



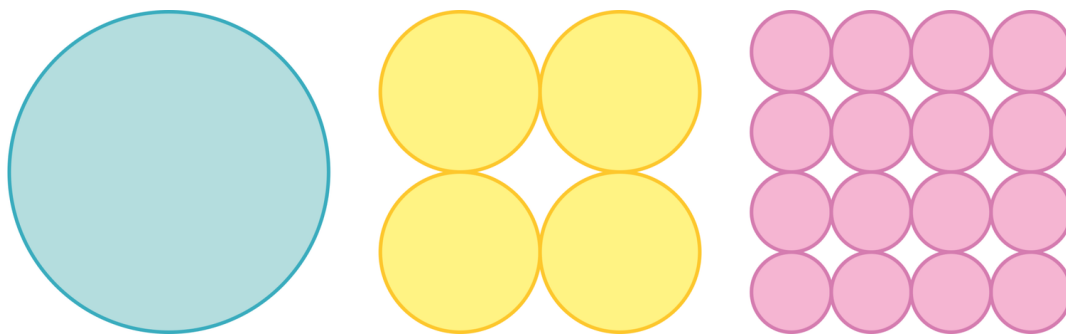
Najmniejsza/największa wartość ciągu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Najmniejsza/największa wartość ciągu

Źródło: Denise Jans, dostępny w internecie: www.unsplash.com.



Porównując promienie kół przedstawionych na kolejnych rysunkach zauważamy, że promienie zmniejszają się. Na każdym kolejnym rysunku są dwukrotnie mniejsze niż na poprzednim. Teoretycznie moglibyśmy tworzyć według tej reguły następne koła. Długości promieni tak zbudowanych kół utworzą nieskończony ciąg malejący. Pierwszy wyraz tego ciągu to wyraz największy. A czy taki ciąg ma wyraz najmniejszy? Odpowiedź na to pytanie uzyskasz, po przeanalizowaniu tego materiału.

Twoje cele

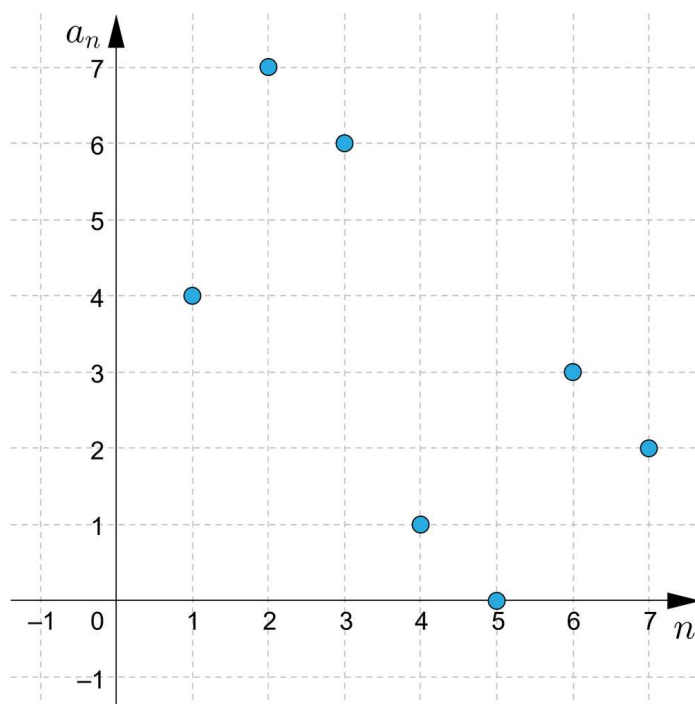
- Określisz najmniejszy/ największy wyraz danego ciągu liczbowego (jeżeli istnieje).
- Obliczysz wyrazy ciągu spełniające dany warunek.
- Wykorzystasz własności ciągów określonych wzorem ogólnym i rekurencyjnym.

Przeczytaj

Jeżeli ciąg liczbowy jest skończony, to poszukując najmniejszej/największej wartości ciągu, korzystamy najczęściej z wykresu lub wzoru ogólnego ciągu.

Przykład 1

Określimy na podstawie wykresu skończonego ciągu (a_n) najmniejszy i największy wyraz tego ciągu.



