Jak obliczyć granicę niewłaściwą funkcji w punkcie?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Symulacja interaktywna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Jak obliczyć granicę niewłaściwą funkcji w punkcie?

Źródło: Immo Wegmann, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Granice funkcji w punkcie, zarówno właściwe, jak i niewłaściwe, są często spotykane w praktycznych zastosowaniach matematyki, np. w analizie przebiegu funkcji. W tym materiale nauczysz się obliczać wartości granic, przy wykorzystaniu dwóch równoważnych definicji podanych w XIX wieku przez słynnych matematyków Augustina Louisa Cauchy’ego oraz Heinricha Eduarda Heinego. Byli to matematycy innych narodowości - francuskiej i niemieckiej. Nie współpracowali ze sobą, ale ich praca wspólnie nadała nowy wymiar analizie matematycznej.

Granice niewłaściwe w punkcie bardzo często wskazują też na to, że funkcja jest nieciągła. Przekonasz się w dalszej części materiału, że nie zawsze tak musi być oraz że granice jednostronne nie muszą przyjmować takich samych wartości.

Twoje cele

- Zbadasz, czy zadana funkcja ma granicę niewłaściwą w punkcie.
- Wyznaczysz parametry funkcji wymiernej, aby miała granicę niewłaściwą w punkcie.

Przeczytaj

Granica funkcji w punkcie jest zazwyczaj liczbą rzeczywistą, nazywamy taką granicę granicą właściwą. Nie zawsze tak jest, czasami taka granica może być nieskończona, nazywamy ją wówczas granicą niewłaściwą.

Definicja granicy niewłaściwej w punkcie

Przypomnijmy sobie dwie, równoważne definicje granic niewłaściwych funkcji w punkcie, według Heinego i Cauchy'ego.

> **Definicja: granicy niewłaściwej w punkcie, według Heinego**
>
> Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą równą $+\infty$, gdy poza samym punktem x_0 pewne jego otoczenie należy do dziedziny tej funkcji, oraz dla dowolnego ciągu argumentów x_n z dziedziny, dążącego do x_0, wartości $f(x_n)$ dążą do $+\infty$.

> **Definicja: granicy niewłaściwej w punkcie, według Cauchy'ego**
>
> Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą równą $+\infty$, gdy poza samym punktem x_0 pewne jego otoczenie należy do dziedziny tej funkcji, oraz dla dowolnie dużej wartości dodatniej liczby M istnieje taka liczba dodatnia δ, że dla wszystkich argumentów x z dziedziny pomiędzy $x_0 - \delta$ i $x_0 + \delta$ wartości $f(x)$ są większe od M.

Symbolicznie zapisujemy to jako:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Podobnie definiujemy granicę niewłaściwą równą $(-\infty)$.

> **Przykład 1**

Sprawdzimy, używając definicji Heinego, czy funkcja $f(x) = \frac{-1}{x^2}$, $x \neq 0$, ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę niewłaściwą.

Rozwiązanie

Weźmy dowolny ciąg argumentów x_n, dążący do zera. Wówczas wiemy, że ciąg kwadratów tych argumentów, x_n^2, również dąży do zera, przyjmując tylko wartości dodatnie. Zatem ciąg przeciwieństw odwrotności kwadratów, $\frac{-1}{x_n^2}$, dąży do $(-\infty)$, czyli granicą funkcji f w $x_0 = 0$ jest $(-\infty)$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty.$$

Przykład 2

Sprawdzimy, używając definicji Cauchy'ego, czy funkcja $f(x) = \frac{-1}{x^2}$, $x \neq 0$, ma w punkcie $x_0 = 0$ granicę niewłaściwą.

Rozwiązanie

Weźmy dowolnie dużą liczbę dodatnią M. Jeżeli zdefiniujemy liczbę dodatnią δ równą odwrotności pierwiastka z M, czyli $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, to wówczas dla wszystkich niezerowych wartości x większych od $\left(-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$ i mniejszych od $\frac{1}{\sqrt{M}}$ wartości funkcji f są mniejsze od $(-M)$, i tym samym granicą funkcji f w $x = 0$ jest $(-\infty)$.

Możemy sprawdzić empirycznie, jak wygląda znajdowanie wartości δ w zależności od wartości M na przykładzie funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D13DuFZB8

Jak widać, im większa wartość M, tym mniejsza jest wartość δ – węższy jest zakres argumentów, dla których wartości funkcji są powyżej zadanej linii – ale za każdym razem można taką wartość znaleźć.

Znajdowanie granic niewłaściwych

Jeżeli funkcja jest ciągła w danym punkcie, to z definicji ciągłości wiemy, że jej granice jednostronne są równe wartości funkcji w tym punkcie. Ponieważ funkcje nie mogą mieć wartości nieskończonych, tym samym w punkcie, w którym funkcja jest ciągła, nie możemy nigdy otrzymać granicy niewłaściwej.

