



## Związek między miarą łukową a stopniową

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: Torsten Muller, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](http://www.unsplash.com).

Jak przyporządkować kątowni liczbę? Wystarczy naszkicować okrąg jednostkowy, umieścić wierzchołek kąta w środku okręgu i obserwować, jaka jest długość łuku okręgu wyciętego przez ten kąt, w zależności od zmieniającego się promienia. Taka zależność pozwala na zdefiniowanie miary łukowej kąta. W trakcie lekcji poznamy, jaki związek ma miara łukowa kąta z miarą stopniową.

### Twoje cele

- Poznasz pojęcie miary łukowej kąta.
- Poznasz sposoby zamiany miary łukowej kąta na stopniową i odwrotnie.
- Zastosujesz podane zależności w rozwiązywaniu problemów matematycznych.

# Przeczytaj

Miara łukowa kąta, zgodna z układem SI, jest najczęściej stosowaną miarą kąta w fizyce i większości nauk technicznych.

## Już wiesz

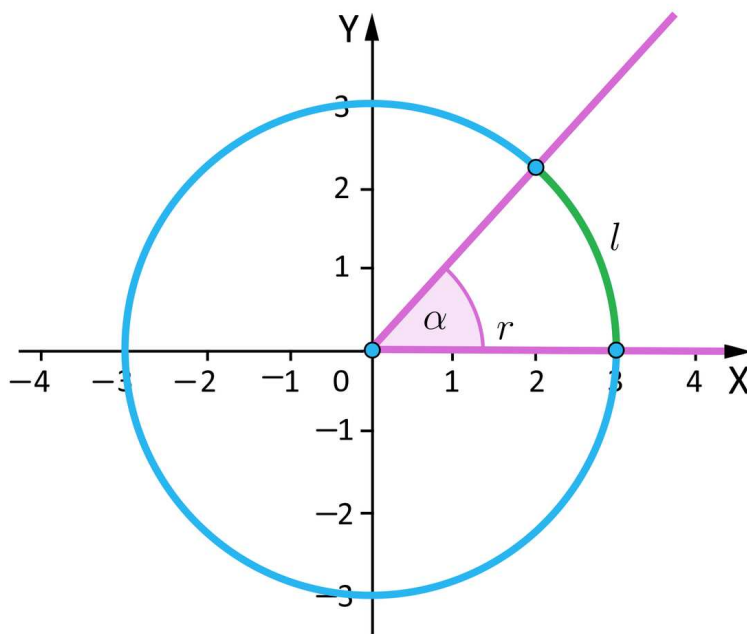
Długość łuku w okręgu o promieniu  $r$  i kącie rozwarcia  $\alpha$  obliczamy ze wzoru

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r.$$

## Definicja: Miara łukowa kąta

**Miara łukowa kąta**  $\alpha$  nazywamy stosunek długości łuku  $l$  do długości promienia  $r$ , zatem

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$



## Ważne!

**Miara łukowa kąta** nie zależy od długości promienia, ponieważ długość łuku jest proporcjonalna do długości promienia.

Jednostką miary łukowej jest **radian** (w skrócie zapisujemy: rad). Oznaczenie rad będziemy pomijać.

Miarę kąta podajemy również w **stopniach**.

Jeżeli kąt pełny podzielimy na 360 równych części, to otrzymamy miarę kąta jednostkowego w mierze stopniowej, którą nazywamy stopniem, co zapisujemy jako  $1^\circ$ .

### Ważne!

Miara stopniowa kąta opiera się na systemie sześćdziesiątkowym ( $1^\circ = 60'$ ), zaś miara łukowa kąta opiera się na systemie dziesiętnym.

### Przykład 1

Miary łukowe podanych kątów wynoszą:

$$90^\circ = \frac{\pi}{2},$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4},$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6},$$

$$360^\circ = 2\pi.$$

### Ważne!

Związek między miarą stopniową, a łukową kąta wyznacza zależność:  $180^\circ = \pi \text{ rad.}$

Jeżeli przez  $r$  oznaczymy miarę łukową kąta w radianach, zaś  $\alpha$  jako miarę kąta wyznaczoną w stopniach, to:

- przy zamianie miary stopniowej na łukową zastosujemy wzór:  $r = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$ ,
- przy zamianie miary łukowej na stopniową zastosujemy wzór:  $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot r$ .

