



Czy linia prosta jest zawsze prosta?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Mapa myśli
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Czy linia prosta jest zawsze prosta?

Źródło: dostępny w internecie: [Gerd Altmann](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

Julian Tuwim w wierszu „*Spostrzeżenie*” napisał:

“ W naturze nie ma linii prostej
Ludzki to wymysł sztuczny.
Patrząc w skłębione żyworosty,
Chaosu, chaosu się uczmy.
Pogięty, kręty i strzępiasty
Jest każdy stwór w naturze,
A prostą linią łączą gwiazdy
Głupcy i tchórze.

Czy miał rację? Nad tym będziemy zastanawiać się podczas tej lekcji. Materiał zawarty w tej lekcji jest materiałem wykraczającym poza podstawę programową, więc jeśli nie interesuje Cię ta tematyka, możesz po prostu lekcję pominąć.

Twoje cele

- Odkryjesz sferyczną prostą.
- Określisz własności sferycznej prostej.
- Określisz różnice pomiędzy prostą na płaszczyźnie i prostą sferyczną.

Przeczytaj

Obserwując globus widzimy, że na powierzchni kuli są już nakreślone figury geometryczne: okręgi, półokręgi, wielokąty. Wyobrażając sobie podróż pomiędzy trzema miejscami na kuli ziemskiej możemy naszkicować mocno uproszczoną trasę tej podróży. Możemy też zmatematyzować sytuację, czyli zastąpić szlak podróży odpowiadającym obiektem matematycznym. Tym obiektem jest trójkąt i to właśnie on stanowi model matematyczny opisanej sytuacji. Teraz będziemy zajmować się tylko stroną matematyczną zagadnienia.

Gdy chcemy skonstruować trójkąt na płaszczyźnie, wybieramy jego wierzchołki i konstruujemy boki. Czym są te boki? Od razu odpowiecie: odcinkami. Na sferze też potrzebujemy odcinków, aby skonstruować dowolny wielokąt. Jak więc skonstruować [odcinek na sferze](#)? Czy on istnieje? Wróćmy na chwilę na płaszczyznę i zapytajmy sami siebie: czym jest odcinek na płaszczyźnie? Od razu odpowiecie: fragmentem prostej. I już mamy temat tej lekcji: ponieważ bez pojęcia prostej nie moglibyśmy konstruować wielokątów, więc potrzebujemy sferycznej prostej.

Patrząc na zakrzywienie sfery możemy jednak zadać sobie kolejne pytanie: Jak możemy szukać prostej na powierzchni zakrzywionej, jeśli tam nie ma nic prostego – wszystko jest krzywe? Oczywiście. Nie możemy szukać prostej w tym znaczeniu, jakie znamy z płaszczyzny, ale potrzebujemy takiego zbioru punktów, który pełni na sferze taką samą rolę, jak prosta na płaszczyźnie. I tutaj musimy sobie odpowiedzieć na bardzo ważne pytanie, nad którym pewnie nie zastanawiamy się, myśląc o linii prostej na płaszczyźnie:

Jaką rolę pełni [prosta na płaszczyźnie](#)? Dlaczego uczymy się o niej? Do czego jest nam w geometrii potrzebna?

Częściowo już odpowiedzieliśmy na to pytanie: bez pojęcia prostej nie moglibyśmy konstruować wielokątów. Ale to nie wszystko: Pomyślmy o mierzeniu odległości i określmy drugą bardzo ważną rolę, jaką pełni prosta na płaszczyźnie:

Najmniejsza odległość pomiędzy punktami jest wzdłuż prostej.

Do pracy na płaszczyźnie posłużą nam kartka papieru, ołówek oraz przyrządy geometryczne, zaś do pracy na sferze okrągłe przedmioty z naszego otoczenia, wykałaczki, gumki recepturki, długopisy, nitka.

