



Znajdź błąd w rozumowaniu, czyli analiza dowodów twierdzeń

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Znajdź błąd w rozumowaniu, czyli analiza dowodów twierdzeń

Źródło: dostępny w internecie: [ElisaRiva](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Czasami dobrze jest myśleć o dowodzie twierdzenia jak o małej „bitwie” między autorem dowodu a jego odbiorcą, czytelnikiem. Na początku nauki dowodzenia twierdzeń często jesteśmy odbiorcami, ucząc się dowodów przedstawionych przez nauczycieli lub znalezionych w podręcznikach. Czytanie dowodów nie jest łatwe i może się znudzić, jeśli po prostu spróbujemy czytać je jak książkę, nie koncentrując się maksymalnie. Najważniejszą częścią analizy dowodu jest kwestionowanie wszystkiego, co mówi nam autor. Na każdym etapie rozumowania powinniśmy stawiać pytanie „dlaczego?”

W tym materiale zajmiemy się analizowaniem dowodów pozornie poprawnych, znajdziemy w nich błędy i w każdym z przypadków odpowiemy na pytanie: dlaczego nie można wykonać danego kroku w rozumowaniu? Pozwoli nam to przypomnieć sobie i utrwalić kilka ważnych zasad arytmetycznych i algebraicznych.

Materiał tu zawarty jest materiałem nadobowiązkowym, więc jeśli nie interesuje Cię ta tematyka, możesz po prostu lekcję pominąć.

### Twoje cele

- Wyszukasz błędy w dowodach twierdzeń.
- Przeanalizujesz wybrane dowody, aby zweryfikować ich poprawność.



# Przeczytaj

---

Już w starożytności wśród rozumowań logicznych pojawiły się takie, które były na pozór prawidłowe, ale „dowodziły” tez, o których wiadomo, że są nieprawdziwe. Były to [sfizmaty](#), [antynomie](#) i paradoksy.

**Sfizmat** (z języka greckiego *sophisma* – fałszywy wniosek, wykręt) to rozumowanie, w którym świadomie popełniono błąd logiczny, który nadaje temu rozumowaniu pozór poprawności.

## Przykład 1

Rozważmy zdanie: Rogów nie zgubiłeś, a czegoś nie zgubił, to posiadasz; zatem posiadasz rogi. Jego autorem był Eubulides z Miletu – filozof należący do szkoły megarejskiej, który żył w IV wieku p.n.e.

Człowiek nie ma rogów, gdzie więc jest błąd w tym rozumowaniu?

## Rozwiązanie

Zdanie jest implikacją, którą możemy prościej wyrazić w następujący sposób: Jeśli nie zgubiłeś rogów, to je posiadasz. Błąd tkwi w tym, że nie można zgubić tego, czego się nie ma. Zdanie o zgubieniu i posiadaniu byłoby prawdziwe, gdyby dotyczyło czegoś, co rzeczywiście mamy, np. kluczy w kieszeni: Nie zgubiłeś kluczy, więc musisz je mieć.

**Antynomia** jest to zbiór zdań, których uznanie wydaje się być dozwolone i prowadzi jednak, poprzez poprawne rozumowanie, do uzasadnienia równoważności jakiegoś zdania i jego negacji (czyli do sprzeczności).

## Przykład 2

Rozważmy zdanie (również przypisywane Eubulidesowi): Pewien człowiek twierdzi: „ja teraz kłamię”. Co powiemy o prawdziwości tego zdania?

## Rozwiązanie

Jeśli zadamy sobie pytanie, czy ten człowiek jest kłamcą czy też mówi prawdę, dojdziemy do sprzeczności. Jeśli kłamię, to stwierdzając „ja teraz kłamię” mówię prawdę, a więc nie jest kłamcą. Jeśli natomiast mówi prawdę, to znaczy, że kłamię, bo to oznacza wypowiedziane przez niego zdanie.

