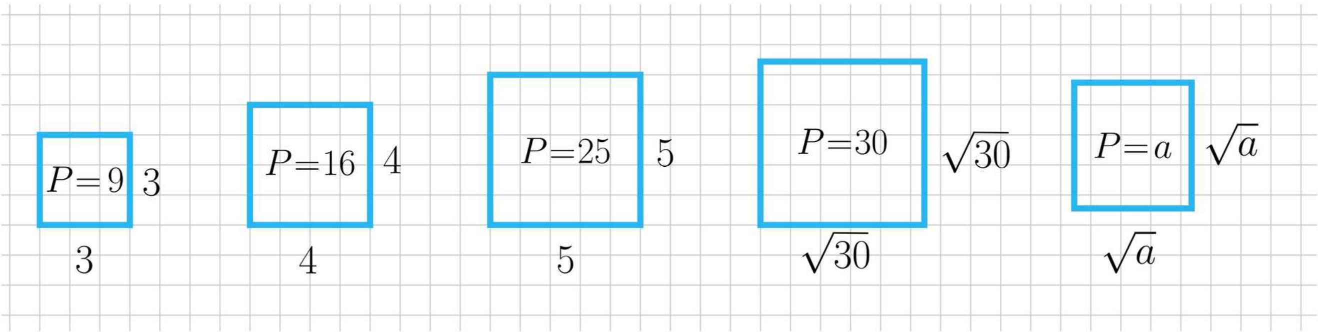
Nie zawsze pierwiastek z liczby oznaczano tak jak dziś, czyli $\sqrt{\square}$. Początkowo symbol pierwiastka nie zawierał poziomej kreski na górze (tzw. *vinculum*) i wyglądał tak $\surd$. Dziś pierwiastek z sumy liczb a i b zapisujemy jako $\sqrt{a+b}$, ale dawniej pisano $\surd(a+b)$. Nawias potrzebny był, aby zaznaczyć, gdzie kończy się wyrażenie podpierwiastkowe. Z czasem to *vinculum* przejął rolę nawiasu (dzięki Kartezjuszowi w XVII wieku). Początki symbolu $\surd$ datuje się na wiek XV, ale samo pojęcie pierwiastkowania pojawiało się w różnych miejscach i w różnych kontekstach dużo wcześniej.

Twoje cele

- Zastosujesz definicję pierwiastka drugiego stopnia.
- Zastosujesz własności pierwiastkowania.
- Usuniesz niewymierność z mianownika ułamka.

Przeczytaj

Na początkowym etapie edukacji matematycznej czasami pierwiastek (kwadratowy) z liczby a definiuje się jako długość boku kwadratu o polu a.



Ta prosta i obrazowa definicja akcentuje fakt, że i liczba podpierwiastkowa i wynik pierwiastkowania są liczbami dodatnimi (wszak, pole i długość boku kwadratu są liczbami dodatnimi). Dodatkowo przyjmujemy, że pierwiastek z zera jest równy zeru.

Definicja: Pierwiastek kwadratowy (drugiego stopnia)

Formalna definicja pierwiastka kwadratowego (drugiego stopnia) jest następująca

$$\sqrt{a} = b \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a = b^2,\text{ dla } a \geq 0,\, b \geq 0.$$

Zatem pierwiastkiem (kwadratowym, drugiego stopnia) z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b, która podniesiona do kwadratu daje liczbę a.

Przykład 1

$\sqrt{-9}$ nie jest liczbą rzeczywistą, bo -9 nie jest liczbą nieujemną.

$\sqrt{4} = 2$, bo $2 \geq 0$ i $2^2 = 4$.

$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{8}{9}$, bo $\frac{8}{9} \geq 0$ i $\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{81}$.

$\sqrt{1\frac{11}{25}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$, bo $\frac{6}{5} \geq 0$ i $\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}$.

$\sqrt{1,21} = 1,1$, bo $1,1 \geq 0$ i $(1,1)^2 = 1,21$.

Przykład 2

Wyrażenie $\sqrt{x}$ ma sens dla każdej nieujemnej liczby rzeczywistej x, czyli dla $x \geq 0$.

Wyrażenie $\sqrt{x-1}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x - 1 \geq 0$, czyli dla $x \geq 1$.

Wyrażenie $\sqrt{x+1}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x+1 \geq 0$, czyli dla $x \geq -1$.

Wyrażenie $\sqrt{1-x}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $1-x \geq 0$, czyli dla $x \leq 1$.

Wyrażenie $\sqrt{-x-1}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $-x-1 \geq 0$, czyli dla $x \leq -1$.

Zbiór wszystkich liczb, dla których dane wyrażenie zawierające zmienną x ma sens liczbowy nazywamy dziedziną wyrażenia algebraicznego. Możemy zatem powiedzieć, że dziedziną wyrażenia $\sqrt{x}$ jest zbiór wszystkich liczb nieujemnych.