### Przykład 2

Zamienimy kąt o mierze  $225^\circ$  na miarę łukową.

$$\text{Mamy zatem: } 225^\circ = \frac{225^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{5}{4} \pi.$$

### Przykład 3

Zamienimy kąt o mierze  $\frac{7}{8}\pi$  na miarę stopniową.

$$\text{Wykorzystując wzór na zamianę, otrzymujemy: } \frac{7}{8}\pi = \frac{7}{8}\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 157,5^\circ.$$

### Ważne!

Miarę łukową możemy zamienić na stopniową i odwrotnie bez użycia wzorów, za pomocą proporcji.

### Przykład 4

Przedstawimy kąt  $315^\circ$  w radianach.

Układamy proporcję:

$$315^\circ - x$$

$$180^\circ - \pi$$

Z proporcji otrzymujemy, że  $x = \frac{315^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{7}{4}\pi$ .

### Przykład 5

Miary dwóch kątów w trójkącie wynoszą  $\frac{\pi}{12}$  i  $\frac{\pi}{15}$ . Wyznamy miarę trzeciego kąta, wynik podamy w stopniach.

Wiadomo, że suma miar kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie wynosi  $180^\circ = \pi$ .

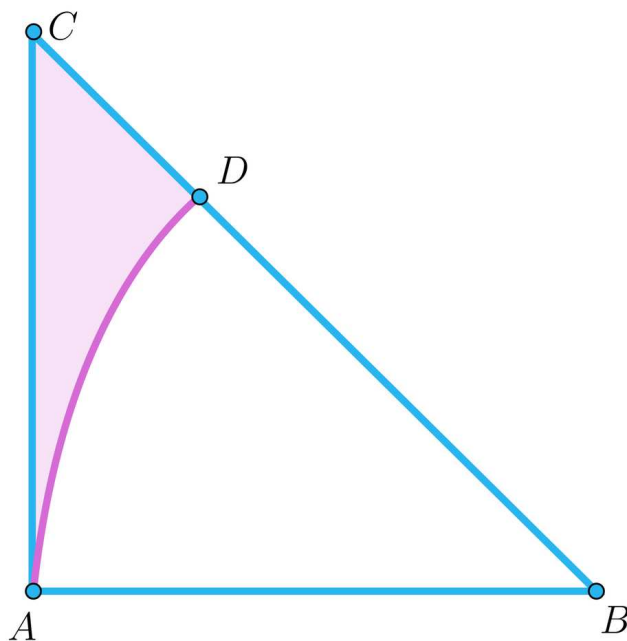
Zatem trzeci kąt ma miarę  $\pi - \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{15}\right) = \frac{51}{60}\pi$ .

Po zamianie miary łukowej na stopniową otrzymujemy:

$$\frac{51}{60}\pi = 153^\circ.$$

### Przykład 6

Podamy w radianach i stopniach miary kątów w trójkącie prostokątnym  $ABC$ , jeżeli długość łuku  $AD$  wynosi  $\frac{4}{9}\pi$ , a bok  $AB$  ma długość 2.



Oznaczmy  $\alpha$  jako miarę kąta  $ABC$ .

Do wyznaczenia miary kąta wykorzystamy wzór na długość łuku  $l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$ .

Podstawiamy dane  $l = \frac{4}{9}\pi$  oraz  $r = 2$  i otrzymujemy równanie:

$$\frac{4}{9}\pi = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 2.$$

Zatem  $\alpha = 40^\circ$ .

Miary kątów w stopniach i radianach w tym trójkącie wynoszą odpowiednio:

$$40^\circ = \frac{2}{9}\pi,$$

$$50^\circ = \frac{5}{18}\pi,$$

$$90^\circ = \frac{1}{2}\pi.$$

## Słownik

**miara łukowa kąta**

stosunek długości łuku do długości promienia

**radian**

jednostka miary łukowej kąta

# Infografika

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie wykonaj polecenie.

## Polecenie 2

Zapisz podane kąty:

a) w stopniach:  $\frac{5}{12}\pi$ ,  $\frac{3}{5}\pi$ ,  $\frac{11}{18}\pi$ ,

b) w radianach:  $144^\circ$ ,  $160^\circ$ ,  $84^\circ$ .

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Związek między miarą łukową a stopniową

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- definiuje miarę łukową i miarę stopniową kąta,
- wyznacza miary kątów zapisanych w stopniach i w radianach,
- zamienia miarę łukową kąta na miarę stopniową i odwrotnie.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- metoda przypadków;
- dyskusja.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

## **Przebieg lekcji**

### **Przed lekcją:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Związek między miarą łukową a stopniową” oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.

### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

### **Praca domowa:**

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Związek między miarą łukową a stopniową”).

**Materiały pomocnicze:**

- [Kąty i ich rodzaje](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Infografika” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Związek między miarą łukową a stopniową”.