**Paradoks** (z języka greckiego *paradoksos* – nieoczekiwany, nieprawdopodobny) to rozumowanie pozornie poprawne, które prowadzi do wniosków jawnie niezgodnych z danymi potocznego doświadczenia i przekonaniami zdroworozsądkowymi.

### Przykład 3

Rozważmy jeden z **paradoksów** Zenona z Elei, który żył w V wieku p.n.e.: „Siew. Skoro przy zasiewaniu pojedynczego ziarna brak jest wrażeń słuchowych, to przy zasiewaniu większej ilości szum musi być złudzeniem” Czy to jest prawda?

### Rozwiązanie

Z doświadczenia wiadomo, że nałożenie się na siebie wielu jednakowych bodźców daje inny efekt niż pojedynczy bodziec. Błędność „Siewu” polega na wyciąganiu wniosku ze zbyt niskiego poziomu szumu przy sianiu małej ilości ziarna.

W następnych przykładach będziemy analizować wyłącznie **dowody** o charakterze matematycznym. Zagadnienia, których dotyczą, mogą wydawać się podobne, ale w każdym dowodzie popełniony jest inny błąd. Zastanowimy się też, jakiej wiedzy matematycznej brakuje osobie popełniającej dany błąd.

### Przykład 4

Rozważmy **twierdzenie**: Jeśli  $a^2$  jest liczbą wymierną, to  $a$  jest liczbą wymierną. Czy to twierdzenie jest prawdziwe – co nam podpowiada intuicja?

A teraz przeanalizujmy jego „dowód”:

Jeśli  $a^2$  jest liczbą wymierną, to możemy zapisać:  $a^2 = \frac{m^2}{n^2}$ , gdzie  $m$  i  $n$  to liczby naturalne. Stąd  $a = \frac{m}{n}$ , więc  $a$  jest liczbą wymierną.

c.n.d.

Czy w tym „**dowodzie**” jest błąd? Jeżeli tak, to gdzie?

### Rozwiązanie

Twierdzenie jest fałszywe; można podać kontrprzykład: Niech  $a = \sqrt{5}$ , wówczas  $a^2 = 5$  i jest liczbą wymierną, podczas gdy  $a$  jest liczbą niewymierną.

Błąd w „dowodzie” tkwi w zapisie:  $a^2 = \frac{m^2}{n^2}$ . Liczbę wymierną rzeczywiście zapisujemy w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych, przy czym mianownik nie może być zerem, ale liczby te nie muszą być kwadratami liczb całkowitych (w tym przykładzie rozważano liczby naturalne). Kiedy możemy popełnić taki błąd? Gdy nie znamy dobrze definicji liczby wymiernej.

### Przykład 5

W poniżej przytoczonym rozumowaniu „udowodniono”, że  $1 = 2$ . Jest to oczywista nieprawda, więc przeanalizujmy „dowód” i znajdziemy błąd.

„Dowód”

Weźmy dwie takie liczby  $a$  i  $b$ , że  $a = b$ . Możemy wykonać kolejne przekształcenia równoważne:

$$a^2 = ab$$

$$a^2 + a^2 = a^2 + ab$$

$$2a^2 = a^2 + ab$$

$$2a^2 - 2ab = a^2 + ab - 2ab$$

$$2a^2 - 2ab = a^2 - ab$$

$$2(a^2 - ab) = a^2 - ab$$

$$2 = 1.$$

c.n.d.

Gdzie został popełniony błąd?

### Rozwiązanie

Równość  $2(a^2 - ab) = a^2 - ab$  została obustronnie podzielona przez wyrażenie  $a^2 - ab$ . Na początku założyliśmy, że  $a = b$ , więc  $a^2 - ab = 0$ . Nie wolno dzielić przez 0. Kiedy możemy popełnić taki błąd? Gdy nie zwracamy uwagi na poczynione założenia i gdy podejmując dzielenie przez wyrażenie algebraiczne nie sprawdzamy, czy nie jest ono równe 0.