Z wykresu odczytujemy, że najmniejszą wartość równą 0 ma wyraz a_5 .

Największą wartość równą 7 przyjmuje wyraz a_2 .

Przykład 2

Ciąg (b_n) określony jest wzorem ogólnym $b_n = 4n - 5$ dla $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 9, \dots, 19, 20\}$. Określimy największy i najmniejszy wyraz tego ciągu.

Wykres ciągu (b_n) zawiera się w prostej, będącej wykresem funkcji $f(x) = 4x - 5$. Funkcja ta jest rosnąca, zatem i ciąg (b_n) jest rosnący.

Najmniejszy wyraz ciągu to:

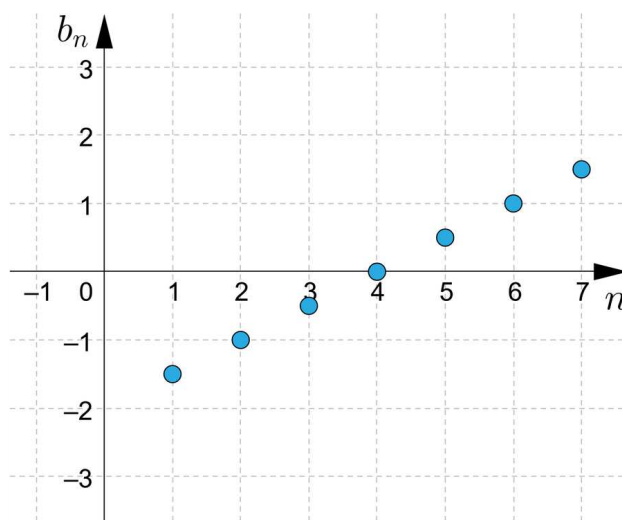
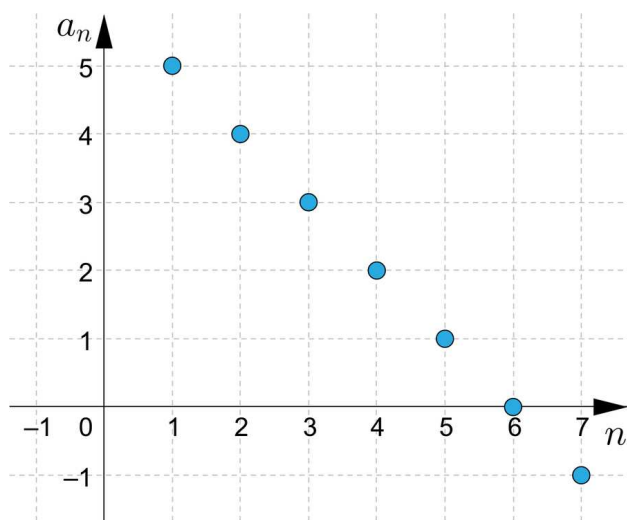
$$a_1 = 4 \cdot 1 - 5 = -1.$$

Największy wyraz ciągu to:

$$a_{20} = 4 \cdot 20 - 5 = 75$$

Odpowiedź: Najmniejszy wyraz ciągu to (-1) , a największy to 75.

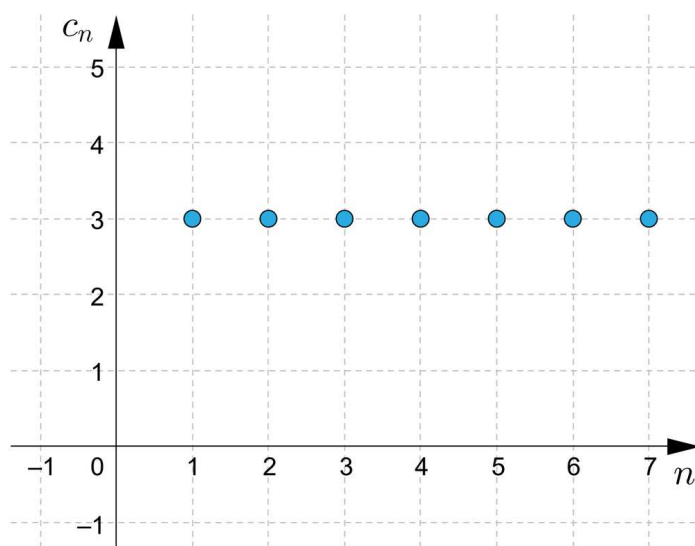
Na rysunku przedstawiono fragmenty wykresów ciągów nieskończonych (a_n) i (b_n) .
Przypuszczamy, że ciąg (a_n) to ciąg malejący, a ciąg (b_n) to ciąg rosnący.