Przykład 1

Rozważmy następującą sytuację: Mamy dwa różne punkty na płaszczyźnie – nazwijmy je A i B . Wiemy z nauki geometrii, że najkrótsza droga między nimi to droga zawarta w prostej przechodzącej przez nie. Czy gdybyśmy mogli przedłużyć w nieskończoność końce linii, w której zawarta jest “najkrótsza droga” między dwoma punktami, czy końce

tej linii spotkałyby się gdziekolwiek? Na ile części punkty A i B dzielą otrzymaną linię? Ile tych części jest skończonych? Ile części jest nieskończonych?

Rozwiązanie:

Nie spotkałyby się. Zazwyczaj wykonujemy nasze rysunki na ograniczonej części płaszczyzny (kartka w zeszycie, tablica), gdzie możemy narysować tylko fragment prostej, ale gdybyśmy mogli poruszać się swobodnie po płaszczyźnie, na której rysujemy, nigdy nie osiągnęlibyśmy końca naszej prostej, jak pokazuje poniższy aplet.

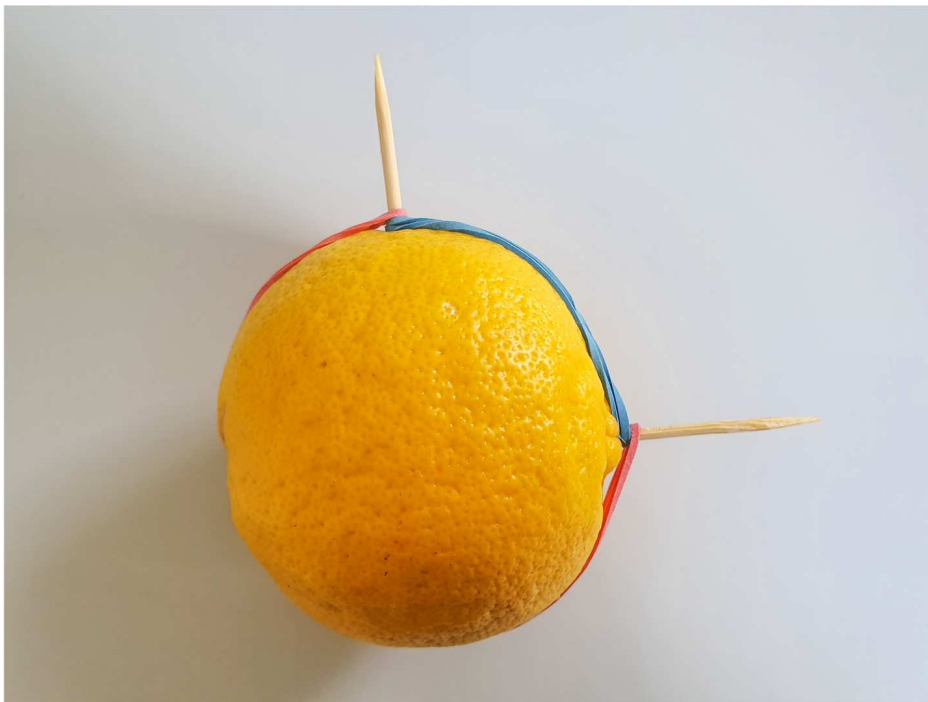
Punkty A i B dzielą prostą, na której leżą, na trzy części: dwie z nich są nieskończone, jedna skończona i nazywamy ją odcinkiem. Zauważmy, że dwa punkty można połączyć na płaszczyźnie tylko jednym odcinkiem.

Przykład 2

A teraz wykonajmy takie same czynności na sferze i odpowiedzmy na te same pytania, które postawiliśmy kreśląc prostą przechodzącą przez dwa punkty na płaszczyźnie.

