



Kąty między odcinkami w walcu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Kąty między odcinkami w walcu

Źródło: Alberto Bobbera, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W walcach wyróżniamy różnego typu odcinki: promień i średnicę podstawy, wysokość, tworzącą, przekątną przekroju osiowego, przekątne innych przekrojów. Odcinki te tworzą kąty i to nimi będziemy zajmować się w tym materiale.

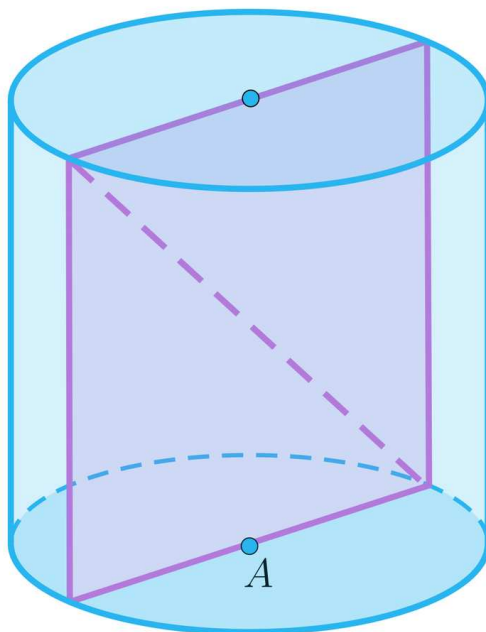
Twoje cele

- Rozpoznaś kąty pomiędzy odcinkami w walcu.
- Obliczysz miary kątów pomiędzy odcinkami w walcu.
- Obliczysz długości odcinków, pole powierzchni, objętość, pole przekroju walca, w którym dany będzie kąt pomiędzy odcinkami.
- Przeanalizujesz zależność pomiędzy miarami kątów między odcinkami w walcu.

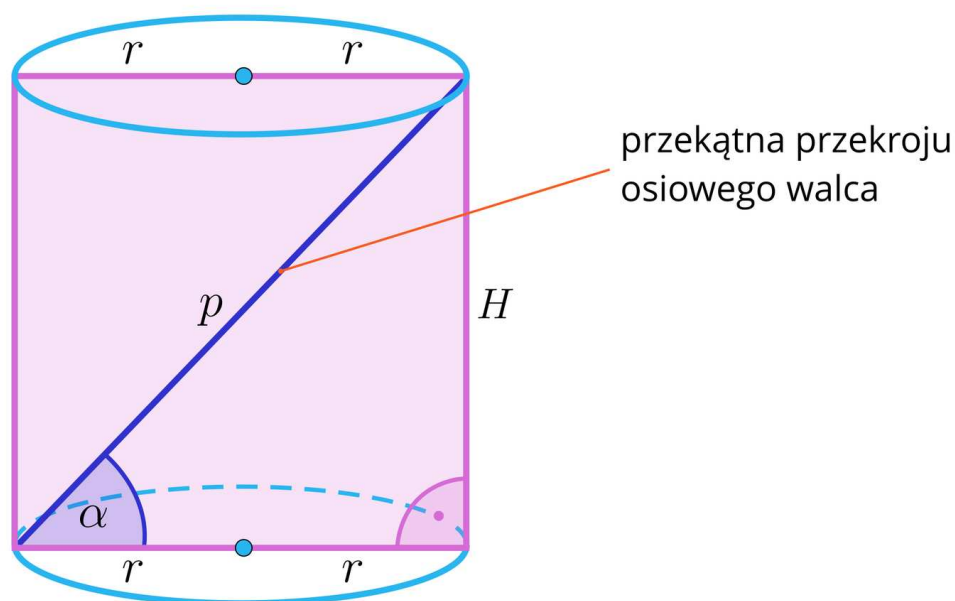
Przeczytaj

Najważniejszymi odcinkami w walcu są: wysokość, promień podstawy, średnica podstawy i przekątna **przekroju osiowego**.

Przypomnijmy, że przekrój osiowy walca jest prostokątem o wymiarach $2r \times h$. Przekątna przekroju osiowego ma więc długość $\sqrt{4r^2 + h^2}$.



Na rysunku poniżej zaznaczono kąt pomiędzy przekątną przekroju osiowego, a promieniem (średnicą) podstawy.



