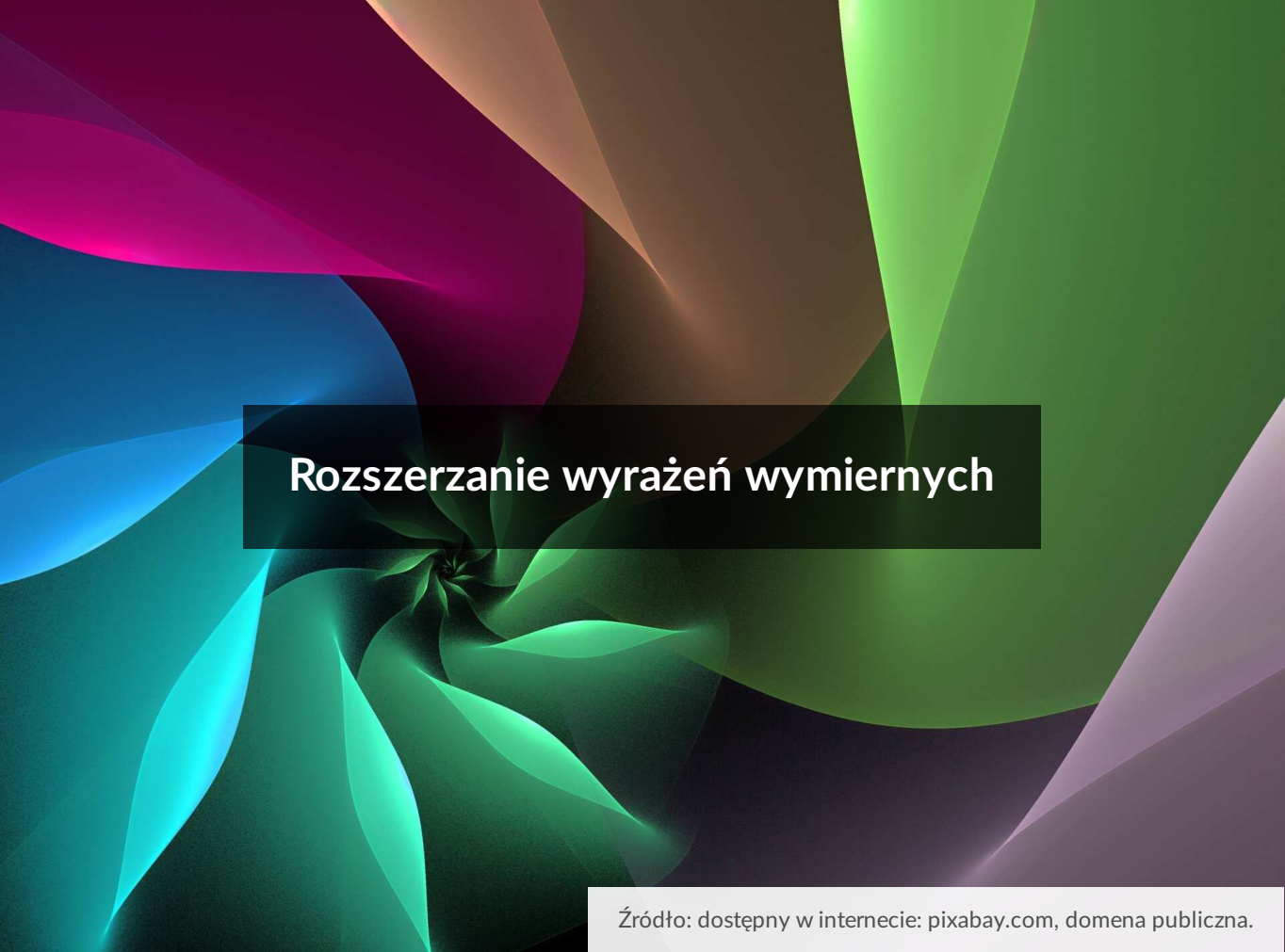




Rozszerzanie wyrażeń wymiernych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozszerzanie wyrażeń wymiernych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wiemy, że każdy ułamek zwykły możemy zapisać na nieskończenie wiele sposobów.