Rozwiązanie:

Tutaj można posłużyć się pomarańczą lub jakimś innym kulistym przedmiotem, w który można wbić wykałaczki lub pinezki. Niech wykałaczki wbite w skórkę pomarańczy reprezentują punkty na sferze. Jeśli połączymy je gumką recepturką (niebieski kolor) i pozwolimy jej ułożyć się swobodnie pomiędzy dwoma punktami, to wybierze ona najkrótszą drogę pomiędzy tymi punktami. Obserwujemy, że utworzyła ona łuk, który jest przeciw częścią okręgu. Jakiego? Jeśli teraz przedłużymy tę „drogę” pomiędzy dwoma punktami w obu kierunkach, to te „przedłużenia” spotkają się, tworząc jej dopełnienie (czerwony kolor) do pełnego okręgu:



Możemy również wykonać takie doświadczenie, wykonując rysunki na piłeczce styropianowej.

W wyniku przedłużenia linii łączącej dwa wybrane punkty na sferze otrzymaliśmy **okrąg wielki**.

A teraz odpowiedzmy na dodatkowe pytania, których nie mogliśmy postawić w stosunku do płaszczyzny: Jaki obiekt odpowiada okręgowi wielkiemu na globusie? Łatwo stwierdzamy, że przykładem może być równik. Popatrzmy teraz na globus i zastanówmy się: jaką rolę pełni równik w mierzeniu odległości na powierzchni Ziemi? I znowu łatwo wywnioskujemy, że jeżeli odległości mierzymy wzdłuż najkrótszej drogi między dwoma punktami, to musi to odbywać się wzdłuż okręgu wielkiego przechodzącego przez te punkty.

Postawmy więc bardzo ważne pytanie:

Czy więc okrąg wielki może być uznany za **sferyczną prostą**? Dlaczego tak lub dlaczego nie?

Otóż okrąg wielki (np. „równik”) w geometrii na powierzchni kuli jest nazywany **sferyczną prostą**. Oprócz tego, że wzdłuż niego mierzymy odległości, jest jeszcze jedno uzasadnienie – geometryczne: czyni on ze sferą to, co prosta z płaszczyzną: dzieli ją na dwie przystające części.

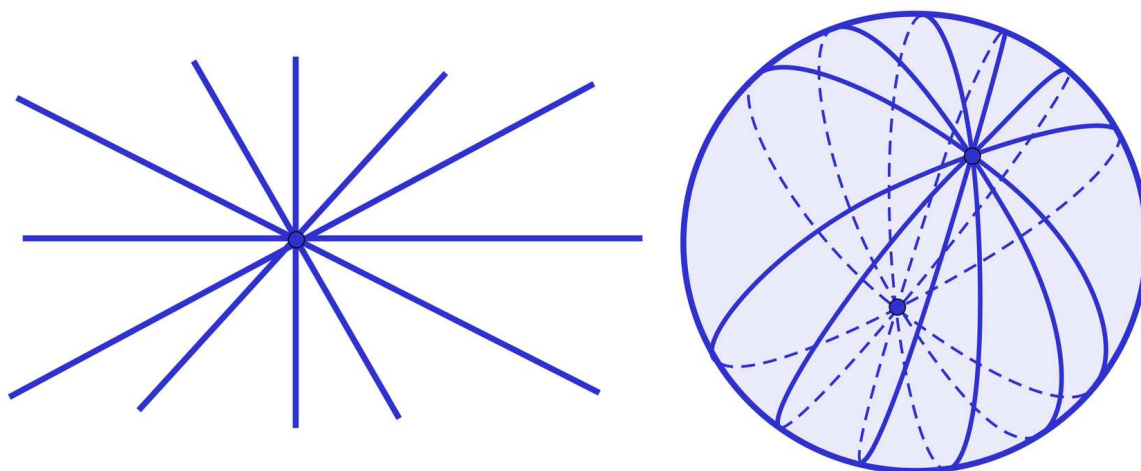
Nasze dwa punkty dzielą otrzymaną linię na dwie części; obie z tych części są skończone. Obie nazywają się odcinkami sferycznymi i dopełniają się wzajemnie do sferycznej prostej. Z tego wynika, że dwa punkty na sferze można połączyć dwoma różnymi odcinkami sferycznymi.