Trójkąt, którego bokami są średnica podstawy, wysokość walca i przekątna przekroju osiowego jest trójkątem prostokątnym.

Przykład 1

Obliczymy miarę kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do średnicy podstawy, jeżeli wysokość walca jest dwukrotnie dłuższa od promienia podstawy.

Rozwiązanie:

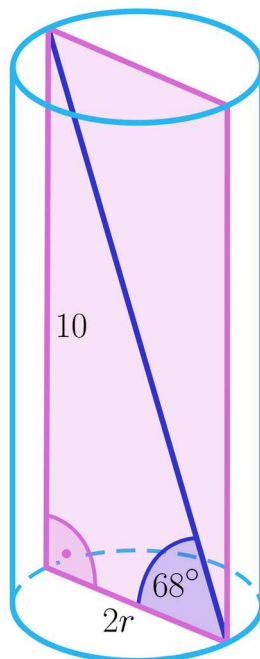
Jeżeli wysokość jest dwukrotnie dłuższa od promienia podstawy, to znaczy, że średnica ma długość równą długości wysokości. A zatem trójkąt prostokątny, którego bokami są średnica, wysokość i przekątna jest równoramienny. Szukany kąt ma więc miarę 45° .

Przykład 2

Kąt pomiędzy przekątną przekroju osiowego, a średnicą podstawy walca ma miarę 68° . Obliczymy objętość i pole powierzchni tego walca, jeżeli wysokość tego walca wynosi 10 cm.

Rozwiązanie:

Zróbmy rysunek pomocniczy:

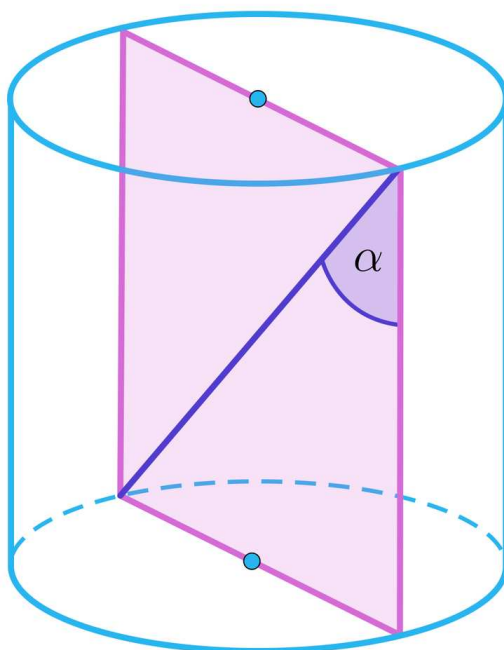


$$\text{Mamy, że } \operatorname{tg} 68^\circ = \frac{10}{2r}$$

$$\text{Czyli } \frac{5}{r} \approx 2,4751, \text{ a stąd } r \approx 2,02.$$

$$\text{Mamy więc } V = \pi \cdot (2,02)^2 \cdot 10 \approx 40,8\pi \text{ oraz } P_c = 2\pi \cdot 2,02 \cdot (2,02 + 10) \approx 48,56\pi.$$

Wysokość walca, która zawiera się w jego powierzchni bocznej, nazywamy tworzącą walca. Na rysunku poniżej zaznaczony został kąt pomiędzy przekątną przekroju osiowego, a tworzącą walca.

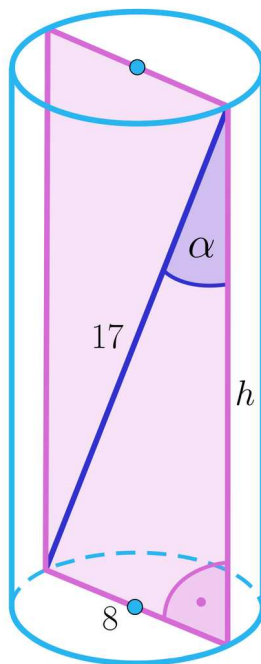


Przykład 3

Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 17, a promień 4. Obliczmy tangens kąta pomiędzy przekątną tego przekroju a tworzącą.

Rozwiązanie:

Zróbmy rysunek pomocniczy:



Obliczymy h z twierdzenia Pitagorasa: $8^2 + h^2 = 17^2$, a stąd $h = 15$. A zatem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{15}$.