Na przykład $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{15}{30} = \frac{144}{288} = \dots$

Ułamki zwykłe rozszerzamy mnożąc licznik i mianownik przez taką samą liczbę (różną od zera).

Analogicznie możemy rozszerzać wyrażenia algebraiczne zapisane w postaci ułamka.

Twoje cele

- Wykorzystasz rozszerzanie ułamków w przykładach z wyrażeniami wymiernymi.
- Określisz dziedzinę rozszerzonego wyrażenia wymiernego.
- Zapiszesz w prostszej postaci ułamki piętrowe, wykorzystując rozszerzanie ułamków.

Przeczytaj

Dane jest wyrażenie wymierne $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są pewnymi wielomianami, $Q(x)$ nie jest wielomianem zerowym. Do **dziedziny wyrażenia** należą wszystkie liczby rzeczywiste z wyjątkiem pierwiastków wielomianu $Q(x)$.

Wyrażenie $\frac{P(x)}{Q(x)}$ możemy **rozszerzyć** przez wielomian niezerowy $W(x)$, sprowadzając je do postaci $\frac{P(x) \cdot W(x)}{Q(x) \cdot W(x)}$.

Wyrażenia wymierne $\frac{P(x)}{Q(x)}$ oraz $\frac{P(x) \cdot W(x)}{Q(x) \cdot W(x)}$ są **równe** dla wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem pierwiastków wielomianów z mianownika (czyli $Q(x)$ i $W(x)$).

Przykład 1

Rozszerzymy ułamek $\frac{2x-1}{3x+4}$ przez $2x^2 + x - 6$.

- Po wykonaniu mnożenia wielomianów możemy zapisać, że
$$\frac{2x-1}{3x+4} = \frac{4x^3-13x+6}{6x^3+11x^2-14x-24}.$$
- Ze względu na konieczność określenia założeń, zwykle wygodniejszy będzie zapis licznika i mianownika w postaci iloczynowej.

Wyrażenie, przez które rozszerzamy, można zapisać w postaci iloczynu:

$$2x^2 + x - 6 = (x + 2)(2x - 3).$$

$$\text{Zatem } \frac{2x-1}{3x+4} = \frac{(2x-1)(x+2)(2x-3)}{(3x+4)(x+2)(2x-3)},$$

$$\text{przy czym } \begin{cases} 3x + 4 \neq 0 \\ x + 2 \neq 0, \\ 2x - 3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{czyli } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -2; -\frac{4}{3}; \frac{3}{2} \right\}.$$

Przykład 2

Rozszerzymy ułamek $\frac{x-7}{x-5}$ tak, by otrzymać ułamek o liczniku $x^3 - 7x^2 - x + 7$.

Podamy potrzebne założenia.

- Sprowadźmy licznik do postaci iloczynowej:
$$\begin{aligned} x^3 - 7x^2 - x + 7 &= x^2(x - 7) - (x - 7) = \\ &= (x - 7)(x^2 - 1) = (x - 7)(x - 1)(x + 1). \end{aligned}$$
- Ułamek należy zatem rozszerzyć przez $(x - 1)(x + 1)$:
$$\frac{x-7}{x-5} = \frac{(x-7)(x-1)(x+1)}{(x-5)(x-1)(x+1)} = \frac{x^3-7x^2-x+7}{x^3-5x^2-x+5},$$
przy czym $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 5\}$.

Przykład 3

Rozszerzymy ułamek $\frac{x-2}{x^2-2x+4}$ tak, by otrzymać ułamek, którego mianownikiem będzie dwumian $x^3 + 8$.

Podamy potrzebne założenia.