### Przykład 6

W tym przykładzie będziemy wykonywać wyłącznie działania arytmetyczne. W poniżej przytoczonym rozumowaniu „udowodniono”, że  $3 + 2 = 4$ . Jest to oczywista nieprawda, więc przeanalizujemy „dowód” i znajdziemy błąd.

„Dowód”:

Zapiszmy równość prawdziwą:  $-20 = -20$  i dalej ją przekształcamy:

$$-20 = -20$$

$$16 - 36 = 25 - 45$$

$$4^2 - 4 \cdot 9 = 5^2 - 5 \cdot 9$$

$$4^2 - 4 \cdot 9 + \frac{81}{4} = 5^2 - 5 \cdot 9 + \frac{81}{4}$$

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

$$4 = 5$$

$$3 + 2 = 4$$

c.n.d.

Gdzie został popełniony błąd?

### Rozwiązanie

Błąd został popełniony przy obustronnym pierwiastkowaniu wyrażenia

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2.$$

$4 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$ , zaś  $5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$ , więc liczby te nie są równe. Tutaj uwaga o obliczaniu pierwiastków drugiego stopnia: pierwiastek (tzw. arytmetyczny) drugiego stopnia z liczby nieujemnej jest nieujemny, chociaż liczba podpierwiastkowa może być wynikiem podnoszenia do kwadratu liczby ujemnej. Istnieją natomiast dwa pierwiastki tzw. algebraiczne z liczby dodatniej  $a$ : są to liczby  $\sqrt{a}$  i  $(-\sqrt{a})$  jako rozwiązanie równania  $x^2 = a$ . Kiedy możemy popełnić taki błąd? Gdy nie pamiętamy, że jeżeli drugie potęgi danych liczb są równe, to liczby te nie muszą być równe, ale mogą być przeciwne.

## Słownik

### twierdzenie

zdanie oznajmujące złożone z dwóch zdań, przy czym jedno wynika z drugiego

### dowód twierdzenia

wykazanie, że pewne zdanie jest prawdziwe; każdy krok dowodu musi jasno wynikać z poprzednich lub być przyjętym aksjomatem (faktem matematycznym, którego prawdziwość jest ogólnie znana, przyjmowana bez dowodu)

### sofizmat

rozumowanie, w którym świadomie popełniono błąd logiczny, który nadaje temu rozumowaniu pozór poprawności

### antynomia

zbiór zdań, których uznanie wydaje się być dozwolone i prowadzi jednak, poprzez poprawne rozumowanie, do uzasadnienia równoważności jakiegoś zdania i jego negacji (czyli do sprzeczności)