Uwaga!

Suma miar kątów pomiędzy przekątną przekroju osiowego, a promieniem podstawy oraz pomiędzy przekątną przekroju osiowego, a tworzącą wynosi 90° .

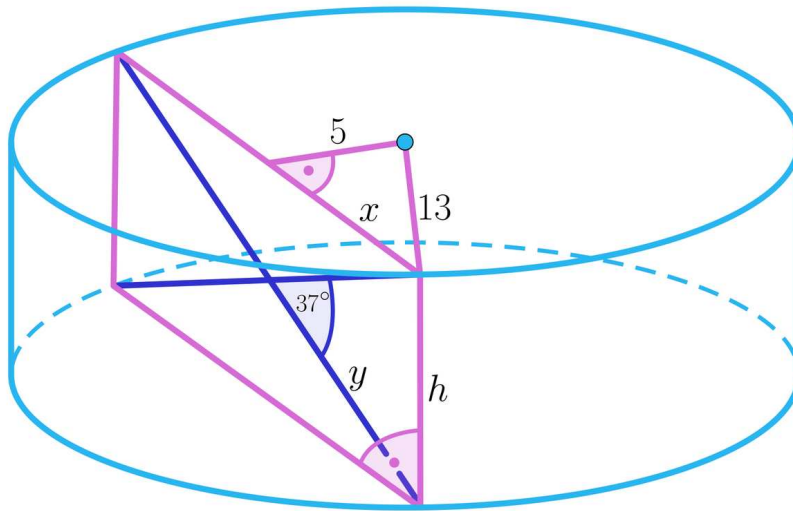
Przykład 4

Kąt pomiędzy przekątnymi pewnego **przekroju** walca, prostopadłego do podstawy i oddległego od środka o 5, ma miarę 37° . Obliczymy pole tego przekroju wiedząc, że promień walca ma długość 13, a wysokość walca jest krótsza od boku przekroju zawartego w podstawie.

Rozpatrzmy teraz przekrój walca prostopadły do podstawy, różny od przekroju osiowego. Przekrój ten również ma kształt prostokąta.

Rozwiązanie:

Zróbmy rysunek pomocniczy:



Obliczymy długość boku przekroju zawartego w podstawie walca:

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa: $5^2 + x^2 = 13^2$. A zatem $x = 12$.

Stąd bok przekroju zawarty w podstawie ma długość 24.

Obliczymy długość przekątnych tego przekroju z twierdzenia cosinusów:

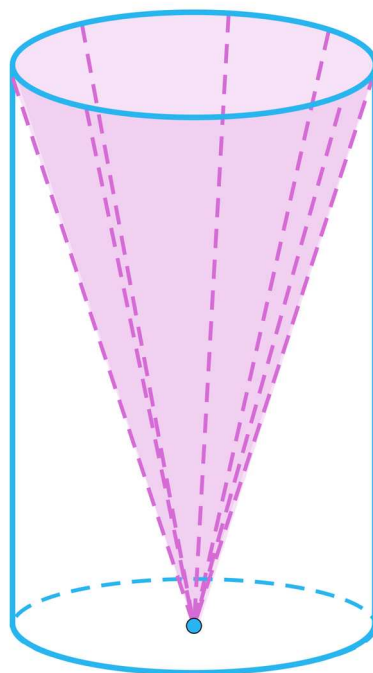
$$y^2 + y^2 - 2y^2 \cos 143^\circ = 24^2$$

A stąd $3,5972y^2 = 576$, a zatem $y \approx 12,65$. Cała przekątna ma więc długość około 25,3.

Pole przekroju możemy obliczyć ze wzoru $P = \frac{1}{2}p^2 \sin \alpha$, gdzie p jest długością przekątnej, a α miarą kąta pomiędzy przekątnymi. Mamy więc

$$P \approx \frac{1}{2} \cdot (25,3)^2 \cdot 0,6018 \approx 192,6.$$

Łącząc każdy z punktów na okręgu podstawy walca ze środkiem drugiej podstawy otrzymujemy odcinki, które są tworzącymi stożka o tej samej wysokości i tym samym promieniu co walec.