- Zauważmy, że $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.
- Wystarczy zatem rozszerzyć ułamek przez $x + 2$:
$$\frac{x-2}{x^2-2x+4} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x^2-2x+4)(x+2)} = \frac{x^2-4}{x^3+8}.$$
- Ułamki są równe, gdy $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Przy uwzględnieniu potrzebnych założeń analogicznie można rozszerzać dowolne wyrażenia algebraiczne zapisane w formie ułamka. Nie muszą być ilorazami dwóch wielomianów. Wyrażenie, przez które rozszerzamy, nie musi być wielomianem.

W kolejnych przykładach pokażemy, jak rozszerzając wyrażenia zapisane w formie ułamka, sprowadzić do prostszej postaci ułamki **piętrowe**.

Przykład 4

Rozszerzając odpowiednio wyrażenie

$$\frac{\frac{a+1}{a^3-1}}{\frac{a^3+a^2+2a}{a^3-1}}$$

zapisane w formie ułamka piętrowego, sprowadzimy je do postaci wyrażenia wymiernego, czyli ułamka, którego licznik i mianownik to wielomiany.

Podamy potrzebne założenia.

- Rozszerzmy ułamek piętrowy przez wyrażenie $a^3 - 1$:
$$\frac{\frac{a+1}{a^3-1}}{\frac{a^3+a^2+2a}{a^3-1}} = \frac{\frac{a+1}{a^3-1} \cdot (a^3 - 1)}{\frac{a^3+a^2+2a}{a^3-1} \cdot (a^3 - 1)} = \frac{a + 1}{a^3 + a^2 + 2a}.$$
- Ustalmy założenia pamiętając, że nie wolno dzielić przez 0.
$$\begin{cases} a^3 - 1 \neq 0 \\ a^3 + a^2 + 2a \neq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (a - 1)(a^2 + a + 1) \neq 0 \\ a(a^2 + a + 2) \neq 0 \end{cases}$$

Wyrażenia $a^2 + a + 1$ oraz $a^2 + a + 2$ nie przyjmują wartości 0 dla żadnej liczby rzeczywistej (w obu przypadkach $\Delta < 0$).

$$\text{Zatem } \begin{cases} a - 1 \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases},$$

czyli $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Przykład 5

Rozszerzając odpowiednio wyrażenie

$$\frac{\frac{x^2-x-2}{x^3+4x^2+10x+12}}{\frac{x^2-4x+3}{x^2+2x+6}}$$

zapisane w formie ułamka piętrowego sprowadź je do postaci wyrażenia wymiernego, czyli ułamka, którego licznik i mianownik to wielomiany.

Podaj potrzebne założenia.

- Na początek sprowadźmy do postaci iloczynowej wielomiany $x^3 + 4x^2 + 10x + 12$ i $x^2 + 2x + 6$.
- Łatwo zauważyć, że wielomian $x^2 + 2x + 6$ jest nierozkładalny ($\Delta < 0$).
- Rozkładając wielomian $x^3 + 4x^2 + 10x + 12$ możemy użyć metody grupowania:

$$x^3 + 4x^2 + 10x + 12 = (x^3 + 4x^2 + 4x) + (6x + 12) =$$

$$= x(x + 2)^2 + 6(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 2x + 6).$$
- Rozszerzmy ułamek z zadania przez $(x + 2)(x^2 + 2x + 6)$:

$$\frac{\frac{x^2-x-2}{(x+2)(x^2+2x+6)}}{\frac{x^2-4x+3}{x^2+2x+6}} = \frac{\frac{x^2-x-2}{(x+2)(x^2+2x+6)} \cdot (x+2)(x^2+2x+6)}{\frac{x^2-4x+3}{x^2+2x+6} \cdot (x+2)(x^2+2x+6)} =$$

$$= \frac{x^2-x-2}{(x^2-4x+3)(x+2)}.$$

- Wyznamy potrzebne założenia:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 6 \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases},$$

$$\text{czyli } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1; 3\}.$$

Przykład 6

Rozszerzając odpowiednio wyrażenie

$$\frac{\frac{x+4}{x^3-3x^2+8x}}{\frac{x+5}{x^3-x^2+2x+16}}$$

zapisane w formie ułamka piętrowego, sprowadź je do postaci wyrażenia wymiernego, czyli ułamka, którego licznik i mianownik to wielomiany.