Porównajmy teraz niektóre własności prostej na płaszczyźnie i prostej sferycznej. Oczywiście przed przeczytaniem rozwiązania postawionych problemów, powinniście sami wykonać odpowiednie doświadczenia lub po prostu poobserwować globus.

Przykład 3

Ile różnych linii prostych przechodzących przez wybrany punkt na płaszczyźnie możesz narysować? A na sferze?

Rozwiązanie:

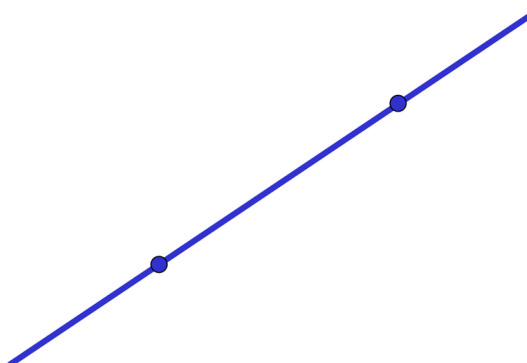


Zarówno na płaszczyźnie, jak i na sferze przez punkt przechodzi nieskończenie wiele prostych.

Przykład 4

Ile różnych linii prostych przechodzących przez dwa wybrane punkty na płaszczyźnie możesz narysować? A na sferze?

Rozwiązanie:

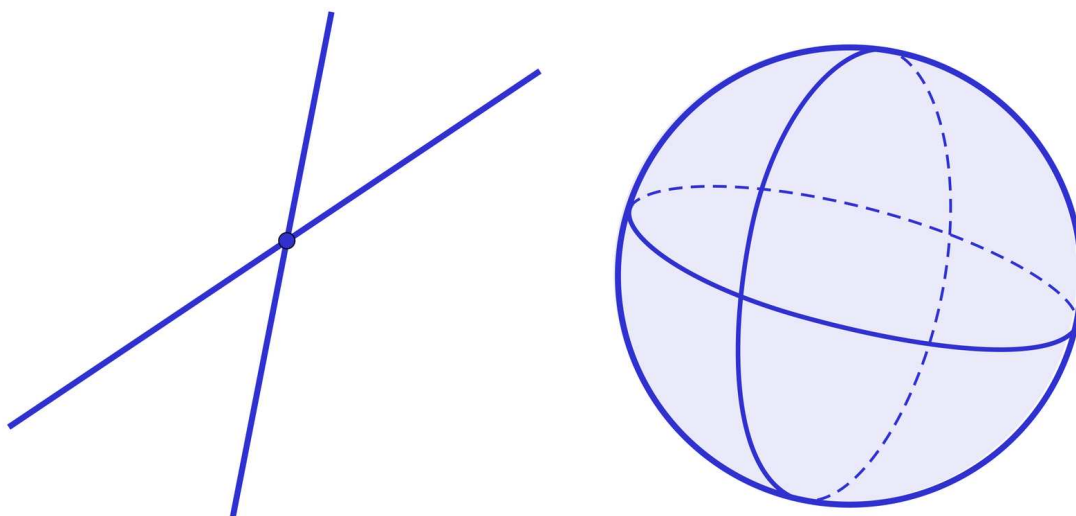


Na płaszczyźnie przez dwa różne punkty można przeprowadzić tylko jedną prostą. Na sferze to zależy od wybranych punktów. Przez punkty biegunowe można przeprowadzić nieskończenie wiele prostych, przez dwa punkty, które nie są punktami biegunowymi – tylko jedną.

Przykład 5

W ilu punktach mogą się przeciąć dwie proste na płaszczyźnie? A na sferze?