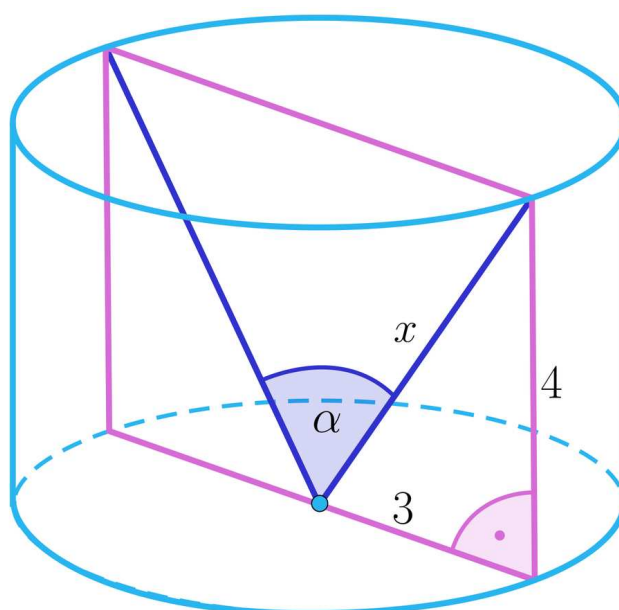
Mówimy wtedy, że stożek jest wpisany w walec.

Przykład 5

Dany jest walec o promieniu 3 i wysokości 4. W walcu tym poprowadzono przekrój osiowy. Obliczymy miarę kąta pomiędzy odcinkami łączącymi wierzchołki dłuższego boku przekroju ze środkiem drugiej podstawy. Odpowiemy na pytanie, czym ten kąt jest dla stożka powstałego przez połączenie punktów na brzegu podstawy ze środkiem drugiej podstawy.

Rozwiązanie:

Zróbmy rysunek pomocniczy:



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że odcinek x ma długość 5. Obliczymy miarę kąta α z twierdzenia cosinusów:

$$6^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

A zatem $\cos \alpha = \frac{14}{50} = \frac{7}{25} = 0,28$. Stąd $\alpha \approx 74^\circ$.

Dla stożka wpisanego w walec kąt ten jest kątem rozwarcia stożka.

Słownik

przekrój bryły

figura geometryczna będąca częścią wspólną bryły i płaszczyzny, która ją przecina

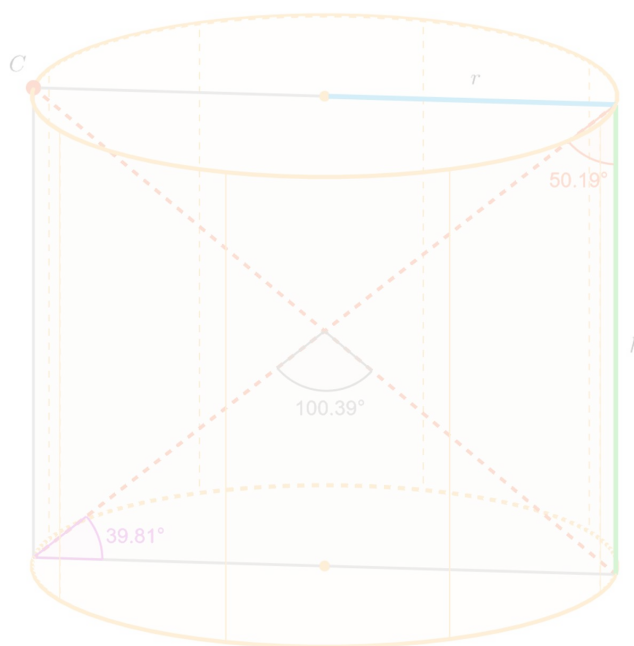
przekrój osiowy bryły obrotowej

przekrój bryły obrotowej zawierający oś obrotu

Aplet

Polecenie 1

Ustaw długość promienia na 4 i długość wysokości na 8. Odczytaj z rysunku miary kątów pomiędzy przekątną przekroju osiowego a tworzącą, przekątną przekroju osiowego a średnicą podstawy oraz pomiędzy przekątnymi przekroju osiowego. Sprawdź swoją odpowiedź z apletem.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DHcrMLFLa>

Polecenie 2

- Na podstawie apletu odpowiedz na pytanie: Kiedy kąt pomiędzy przekątnymi, który jest zaznaczony na rysunku, jest rozwarty?
- Wprowadźmy oznaczenia: α – kąt pomiędzy przekątną przekroju osiowego a tworzącą; β – kąt pomiędzy przekątną przekroju osiowego a średnicą podstawy oraz γ – kąt pomiędzy przekątnymi (zaznaczony na rysunku w aplecie). Określ związki między tymi kątami.