Podamy potrzebne założenia.

- Sprowadźmy do postaci iloczynowej mianowniki ułamków:

$$x^3 - 3x^2 + 8x = x(x^2 - 3x + 8)x^3 - x^2 + 2x + 16 = (x + 2)(x^2 - 3x + 8).$$

- Rozszerzmy cały ułamek przez $x(x + 2)(x^2 - 3x + 8)$:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x+4}{x(x^2-3x+8)}}{\frac{x+5}{(x+2)(x^2-3x+8)}} &= \frac{\frac{x+4}{x(x^2-3x+8)} \cdot x(x+2)(x^2-3x+8)}{\frac{x+5}{(x+2)(x^2-3x+8)} \cdot x(x+2)(x^2-3x+8)} = \\ &= \frac{(x+4)(x+2)}{(x+5)x} = \frac{x^2+6x+8}{x^2+5x}. \end{aligned}$$

- Wyznaczmy założenia:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -2. \\ x \neq -5 \end{cases}$$

Słownik

dziedzina wyrażenia algebraicznego

wszystkie liczby rzeczywiste, dla których to wyrażenie ma sens liczbowy

Film samouczek

Polecenie 1

Wyrażenia wymierne możemy rozszerzać podobnie jak ułamki zwykłe - mnożąc licznik i mianownik przez taki sam czynnik, różny od 0.

Zapoznaj się z przedstawionymi w filmie przykładami rozszerzania wyrażeń wymiernych.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DY5V8V5xY>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący rozszerzanie wyrażeń wymiernych.

Polecenie 2

Rozszerz ułamek $\frac{a+2}{a-3}$ do ułamka o mianowniku $a^3 - 27$.

Określ potrzebne założenia.

Polecenie 3

Rozszerz ułamek $\frac{x-3}{x+3}$ do ułamka o liczniku $x^4 - 81$.

Określ potrzebne założenia.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż, przez jakie wyrażenie należy rozszerzyć ułamek $\frac{x-2}{x^2+1}$, aby otrzymać ułamek $\frac{x^2-4}{x^3+2x^2+x+2}$.

☐ $x + 1$

☐ $x + 2$

☐ $x - 1$

☐ $x - 2$

Ćwiczenie 2



Wskaż wyrażenie uzyskane w wyniku rozszerzenia ułamka $\frac{2x-1}{x+2}$ przez dwumian $x + 1$.

☐ $\frac{2x^2-x+1}{x^2-3x+2}$

☐ $\frac{2x^2+2x+1}{x^2+3x-2}$

☐ $\frac{2x^2+x-1}{x^2+3x+2}$

☐ $\frac{2x^2+x-1}{x^2-2x+3}$

☐ $\frac{2x^2+x+2}{x^2+3x+2}$

Ćwiczenie 3



Pewien ułamek rozszerzono przez wyrażenie $2x + 1$, otrzymując $\frac{4x^2+2x}{2x^2-5x-3}$. Wskaż ten ułamek.

☐ $\frac{2x}{x+3}$

☐ $\frac{4x}{2x+3}$

☐ $\frac{x}{2x-3}$

☐ $\frac{2x}{x-3}$

Ćwiczenie 4



Ułamek $\frac{4x-1}{x^2+3}$ rozszerzono przez dwumian $ax + b$ otrzymując $\frac{4x^2-13x+3}{x^3-3x^2+3x-9}$. Wskaż wartości parametrów a i b .

☐ $b = 3$

☐ $a = 1$

☐ $b = -2$

☐ $a = -1$

☐ $b = -3$

☐ $a = 2$

Ćwiczenie 5



Ułamek $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rozszerzono o $x - 3$, otrzymując $\frac{x^2 - x - 6}{x^3 - 3x^2 - 2x + 6}$. Wskaż wielomiany z licznika i mianownika.