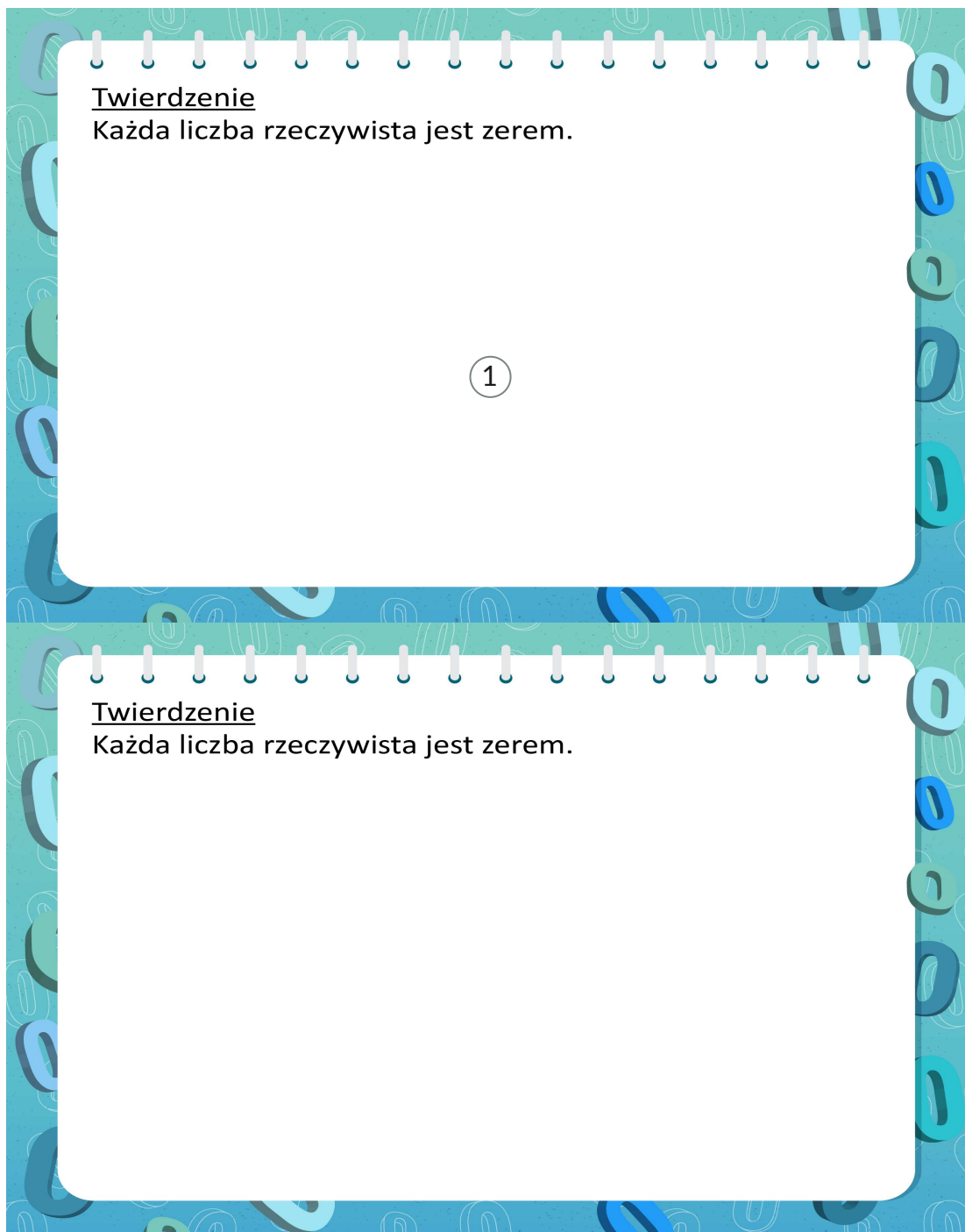
### **paradoks**

rozumowanie pozornie poprawne, które prowadzi do wniosków jawnie niezgodnych z danymi potocznego doświadczenia i przekonaniami zdroworozsądkowymi

# Galeria zdjęć interaktywnych

## Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, która obrazuje budowanie „dowodu” twierdzenia:  
**Każda liczba rzeczywista jest zerem**, a także wskazuje operację niedozwoloną.



1. {audio}Udowodnimy podane twierdzenie.

## Polecenie 2

Ułóż w kolejności dowód twierdzenia:  $2 + 2 = 6$ . Wskaż operację niedozwoloną lub nieprawidłowy wynik wykonanej prawidłowej operacji, jeżeli taki istnieje.

Obustronnie pierwiastkujemy.

$$(4 - 5)^2 = (6 - 5)^2$$



$$4 = 6 \text{ czyli } 2 + 2 = 6$$

c.n.d.



Zapisujemy równość prawdziwą.

$$1 = 1$$



Zapisujemy niektóre liczby w postaci kwadratów.

$$4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5$$



Do obu stron dodajemy 5.

$$4 - 5 = 6 - 5$$



Wyrażamy jedynki inaczej.

$$41 - 40 = 61 - 60$$



Zapisujemy odjemne inaczej.

$$16 + 25 - 40 = 36 + 25 - 60$$



### Polecenie 3

Poniżej widzisz dowód twierdzenia:  $1 + 1 = 1$ . Przeciągnij do tabeli w poprawne miejsca opisy tych operacji. Wskaż, której operacji nie wolno było wykonać, jeżeli taka istnieje.