Przykład 3

Ponieważ niewykonalne jest dzielenie przez 0, wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ma sens dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x, czyli dla $x > 0$.

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x-1 > 0$ (uwzględniamy przy tym fakt, że mianownik nie może być równy zeru), czyli dla $x > 1$.

Ponieważ mianownik ułamka nie może być równy 0, wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x+1 > 0$, czyli dla $x > -1$.

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $1-x > 0$, czyli dla $x < 1$.

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{-x-1}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $-x-1 > 0$, czyli dla $x < -1$.

Przykład 4

$\sqrt{3^2} = 3$

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{5^2} = 5$

$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

Przykład 5

Zwróć uwagę, że liczby $\pi - 2$ i $2 - \pi$ są liczbami przeciwnymi $\pi - 2 = -(-\pi + 2) = -(2 - \pi)$.

Zatem $\sqrt{(\pi-2)^2} = \pi - 2$, bo $\pi - 2 > 0$.

Zauważmy, że liczba $2-\pi$ jest ujemna, więc, aby obliczyć $\sqrt{(2-\pi)^2}$, wykonamy przekształcenia

$$\sqrt{(2-\pi)^2}=\sqrt{[-(-2+\pi)]^2}=\sqrt{[-(\pi-2)]^2}=\sqrt{(\pi-2)^2}=\pi-2.$$

Ważne!

Uważaj na wyrażenia postaci $\sqrt{x^2}$. Często popełnianym błędem jest uznawanie, że pierwiastek i kwadrat wzajemnie się znoszą (redukują) i rozważane wyrażenie jest równe x. Powyższe przykłady pokazują, że to nieprawda. W rzeczywistości rozważane wyrażenie jest równe wartości bezwzględnej z x, czyli $\sqrt{x^2}=|x|$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Natomiast $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$, ale ta równość zachodzi tylko i wyłącznia dla $x\geq 0$.

Własność: Własności pierwiastkowania

Dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b zachodzą równości

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b},$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ o ile } b\neq 0.$$

Przykład 6

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{36}=6$$

$$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{20}{5}}=\sqrt{4}=2$$

$$\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

Przykład 7

Korzystając z własności pierwiastkowania usuniemy niewymierności z mianowników następujących ułamków:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

b) $\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Zwróć uwagę na kolejność wykonywania działań w wyrażeniach typu $\sqrt{a^2+b^2}$. Pierwiastkowanie nie jest rozdzielne względem dodawania, więc powyższe wyrażenie nie jest równe wyrażeniu $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$. Rozważmy $\sqrt{3^2+4^2}$. Poprawne obliczenie wygląda następująco $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$. Ponadto $\sqrt{3^2}+\sqrt{4^2}=3+4=7$, co oczywiście nie jest równe poprawnie obliczonej wartości wyrażenia $\sqrt{3^2+4^2}$, czyli liczbie 5.

Przykład 8

Aby dodać pierwiastki $\sqrt{75}+\sqrt{48}$, możemy postąpić następująco

$\sqrt{75}+\sqrt{48}=\sqrt{25\cdot 3}+\sqrt{16\cdot 3}=5\sqrt{3}+4\sqrt{3}=9\sqrt{3}.$

Słownik

pierwiastek kwadratowy

pierwiastkiem kwadratowym z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b, której kwadrat jest równy a, czyli $\sqrt{a}=b \Leftrightarrow a=b^2$, dla $a\geq 0$, $b\geq 0$

dziedzina wyrażenia algebraicznego

zbiór tych i tylko tych liczb, dla których dane wyrażenie ma sens

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Test

Pierwiastek arytmetyczny

Sprawdzisz:

- swoją wiedzę na temat pierwiastka i pojęć z nim związanych;
- swoją wiedzę na temat zawiązku potęgowania z pierwiastkami.

Liczba pytań:

5

Limit czasu:

8 min

Twój ostatni wynik:

-

Trwa wczytywanie...

Polecenie 2

Ułóż test złożony z pięciu pytań, każde z trzema odpowiedziami. Ułożony test daj do rozwiązania koledze lub koleżance z klasy.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Sprowadź do najprostszej postaci.

a) $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}}{\sqrt{98}-\sqrt{50}}$

b) $\frac{\sqrt{48}+\sqrt{12}-\sqrt{27}}{\sqrt{108}-\sqrt{75}}$

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pierwiastek arytmetyczny drugiego stopnia

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:
3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zastosuje definicję pierwiastka drugiego stopnia;
- zastosuje własności pierwiastkowania;
- usunie niewymierność z mianownika ułamka.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- drzewo decyzyjne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat: „Pierwiastek arytmetyczny drugiego stopnia”.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 - „Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.” z sekcji „Test samosprawdzający”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Pierwiastki kwadratowe i sześcienne

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Test samosprawdzający" do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Pierwiastek arytmetyczny drugiego stopnia".