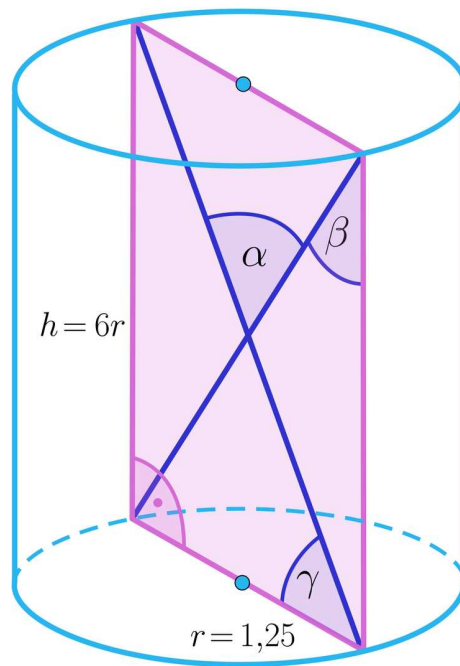
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1



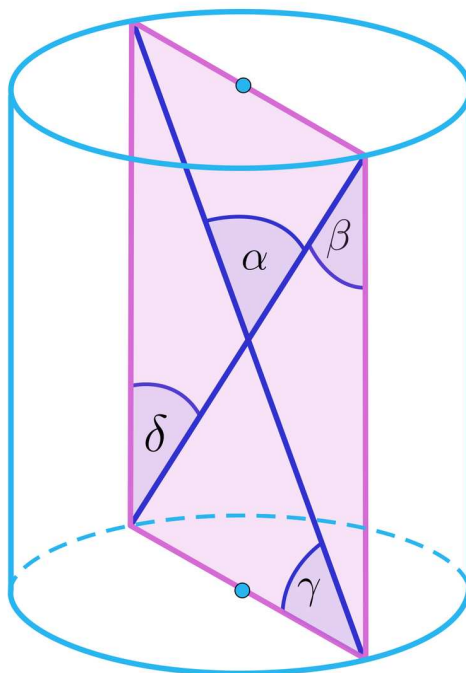
Ustaw zaznaczone na rysunku, kąty α , β , γ w kolejności od najmniejszego do największego.

 α  β  γ 

Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono kilka kątów pomiędzy odcinkami w walcu.



Oceń prawdziwość zdań.

	Prawda	Fałsz
Suma kątów β i δ wynosi 180° .	☐	☐
Jeżeli średnica podstawy jest krótsza od wysokości, to kąt α jest ostry.	☐	☐
Jeżeli punkt przecięcia przekątnych przekroju na rysunku połączymy z punktami na brzegu jednej z podstaw, to kąt α między przekątnymi tego przekroju jest kątem rozwarcia stożka powstałego w ten sposób.	☐	☐
Kąty β i δ mają tę samą miarę.	☐	☐

Ćwiczenie 3



Wysokość walca jest czterokrotnie dłuższa od promienia podstawy. Wówczas kąt pomiędzy przekątną przekroju osiowego a tworzącą walca ma miarę:

☐ 30° .

☐ około 63° .

☐ około 27° .

☐ 60° .

Ćwiczenie 4



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Kąt pomiędzy przekątnymi przekroju osiowego walca ma miarę 90° . A zatem:

☐ wysokość walca jest dwukrotnie dłuższa od promienia podstawy.

☐ przekrój osiowy jest kwadratem.

☐ przekrój osiowy jest rombem o kątach różnej miary.

☐ promień podstawy jest dwukrotnie dłuższy od wysokości.

Ćwiczenie 5



Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem o wymiarach $4\pi \times 8\pi$. Jaka miarę może mieć kąt pomiędzy przekątną przekroju tego walca a średnicą podstawy? Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ Około 18° .