Niech  $a = b$ ,  $a \cdot a = b \cdot a$ ,  $a^2 - b^2 = ab - b^2$ ,  $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ ,  $a + b = b$ ,  $b + b = b$  czyli  $2b = b$ ,  $2 = 1$  czyli  $1 + 1 = 1$ , c.n.d.

| „Dowód” twierdzenia         | Opis |        |
|-----------------------------|------|--------|
| Niech $a = b$ .             |      |        |
| $a \cdot a = b \cdot a$     |      |        |
| $a^2 - b^2 = ab - b^2$      |      |        |
| $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ |      |        |
| $a + b = b$                 |      |        |
| $b + b = b$ czyli $2b = b$  |      |        |
| $2 = 1$ czyli $1 + 1 = 1$   |      | c.n.d. |

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



„Udowodnimy”, że  $2 + 2 = 5$ . Przeanalizuj poniższy dowód i znajdź błąd. Przeciagnij właściwe oznaczenia do tabeli.

Możemy zapisać oczywistą równość:  $0 = 0$ ., Wyrażmy zera po obu stronach równości jako wynik dwóch różnych odejmowań:  $20 - 20 = 25 - 25$ ., Wyrażmy liczby 20 i 25 w postaci iloczynów:  $4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 = 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$ ., Dprowadzamy obie strony do postaci iloczynowej:  $4 \cdot (5 - 5) = 5 \cdot (5 - 5)$ ., I upraszczając obustronnie otrzymujemy:  $4 = 5$ , czyli  $2 + 2 = 5$ , c.n.d.

| Dowód                                                                                              | Gdzie tkwi błąd? |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| Możemy zapisać oczywistą równość: $0 = 0$                                                          |                  |
| Wyrażmy zera po obu stronach równości jako wynik dwóch różnych odejmowań:<br>$20 - 20 = 25 - 25$ . |                  |
| Wyrażmy liczby 20 i 25 w postaci iloczynów:<br>$4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 = 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$     |                  |
| Dprowadzamy obie strony do postaci iloczynowej:<br>$4 \cdot (5 - 5) = 5 \cdot (5 - 5)$ .           |                  |
| I upraszczając obustronnie otrzymujemy: $4 = 5$ , czyli $2 + 2 = 5$ , c.n.d.                       |                  |

## Ćwiczenie 2



Przeanalizuj „dowód” równości:  $1 + 1 = 0$  przedstawiony krok po kroku w wierszach poniższej tabeli. Czy ta równość jest prawdziwa? Jeśli nie, to znajdź błąd w dowodzie, wskaż które zdania są prawdziwe, a które fałszywe.

| Dowód                          | Zdanie prawdziwe      | Zdanie fałszywe       |
|--------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| $1 + 1 = 2$                    | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $1 + 1 - 1 = 2 - 1$            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $1 + 1 - 1 = \sqrt{(2 - 1)^2}$ | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $1 + 1 - 1 = \sqrt{4 - 4 + 1}$ | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $1 + 1 - 1 = \sqrt{1}$         | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $1 + 1 - 1 = \sqrt{(-1)^2}$    | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $1 + 1 - 1 = -1$               | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $1 + 1 = 0$                    | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

## Ćwiczenie 3

Niech  $a = 2$  oraz  $b = 3$ . Przeanalizuj "dowód" równości  $a^2 + b^2 = b^2 + a^2$  dla podanych wartości liczb, przedstawiony krok po kroku w wierszach poniższej tabeli. Czy ta równość jest prawdziwa? Jeśli nie, to znajdź błąd w dowodzie, wskaż które zdania są prawdziwe, a które fałszywe.