☐ $Q(x) = x^2 + 2$

☐ $P(x) = x - 2$

☐ $P(x) = 2x + 1$

☐ $Q(x) = 2x^2 + 1$

☐ $P(x) = x + 2$

☐ $Q(x) = x^2 - 2$

Ćwiczenie 6



Przeciągnij w puste pola właściwe wyrażenia.

- Po rozszerzeniu ułamka przez dwumian uzyskamy ułamek $\frac{4-4x-3x^2}{x^2+3x+2}$.
- Po rozszerzeniu ułamka przez dwumian uzyskamy ułamek $\frac{x^2-x-2}{-x^2+4x-4}$.
- Po rozszerzeniu ułamka przez dwumian uzyskamy ułamek $\frac{2x^2-3x-2}{6x^2+5x+1}$.

$\frac{x+1}{2-x}$

$\frac{2-3x}{x+1}$

$2 - x$

$\frac{x-2}{3x+1}$

$2x + 1$

$x + 2$

$x - 2$

$\frac{2x-1}{2x-1}$

Ćwiczenie 7



Połącz w pary ułamek i jego rozszerzenie przez pewien dwumian.

$$\frac{x+1}{2x+1}$$

$$\frac{x^2+2x+1}{2x^2-x-3}$$

$$\frac{x+4}{x-3}$$

$$\frac{x^2+x-6}{x^2+5x+6}$$

$$\frac{x-2}{x+2}$$

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-5x+6}$$

$$\frac{x+1}{2x-3}$$

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

Ćwiczenie 8



Przeciągnij w puste pola właściwe wyrażenia.

- Rozszerzając ułamek przez $x + 3$, uzyskujemy wyrażenie .
- Rozszerzając ułamek przez $x + 2$, uzyskujemy wyrażenie .
- Rozszerzając ułamek przez $2x - 1$, uzyskujemy wyrażenie .

$$\frac{4x^2-4x+1}{2x^2+3x-2}$$

$$\frac{x-4}{3x+2}$$

$$\frac{2x+3}{x-1}$$

$$\frac{2x-1}{x+2}$$

$$\frac{2x^2+9x+9}{x^2+2x-3}$$

$$\frac{x^2-2x-8}{3x^2+8x+4}$$

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozszerzanie wyrażeń wymiernych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:

7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje rozszerzanie ułamków w przykładach z wyrażeniami wymiernymi;
- określa dziedzinę rozszerzonego wyrażenia wymiernego;
- wykorzystując rozszerzanie ułamków, zapisuje w prostszej postaci ułamki piętrowe.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- liga zadaniowa;
- tworzenie przez analogię.

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie przypominają sobie na czym polega rozszerzanie ułamków zwykłych. Przygotowując się do lekcji oglądają film samouczek.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat oraz cele lekcji. Uczniowie wraz z nauczycielem określają kryteria sukcesu.
2. Uczniowie w grupach opierając się na wiadomościach o rozszerzaniu ułamków zwykłych, wykorzystując metodę – tworzenie przez analogię – opracowują algorytm rozszerzania wyrażeń wymiernych.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie analizują opracowany algorytm rozszerzania wyrażeń wymiernych rozwiązując przykłady w sekcji „Przeczytaj”. W razie konieczności algorytm jest modyfikowany i uzupełniany.
2. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się” na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych).
3. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność.
4. Rozwiązania ćwiczeń są prezentowane na forum klasy, a ewentualne niejasności omawiane są przez nauczyciela krok po kroku.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel podsumowuje przebieg zajęć.
2. Na zakończenie nauczyciel dokonuje oceny pracy wylosowanej grupy. Prosi o samoocenę uczniów dotyczącą współpracy w zespole oraz wykonanego zadania. Dokonuje oceny pracy wybranych uczniów.

Praca domowa:

- Uczniowie przygotowują mapę myśli, zawierającą uzyskane do tej pory wiadomości o wyrażeniach wymiernych.

Materiały pomocnicze:

- [Wyrażenia wymierne](#)

Wskazówki metodyczne:

- Film samouczek można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału z rozszerzania wyrażen wymiernych.