Rozwiązanie:



Na płaszczyźnie dwie proste mogą się przeciąć w jednym punkcie. Na sferze zawsze przecinają się w dwóch punktach.

Słownik

odcinek sferyczny

część sferycznej prostej, czyli łuk zawarty w okręgu wielkim

okrąg wielki

okrąg na sferze o promieniu równym promieniowi tej sfery

prosta na płaszczyźnie

w klasycznej geometrii euklidesowej, prosta jest tzw. pojęciem pierwotnym, nie definiowanym formalnie; linia prosta w sensie potocznym różni się od tego, co pod tym pojęciem określa się w matematyce; potocznie „prosta” oznacza „niezakrzywiona”; w geometrii euklidesowej „prosta” albo „linia prosta”, oprócz tego, że nie jest

zakrzywiona, musi rozciągać się nieograniczenie w obydwie strony i mieć zerową „grubość”

sferyczna prosta

okrąg wielki na sferze

Mapa myśli

Polecenie 1

Poniżej widzisz mapę myśli dotyczącą linii prostej na płaszczyźnie, zapoznaj się z sugestiami dotyczącymi wszechstronnej charakterystyki prostej.

- [bold]Prosta na płaszczyźnie[/]
 - jest nieskończona
 - przez dwa punkty można przeprowadzić tylko jedną
 - dwa punkty wyznaczają jedną prostą
 - odcinek to część prostej zawarta między dwoma punktami
 - dwa punkty wyznaczają jeden odcinek
 - dwa punkty dzielą prostą na trzy części

Polecenie 2

Rozbuduj mapę dotyczącą sferycznej prostej. Możesz dodawać tyle gałęzi, ile masz spostrzeżeń dotyczących.

- [bold]Sferyczna prosta[/]
 - jest ...
 - dwa punkty dzielą ją na ... części

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Podczas rozwiązywania poniższych zadań Twoje pomoce naukowe stanowiąc będą globus, kuliste owoce, kulki styropianowe itp. przedmioty, na których można rysować, wpinać pinezki lub wykałaczki, łączyć je gumkami lub nitkami. Gorąco zachęcamy do wykonania doświadczeń i empirycznego zbadania problemu przed rozwiązaniem każdego ćwiczenia.

Ćwiczenie 1



Wybierz na sferze takie dwa punkty, aby można było przeprowadzić przez nie tylko jedną prostą sferyczną, a następnie takie dwa, aby można było przeprowadzić przez nie nieskończenie wiele prostych sferycznych. Jakie to punkty?

Ćwiczenie 2



Wskaż na globusie równik i bieguny. Jak myślisz, czy jeśli zamiast globusa weźmiesz zwykłą kulę i narysujesz na niej okrąg wielki, to też będziesz mógł znaleźć odpowiadające mu punkty biegunowe?

Spróbuj wykonać takie badanie posługując się swoją pomarańczą/kulką styropianową czy też innym narzędziem badawczym.

Ćwiczenie 3



Czy do każdych dwóch punktów biegunowych można określić odpowiadający im okrąg wielki? Jaki warunek muszą spełniać dwa punkty na sferze, aby można było określić odpowiadający im okrąg wielki? Zaznacz czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Muszą to być punkty biegunowe.	☐	☐

Ćwiczenie 4



Zaznacz poprawną odpowiedź. Czy na globusie (i ogólnie na sferze) istnieją sferyczne półproste?

☐ Tak, na globusie są to równoleżniki.

☐ Nie, na globusie nie istnieją sferyczne półproste.

☐ Tak, na globusie są to południki.

Ćwiczenie 5



Prosta na płaszczyźnie nie ma długości, ponieważ jest nieskończona. Prosta sferyczna jest skończona. Jak myślisz, czy można więc określić jakoś jej długość? Jak to zrobić, aby ta długość była niezależna od promienia sfery, na której ta prosta istnieje?