Przykład 3

Sprawdzimy, czy funkcja $y = x^2 - 3$ może mieć w którymś punkcie granicę niewłaściwą.

Rozwiązanie

Nie może, bo jest funkcją ciągłą.

Ważne!

Jeżeli funkcja nie jest ciągła w punkcie, to wciąż nie musi mieć granicy niewłaściwej, może nawet mieć granicę skończoną.

Przykład 4

Sprawdzimy, czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{gdy } x \neq 1 \\ 0 & \text{gdy } x = 1 \end{cases}$$

może mieć w którymś punkcie granicę niewłaściwą.

Rozwiązanie

Dla żadnego punktu poza $x \neq 1$ nie może, bo jest funkcją ciągłą. W punkcie $x = 1$ nie jest ciągła, ale również nie posiada granicy niewłaściwej, bo posiada granicę skończoną, równą -2.

Dla posiadania granicy niewłaściwej funkcja nie może być w danym punkcie ciągła, ani nie może posiadać tam granicy skończonej. Łatwo to zweryfikować, gdy funkcja jest zadana prostym wzorem, lub gdy zna się wykres funkcji. Jeżeli funkcja jest zadana trudnym wzorem, na przykład jest funkcją wymierną, trzeba dokonać niezbędnych obliczeń.

Przykład 5

Zbadamy, czy funkcja

$$f(x) = \frac{x^3+x+2}{x^2-1}$$

ma w punktach $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$ granice niewłaściwe.

Rozwiązanie

Zachowanie w punkcie $x_1 = 0$ sprawdzamy, podstawiając $x_1 = 0$ do wzoru funkcji, otrzymując

$$f(x_1) = f(0) = \frac{0^3+0+2}{0^2-1} = \frac{2}{-1} = -2,$$

czyli funkcja f w punkcie $x_1 = 0$ posiada granicę skończoną równą (-2).

Dla punktu $x_2 = 1$ mamy:

$$\lim_{x \to x_2^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3+x+2}{x^2-1} = \left[\frac{1^3+1+2}{1^2-1}\right] = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty,$$

i

$$\lim_{x \to x_2^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3+x+2}{x^2-1} = \left[\frac{1^3+1+2}{1^2-1}\right] = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty.$$

Zatem funkcja f w punkcie $x_2 = 1$ posiada jednostronne granice niewłaściwe.

Słownik

granica właściwa

granica funkcji w punkcie, która jest liczbą rzeczywistą

granica niewłaściwa

granica funkcji w punkcie, która jest nieskończona ($-\infty$ lub $+\infty$)

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Poniższa symulacja interaktywna pomoże Ci zrozumieć, jak obliczyć granicę niewłaściwą funkcji w punkcie. Pozwoli sprawdzić w praktyce, na przykładzie funkcji $y = \frac{x^2}{x^2-a^2}$ granicę przy dowolnej wartości a.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DUAZd8Awd

Polecenie 2

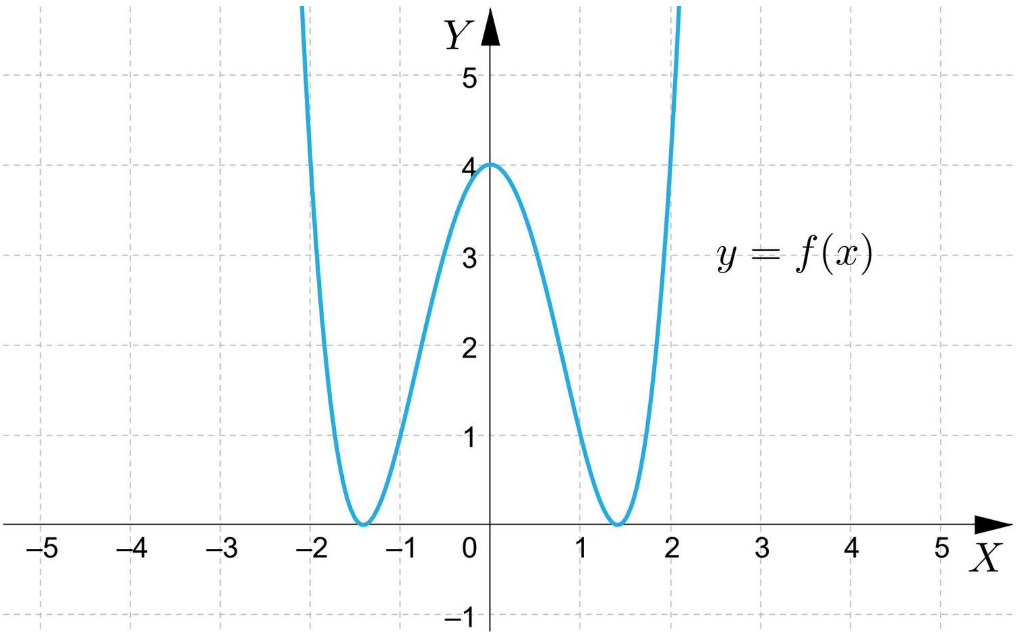
Dla jakich rzeczywistych wartości parametru a funkcja posiada punkt, w którym ma granicę niewłaściwą? Skorzystaj z powyższego wykresu ustawiając suwak wartości parametru a na dowolnie wybrane wartości.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