| Dowód                               | Zdanie prawdziwe      | Zdanie fałszywe       |
|-------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| $a^2 + b^2 = b^2 + a^2$             | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2$ | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $(a - b)^2 = (b^2 - a^2)$           | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $a - b = b - a$                     | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $2 - 3 = 3 - 2$                     | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $-1 = 1$                            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

## Ćwiczenie 4



Ktoś jednak wytrwale dąży do tego, aby udowodnić, że  $1 + 1 = 0$ , tym razem inną metodą. Uzupełnij poniższy „dowód”, wstawiając w puste miejsca właściwe wyrażenia metodą „przeciągnij i upuść”. Czy jest w nim błąd? Jeśli tak, to gdzie?

„Dowód”:

Niech  $x = 1$

Stąd  $x^2 = 1^2$

Przekształcamy tę równość i otrzymujemy: , co jest równoważne:

$$(x + 1)(x - 1) = 0.$$

Dzielimy tę równość obustronnie przez  i otrzymujemy:  $x + 1 = 0$ .

Założyliśmy, że , więc mamy:  $1 + 1 = 0$ .

c.n.d.

## Ćwiczenie 5



Poniżej przedstawiony jest „dowód”, że  $2 = 1$ , ale popełniony został tutaj błąd. Przeanalizuj rozumowanie i wskaż błąd.

„Dowód”:

Naszym punktem wyjścia jest prawdziwa równość:  $-2 = -2$ .

Liczbę  $(-2)$  możemy wyrazić na wiele różnych sposobów, np. tak:  $4 - 6 = 1 - 3$ .

Dokonujemy przekształceń równoważnych:  $4 - 6 + \frac{9}{4} = 1 - 3 + \frac{9}{4}$ ;

$$\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2;$$

$$2 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2};$$

$$2 = 1$$

c.n.d.

Gdzie popełniono błąd?

## Ćwiczenie 6



Każde dwie liczby rzeczywiste są równe. Prawda? Nieprawda. Niemniej jednak poniższy „dowód” pokazuje, że tak jest. Gdzie jest błąd?

„Dowód”:

Weźmy dwie liczby  $a$  i  $b$  takie, że  $a > b$ .

Zatem istnieje taka liczba  $c > 0$ , że  $a = b + c$ . Przekształcamy tę równość:

$$a = b + c \mid \cdot (a - b)$$

$$a(a - b) = (b + c)(a - b)$$

$$aa - ab = ab + ac - bb - bc$$

$$aa - ab - ac = ab - bb - bc$$

$$a(a - b - c) = b(a - b - c) \mid : (a - b - c)$$

$$a = b$$

c.n.d.

## Ćwiczenie 7



Matematycy mówią, że  $\frac{0}{0}$  to symbol nieokreślony, ale ktoś z uporem twierdzi, że  $\frac{0}{0} = 2$  i usiłuje to udowodnić.

Czy w poniższym dowodzie jest błąd? Jeśli tak, to gdzie?

„Dowód”:

$$\frac{0}{0} = \frac{100-100}{100-100} = \frac{10^2-10^2}{10 \cdot 10 - 10 \cdot 10} = \frac{(10+10) \cdot (10-10)}{10 \cdot (10-10)} = \frac{20}{10} = 2$$

c.n.d.

## Ćwiczenie 8



Czy złotówka może być równa groszowi? Oczywiście nie! Jednak ktoś „udowodnił”, że tak jest, a naszym zadaniem jest znaleźć błąd w jego rozumowaniu.

„Dowód”, że  $1 \text{ zł} = 1 \text{ gr}$ :

$$1 \text{ zł} = 100 \text{ gr} = 10 \text{ gr} \cdot 10 \text{ gr} = 0,1 \text{ zł} \cdot 0,1 \text{ zł} = 0,01 \text{ zł} = 1 \text{ gr}$$

c.n.d.

Gdzie jest błąd?