Ćwiczenie 6



Posłuż się dowolnym kulistym przedmiotem, wykonaj odpowiednie rysunki lub utwórz sferyczne proste z gumek recepturek i odpowiedz na pytanie: Jak mogą być położone wobec siebie dwie różne sferyczne proste? Uzasadnij swoje spostrzeżenia.

Ćwiczenie 7



Na ile rozłącznych obszarów można podzielić sferę trzema prostymi sferycznymi? Wpisz poprawne liczby.

To zależy od wyboru prostych: jeżeli wszystkie proste będą przechodziły przez bieguny, to podzielą sferę na części, jeśli jednak wszystkie trzy proste nie przecinają się w tych samych punktach, to dzielą sferę na części.

Ćwiczenie 8



Znajdź takie wzajemne położenie trzech prostych sferycznych, aby podzieliły one sferę na osiem przystających obszarów.

Dla nauczyciela

Autor: Anna Rybak

Przedmiot: Matematyka

Temat: Czy linia prosta jest zawsze prosta?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje pojęcie sferycznej prostej;
- określa własności sferycznej prostej;
- określa różnice pomiędzy prostą na płaszczyźnie i prostą sferyczną.
- dostrzega korelacje pomiędzy pojęciami używanymi w geometrii na powierzchni kuli i pojęciami używanymi w geografii.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- strategia czynnościowego nauczania matematyki;
- strategia porównawcza

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- dyskusja
- eksperyment

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu
- projektor multimedialny
- e-podręcznik
- arkusze papieru, pisak
- globusy, kulki styropianowe, wykałaczki, gumki recepturki, nitki.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w dyskusji odnoszą się do treści wiersza J. Tuwima przytoczonego w sekcji „Krótka informacja”, wyrażają swoje opinie, przypuszczenia dotyczące prostoliniowości w przyrodzie.
2. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Czy linia prosta jest zawsze prosta?”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się z materiałem z sekcji „Przeczytaj” i starają się w drodze dyskusji odpowiedzieć na postawione pytania o rolę linii prostej w geometrii. Analizują problemy przedstawione w przykładach, wykonują konstrukcje/rysunki na płaszczyźnie oraz doświadczenia/eksperymenty na kulistych przedmiotach, aby rozwiązać postawione problemy.
2. Uczniowie pracują nad mapami myśli z sekcji „Mapa myśli”, podsumowując swoje odkrycia i porównując własności prostej na płaszczyźnie i sferycznej prostej.
3. Uczniowie wykonują samodzielnie ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się” (z wyjątkiem ćwiczeń 3 i 5, które będą stanowiły pracę domową), a następnie w drodze dyskusji omawiają swoje rozwiązania..

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel zadaje uczniom pytania: Co było w lekcji trudne? Co było w lekcji interesujące? Odnosi się do elementów wskazanych jako trudne.

2. Uczniowie krótko podsumowują swoje osiągnięcia, rozwijając zdanie: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/nauczyłem się ...

Praca domowa:

Ćwiczenia 3 i 5 z sekcji „Sprawdź się”

Materiały pomocnicze:

- [Figury płaskie](#)
- [Kula i sfera](#)

Wskazówki metodyczne:

- Mapy myśli można wykorzystać do powtórzenia wiadomości o linii prostej i jej elementach. Ogólnie ideę map myśli można wykorzystać wszędzie tam, gdzie należy podsumować jakieś zasoby wiedzy, szczególnie, jeśli wiedza ta została skonstruowana samodzielnie przez uczniów.
- W tej lekcji występują czynności konkretne (na przedmiotach rzeczywistych), wyobrażeniowe (na schematach, rysunkach itp.) i abstrakcyjne (podczas wnioskowania), czyli pełna strategia czynnościowego nauczania matematyki. Występuje też strategia porównawcza, ponieważ uczniowie porównują prostą na płaszczyźnie i sferyczną prostą w różnych aspektach.