Zauważmy, że ciąg malejący nie ma wyrazu najmniejszego, ale ma wyraz największy. Jest to pierwszy wyraz ciągu.

W ciągu rosnącym, jest na odwrót – pierwszy wyraz ciągu to wyraz najmniejszy, a wyrazu największego ciąg nie przyjmuje.

Jeśli ciąg jest stały (wykres takiego ciągu na rysunku poniżej) – każdy wyraz ciągu ma taką samą wartość.



Przykład 3

Wyrazy ciągu (a_n) dla $n \geq 1$ tworzone są według pewnej reguły. Znajdziemy tę regułę na podstawie tabelki częściowej ciągu i określimy wyraz największy i najmniejszy ciągu.

n	6	7	8	9
a_n	(-2)	(-4)	(-6)	(-8)

$$a_6 = (-2) = (-2) \cdot 6 + 10$$

$$a_7 = (-4) = (-2) \cdot 7 + 10$$

$$a_8 = (-6) = (-2) \cdot 8 + 10$$

$$a_9 = (-8) = (-2) \cdot 9 + 10$$

Zapisujemy przykład wzoru ogólnego ciągu:

$$a_n = -2n + 10$$

Na podstawie znalezionej wzoru stwierdzamy, że jest to ciąg malejący. Zatem największy wyraz ciągu to:

$$a_1 = (-2) \cdot 1 + 10 = 8$$

Ciąg nie ma najmniejszego wyrazu.

Jeśli ciąg nie jest **monotoniczny**, to szukanie najmniejszego lub największego wyrazu ciągu jest nieco trudniejsze.

Definicja: ciąg monotoniczny

Ciągi rosnące, malejące, stałe, nierosnące, niemalejące to ciągi monotoniczne.

Przykład 4

Znajdziemy najmniejszy wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem

$$a_n = n^2 - 10n + 16.$$

Wykres składa się z izolowanych punktów zawartych w paraboli $y = x^2 - 10x + 16$. Najmniejsza wartość funkcji, której wykresem jest ta parabola, to druga współrzędna wierzchołka paraboli.

Obliczamy najpierw pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli.

$$x_w = \frac{10}{2} = 5$$

Otrzymana liczba to liczba naturalna. Zatem wartość najmniejszego wyrazu ciągu jest równa drugiej współrzędnej wierzchołka paraboli.

Obliczamy tę współrzędną.

$$y_w = 5^2 - 10 \cdot 5 + 16 = (-9)$$

Zatem najmniejszy wyraz ciągu to $a_5 = (-9)$.

Przykład 5

Ciąg (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = -a_n, \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Wykażemy, że różnica między największym a najmniejszym wyrazem ciągu jest równa 2.

Na podstawie wzoru rekurencyjnego określamy wzór ogólny ciągu.

Wypisujemy najpierw kilka początkowych wyrazów ciągu.

$$a_1 = (-1)$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = (-1)$$

$$a_4 = 1$$

$$a_5 = (-1)$$

Zatem wzór ogólny ciągu to

$$a_n = (-1)^n$$

Jest to ciąg, którego wyrazy nieparzyste mają wartość (-1) , a parzyste mają wartość 1.

Czyli różnica między największym a najmniejszym wyrazem ciągu jest równa

$$1 - (-1) = 2.$$

Znając wzór ciągu, można nie tylko określić jego wyrazy największy i najmniejszy, ale również wyrazy ciągu spełniające określone warunki.

Przykład 6

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określona jest wzorem $S_n = n^3 - n^2 + 4$.

Określmy, ile wyrazów tego ciągu jest równych 0 i podamy największy wyraz ciągu w przedziale $\langle 2, 6 \rangle$.

Znajdziemy najpierw wzór na wyraz ogólny a_n ciągu.