## Ćwiczenie 9



Teraz „udowodnimy”, że liczba dodatnia może być równa liczbie ujemnej. Niesamowite! Ustaw poniższe wyrażenia w odpowiedniej kolejności, aby otrzymać „dowód” tego zdumiewającego faktu, a potem wskaż błąd (jeśli istnieje).

$$1 = -1$$



$$\sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{(-1)^2}$$



$$\sqrt{(-1)^2} = -1$$



$$\sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)}$$



„Dowód”, że  $1 = -1$ .



$$1 = \sqrt{1}$$



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Anna Rybak

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Znajdź błąd w rozumowaniu, czyli analiza dowodów twierdzeń

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń

4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na:  $(a + b)^2$ ,  $(a - b)^2$ ,  $a^2 - b^2$ ,  $(a + b)^3$ ,  $(a - b)^3$ ,  $a^3 - b^3$ ,  $a^n - b^n$ .

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- analizuje i uzupełnia dowody,
- weryfikuje poprawność dowodów,
- wskazuje błędy w dowodach twierdzeń,
- uzasadnia przyczyny powstania błędów w rozumowaniach.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm
- konektywizm

## **Metody i techniki nauczania:**

- praca z tekstem matematycznym
- dyskusja
- ćwiczenia interaktywne

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca całego zespołu

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do internetu
- projektor multimedialny
- arkusze papieru, pisaki

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat zajęć, opowiada kilka ciekawostek związanych z tematem, wskazuje cele zajęć oraz ustala z uczniami kryteria sukcesu.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie zapoznają się z materiałem z sekcji Przeczytaj, poznają pojęcia „sofizmat”, „antynomia”, „paradoks”, dyskutują nad przykładami 1, 2, 3, starając się odpowiedzieć na postawione w nich pytania przed przeczytaniem udostępnionych w materiale rozwiązań.
2. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady 4 i 5 z sekcji Przeczytaj, szukają błędów w przytoczonych rozumowaniach i dyskutują o przyczynach powstania tych błędów.
3. Uczniowie zapoznają się z galerią zdjęć interaktywnych, a następnie indywidualnie wykonują polecenia 2 i 3 i omawiają wspólnie rezultaty swojej pracy.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 1, 2, 3, 4, 5, 7 z sekcji „Sprawdź się”.  
W drodze dyskusji omawiają swoje wyniki i razem z nauczycielem wyjaśniają trudności.

### **Faza podsumowująca:**

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytania: Co było w lekcji trudnego? Co było w lekcji interesującego? Co chcielibyście zmienić, gdyby lekcja miała być przeprowadzona jeszcze raz? Jeszcze raz krótko odnosi się do elementów wskazanych jako trudne, komentuje propozycje zmian w lekcji.
2. Uczniowie krótko podsumowują swoje osiągnięcia, rozwijając zdanie: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam /nauczyłem się ...

**Praca domowa:**

Uczniowie wykonują ćwiczenia 6 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

- Nieprawdziwe twierdzenia w dowodach
- Dowodzenie twierdzeń wymagających rozumowania arytmetycznego
- Dowodzenie twierdzeń związanych z liczbami rzeczywistymi
- Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodzeniu twierdzeń
- Zadania na dowodzenie z zastosowaniem równań wielomianowych
- Argumentacja Zenona

**Wskazówki metodyczne:**

Galeria zdjęć interaktywnych może być też wykorzystana do tworzenia domina opisującego kroki dowodów, gdzie uczniowie układają klocki w odpowiedniej kolejności lub również uzupełniają zapisy na kostkach. Nie muszą to być domina multimedialne, mogą być wycięte z papieru klocki, gdzie mogą być opisane tylko pola po prawej stronie klocków, lub mogą być opisane pola naprzemiennie, zaś pozostałe pozostają do wypełnienia. Takie domina są też dobrą bazą do gier w parach.

Galeria może być wykorzystana na zajęciach poświęconych działaniom na liczbach rzeczywistych.