Skracanie wyrażeń wymiernych

Źródło: Micheile Henderson, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

Każdy ułamek zwykły można zapisać na nieskończenie wiele sposobów.

Na przykład $\frac{75}{100} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = \ldots$

Ułamek zwykły możemy rozszerzać bądź skracać. Możemy doprowadzić go do postaci ułamka nieskracalnego, w którym licznik i mianownik są liczbami względnie pierwszymi.

Analogiczne operacje skracania i rozszerzania określone są dla ułamków algebraicznych.

Twoje cele

- Nauczysz się jak skracać wyrażenia wymierne wykorzystując rozkład wielomianów na czynniki.
- Wyznaczysz dziedzinę ułamka algebraicznego.

Przeczytaj

Dane jest wyrażenie wymierne $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są pewnymi wielomianami, $Q(x)$ nie jest wielomianem zerowym. Do dziedziny wyrażenia należą wszystkie liczby rzeczywiste z wyjątkiem pierwiastków wielomianu $Q(x)$.

Jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $Q(x)$ są podzielne przez pewien wielomian niezerowy $W(x)$, to istnieją wielomiany $P_1(x)$ i $Q_1(x)$ takie, że $P(x) = P_1(x) \cdot W(x)$ oraz $Q(x) = Q_1(x) \cdot W(x)$.

Wtedy ułamek $\frac{P(x)}{Q(x)}$ możemy **skrócić** przez wielomian $W(x)$ sprowadzając go do postaci $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$.

Wyrażenia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ oraz $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ są **równe** dla wszystkich liczb rzeczywistych z wyjątkiem pierwiastków wielomianu $Q(x)$ (czyli pierwiastków wielomianów $Q_1(x)$).

Przykład 1

Skrócimy ułamki, podając potrzebne założenia.

Przykład 2

Skrócimy wyrażenia wymierne, podając potrzebne założenia.

Przy skracaniu ułamka warto:

1. zapisać licznik i mianownik w postaci iloczynowej;
2. skrócić czynniki powtarzające się zarówwno w liczniku, jak i w mianowniku;
3. uwzględnić założenia (mianownik nie może przyjmować wartości 0).

Przykład 3

Ustalimy, jakie warunki muszą być spełnione, aby zachodziła równość wyrażeń.

Przykład 4

Dane jest wyrażenie wymierne $\frac{x+2}{x-3}$, określone dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Ustalimy, dla jakich x wartości podanego wyrażenia i ułamka $\frac{x+2}{x-3}$ są równe.

Przykład 5

Skrócimy ułamek $\frac{x^2+x+1}{x^4+x^2+1}$.

- Zauważmy, że ułamek jest określony dla $x \in \mathbb{R}$, ponieważ wyrażenie w mianowniku nie przyjmuje wartości mniejszych od 1.
- Wielomian w liczniku jest nierozkładalny ($\Delta < 0$), więc jeśli ułamek da się skrócić, to tylko przez wyrażenie $x^2 + x + 1$.

Ostatni przykład jest trochę trudniejszy.

Przykład 6

Skrócimy następujące wyrażenie wymierne $\frac{x^8+2x^4-3x^2+1}{x^4+\sqrt{3}x+1}$.

- Spróbujmy zapisać licznik w postaci iloczynu. W tym celu użyjemy wzorów skróconego mnożenia
$x^8 + 2x^4 - 3x^2 + 1 = \left(x^8 + 2x^4 + 1\right) - 3x^2 =$
$= \left(x^4 + 1\right)^2 - \left(\sqrt{3}x\right)^2 =$
$= \left(x^4 + 1 + \sqrt{3}x\right)\left(x^4 + 1 - \sqrt{3}x\right).$

- Możemy zatem skrócić ułamek przez $\left(x^4 + \sqrt{3}x + 1\right)$
$\frac{x^8+2x^4-3x^2+1}{x^4+\sqrt{3}x+1} = \frac{\left(x^4-\sqrt{3}x+1\right)\left(x^4+\sqrt{3}x+1\right)}{x^4+\sqrt{3}x+1} = x^4 - \sqrt{3}x + 1.$

- Pozostało jeszcze ustalenie założeń, czyli wykluczenie sytuacji, gdy $x^4 + \sqrt{3}x + 1 = 0.$

- Po raz kolejny posłużymy się wzorami skróconego mnożenia. Zauważmy, że $x^4 + \sqrt{3}x + 1 = \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(x^2 + \sqrt{3}x + \frac{3}{4}\right) =$
$= \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$

- Uzyskaliśmy sumę dwóch kwadratów. Suma kwadratów liczb rzeczywistych przyjmuje wartość 0 tylko wtedy, gdy wszystkie wyrażenia podnoszone do kwadratu przyjmują jednocześnie wartość 0. W naszym przypadku jest to niemożliwe - drugie wyrażenie przyjmuje wartość 0 tylko dla $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ale wtedy pierwsze wyrażenie przyjmuje wartość różną od 0.

- Zatem $x \in \mathbb{R}$.

Słownik

dziedzina wyrażenia algebraicznego

wszystkie liczby rzeczywiste, dla których to wyrażenie ma sens liczbowy

równość wyrażeń wymiernych

wyrażenia wymierne są równe, gdy mają tą samą dziedzinę i dla każdego argumentu z dziedziny przyjmują odpowiednio te same wartości

skracanie wyrażenia wymiernego

podzielenie licznika i mianownika przez to samo niezerowe wyrażenie $Q_1(x) \cdot W(x) \neq 0$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawionymi w animacji przykładami skracania wyrażeń wymiernych.

Zwróć uwagę na konieczność podania założeń.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D3nzeGRwE

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej skracania wyrażeń wymiernych.

Polecenie 2

Skróć ułamek $\frac{10x^4y^2-20x^3y^2}{30xy^3-15x^2y^3}$.

Polecenie 3

Skróć wyrażenie wymierne $\frac{2x^2+x-6}{4x^2-16x+15}$.

Polecenie 4

Skróć wyrażenie wymierne $\frac{x^3+x^2-9x-9}{x^4-6x^3+8x^2+6x-9}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Skracanie wyrażeń wymiernych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:
7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- skraca wyrażenia wymierne wykorzystując rozkład wielomianów na czynniki;
- wyznacza dziedziny przy skracaniu wyrażeń algebraicznych zapisanych w postaci ułamka.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- metoda kota i myszy;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. nauczyciel przedstawia uczniom temat - „Skracanie wyrażeń wymiernych”, wskazuje cele zajęć;
2. uczniowie proponują kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”, a następnie metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej, role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.
2. Uczniowie oglądają animację. Nauczyciel dzieli uczniów na trzy grupy. Każda z grup rozwiązuje inne polecenie pod animacją. Wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania na forum klasy. Problemy w rozwiązaniach dyskutowane wspólnie z nauczycielem.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują indywidualnie zadania numer 4-8. Następnie prezentują swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak ...”.

Praca domowa:

- Uczniowie w domu rozwiązują ćwiczenia 1-3 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Wyrażenia wymierne. Równania wymierne

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i powtórzenie wiedzy przed sprawdzianem.