☐ Około 81° .

☐ Około 72° .

☐ Około 58° .

Ćwiczenie 6



Objętość walca wynosi 6π . Kąt pomiędzy przekątną przekroju osiowego a średnicą jest dwukrotnie mniejszy od kąta pomiędzy przekątną przekroju osiowego a wysokością. Pole podstawy tego walca wynosi:

☐ 8π

☐ 3π

☐ 6π

☐ 4π

Ćwiczenie 7



Walec przecięto w odległości 7 od środka płaszczyzną prostopadłą do podstaw otrzymując czworokąt $ABCD$. Cosinus kąta ASB (gdzie S jest środkiem podstawy, na brzegu której leżą punkty A i B) wynosi $(-0,8432)$. Kąt nachylenia przekątnej tego przekroju do tworzącej ma miarę 30° . Oblicz pole powierzchni tego walca.

Ćwiczenie 8



Czworokąty $ABCD$ i $ADEF$ są przystającymi przekrojami prostopadłymi do podstaw walca o promieniu 2 i wysokości 4. Odcinek EC jest średnicą podstawy. Oblicz miarę kąta pomiędzy odcinkami FD i BD .

Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty między odcinkami w walcu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;

4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje kąty pomiędzy odcinkami w walcu;
- oblicza miarę kątów pomiędzy odcinkami w walcu;
- oblicza długości odcinków, pole powierzchni, objętość, pole przekroju walca, w którym dany będzie kąt pomiędzy odcinkami;
- analizuje zależność pomiędzy miarami kątów między odcinkami w walcu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- sztafeta zadaniowa;
- rozmowa nauczająca;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca z całą klasą;
- praca w grupach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora;
- materiały zawarte w e-podręczniku;
- modele brył.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wraz z uczniami prowadzi pogadankę na temat odcinków w walcu.
2. Nauczyciel formułuje temat i kryteria sukcesu.
3. Nauczyciel pokazuje uczniom na przykładach z sekcji „Przeczytaj”, jak oblicza się miary kątów pomiędzy odcinkami w walcu.
4. Nauczyciel prezentuje uczniom Aplet i go omawia.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy. Każdej grupie przyporządkowuje kartkę z zadaniami z sekcji Sprawdź się (może to być przedruk zadań lub kody QR), każdemu zadaniu przyporządkowuje punkty według własnego uznania.
2. Przedstawiciel grupy odbiera od nauczyciela pierwsze ćwiczenie, wraca do grupy. Po rozwiązaniu zadania – sprawdza w materiałach interaktywnych odpowiedź, jeśli jest prawidłowa, przekazuje nauczycielowi kartkę z tokiem rozumowania. Jeśli jest błędna, pracują dalej.
3. Nauczyciel sprawdza na bieżąco rozwiązania i przekazuje uczniom kolejne zadanie do wykonania dopiero, gdy poprzednie będzie zrobione prawidłowo.
4. Uczniowie za pomocą świateł: zielone – nie mamy problemów, żółte – mamy wątpliwości, czerwone – nie rozumiemy zadania przekazują nauczycielowi informację zwrotną dotyczącą pracy grupy.

5. W przypadku światła czerwonego nauczyciel podchodzi do grupy i prowadzi z nią dyskusję nauczającą na temat rozwiązania zadania – w tym przypadku grupa otrzymuje połowę punktów.
6. W przypadku światła żółtego nauczyciel wskazuje konkretny temat, przykład zadanie z materiałów w e-podręczniku (może być z poprzednich tematów), w którym uczniowie odnajdą wskazówki do rozwiązania zadania.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel podlicza punkty i podsumowuje pracę grup. Przekazuje informację zwrotną w formie pisemnej lub ustnej do każdej z grup, nad czym należy jeszcze popracować, a co zostało już opanowane.

Praca domowa:

Polecenia z sekcji „Aplet”.

Materiały pomocnicze:

- [Bryły obrotowe – walec](#)
- [Walec. Pole powierzchni walca](#)

Wskazówki metodyczne:

- Aplet uczniowie mogą wykorzystać w domu do ćwiczenia obliczeń miar kątów pomiędzy odcinkami w walcu.
- Nauczyciel może wykorzystać aplet na lekcji o przekrojach (osiowych) walca.