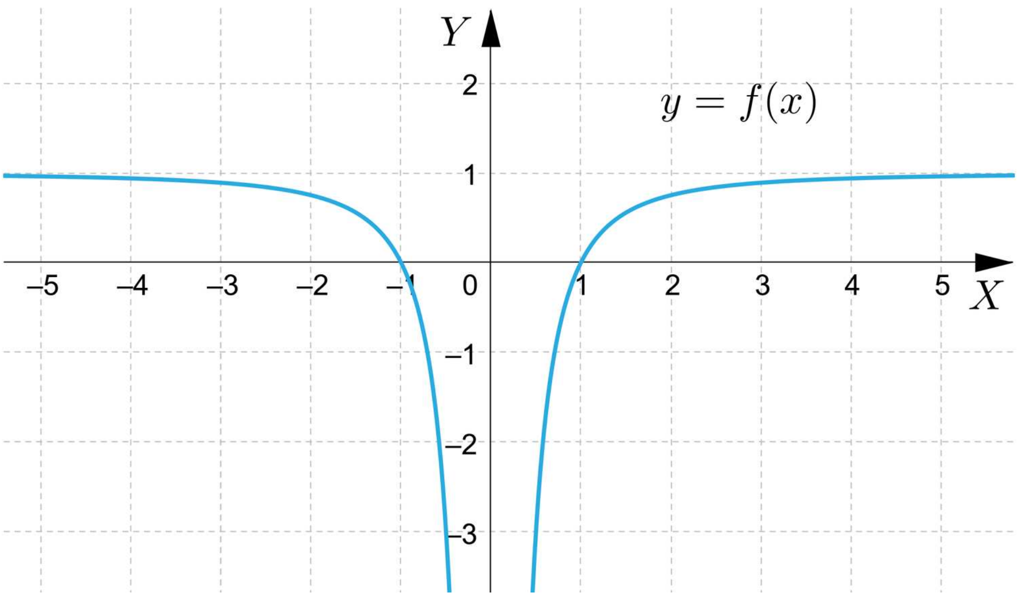
Ćwiczenie 1

Zapoznaj się z poniższym rysunkiem.



Ćwiczenie 2

Zapoznaj się z poniższym rysunkiem.



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jarosław Woźniak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak obliczyć granicę niewłaściwą funkcji w punkcie?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele nauczania – wymagania ogólne:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odróżnia granicę właściwą funkcji w punkcie od niewłaściwej;
- oblicza parametry funkcji wymiernej, aby miała granicę niewłaściwą w punkcie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa kierowana;

- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery multimedialne z dostępem do Internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e‑materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie czytają część wprowadzającą lekcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy interaktywnej sekcję „Wprowadzenie”, omawia i komentuje z uczniami cele lekcji.
2. Nauczyciel prosi uczniów o streszczenie przeczytanego przed lekcją materiału, analizuje zagadnienie, rozpoznaje wiedzę uczniów dotyczącą granic jednostronnych funkcji, właściwych i niewłaściwych.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy interaktywnej część „Definicja granicy niewłaściwej w punkcie” z sekcji „Przeczytaj” oraz omawia ją na forum klasy, kładąc nacisk na aplet interaktywny, ilustrujący definicję granicy niewłaściwej w punkcie.
2. Uczniowie w 3–4 osobowych grupach czytają pozostałą część sekcji „Przeczytaj”, tworzą mapę myśli na temat granic niewłaściwych funkcji w punkcie. W przypadku powstania wątpliwości, nauczyciel wyjaśnia na forum całej klasy napotkany problem. Pod opieką prowadzącego uczniowie porównują wyniki pracy nad mapami myśli i omawiają powstałe różnice.
3. Uczniowie samodzielnie rozwiązują zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

- Po ustalonym czasie nauczyciel sprawdza odpowiedzi uczniów, wyjaśnia pomyłki, omawia poprawne rozwiązania na forum klasy.

Praca domowa:

Uczniowie zadają sobie nawzajem w ramach 3–4 osobowej grupy zadanie, analogiczne do jednego z ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Granice funkcji
- Ciągłość funkcji

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może zostać wykorzystana jako materiał powtórzeniowy.