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$a_n = n^3 - n^2 + 4 - \left[(n-1)^3 - (n-1)^2 + 4 \right]$$

$$a_n = n^3 - n^2 + 4 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1 - n^2 + 2n - 1 + 4)$$

$$a_n = 3n^2 - 5n + 2$$

Obliczamy, który wyraz ciągu jest równy 0.

$$3n^2 - 5n + 2 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe w zbiorze liczb naturalnych dodatnich.

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$n_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} \notin \mathbb{N}_+$$

$$n_2 = \frac{5+1}{6} = 1$$

Okazuje się, że pierwszy wyraz ciągu jest równy 0.

$$a_1 = 0$$

W przedziale $\langle 2, 6 \rangle$ ciąg jest rosnący. Zatem największy wyraz ciągu to:

$$a_6 = 3 \cdot 6^2 - 5 \cdot 6 + 2 = 108 - 30 + 2 = 80$$

Odpowiedź: Pierwszy wyraz ciągu jest równy 0. Największy wyraz w przedziale $\langle 2, 6 \rangle$ to $a_6 = 80$.

Słownik

ciąg monotoniczny

ciągi rosnące, malejące, stałe, nierosnące, niemalejące to ciągi monotoniczne

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją pokazującą sposoby wyznaczania najmniejszego oraz największego wyrazu ciągu. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać proponowane tam zadania, a następnie porównaj z rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D188Gvqnp>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący znajdowania największego wyrazu ciągu malejącego.

Polecenie 2

Znajdź największy oraz najmniejszy wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym

$$a_n = \frac{n(n+7)+12}{(2n+6)(n+4)}$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ile wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = 17 - n\sqrt{7}$ jest dodatnich?

☐ 7

☐ 5

☐ 6

☐ 4

Ćwiczenie 2



Największy wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = -n^2 + 10n - 16$ to

☐ a_6

☐ a_5

☐ a_1

☐ a_3

Ćwiczenie 3



Ciąg (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1, \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

Zaznacz które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Największy wyraz tego ciągu mniejszy od 100 to wyraz a_{14}	☐	☐
Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną	☐	☐
Wyraz tego ciągu równy 465 to a_{30}	☐	☐
Najmniejszy wyraz ciągu jest równy 1	☐	☐

Ćwiczenie 4



Dopasuj wyrazy (lub wyraz) ciągu (a_n) , które są równe 0 do odpowiedniego wzoru ciągu.

$$a_n = n^2 - 4(3n - 8)$$

 a_7 a_1 a_8 a_9 a_3 a_4

$$a_n = \frac{n^2+n}{12} - 1$$

$$a_n = 8n - n^2 - 7$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2-81}}{9}$$

Ćwiczenie 5



Przeciągnij wzór ciągu do odpowiedniego pola.

Ciąg, który ma wyraz najmniejszy

$$b_n = n - 2n^2$$

$$g_n = -\frac{4}{n^2}$$

$$a_n = -\frac{4}{1+2n^2}$$

$$d_n = \frac{1}{n+4}$$

$$z_n = \frac{6-n}{10}$$

$$a_n = \frac{4}{1+2n^2}$$

Ciąg, który ma wyraz największy

$$w_n = \sqrt{2n-1}$$

Ćwiczenie 6



Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{2}{n} - 2^n$. Wykaż, że ciąg ten nie ma wyrazu najmniejszego. Poukładaj rozwiązanie zadania w odpowiedniej kolejności.

Wypisujemy kilka kolejnych początkowych wyrazów ciągu



Zatem ciąg (a_n) jest malejący, czyli nie ma wyrazu najmniejszego



Przypuszczamy, że ciąg jest malejący. Aby to wykazać, zbadamy różnicę między kolejnymi wyrazami ciągu.



$$a_3 = \left(-7\frac{1}{3}\right)$$



$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n-2n-2}{n(n+1)} - 2^{n+1} + 2^n$$



$$a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{n(n+1)} - (2^{n+1} - 2^n)$$



$$a_1 = 0$$



$$a_{n+1} - a_n = -\left(\frac{2}{n(n+1)} + 2^n\right)$$



$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{n+1} - 2^{n+1} - \left(\frac{2}{n} - 2^n\right)$$



$$a_2 = (-3)$$



$$a_4 = \left(-15\frac{1}{2}\right)$$



Dla każdej liczby naturalnej dodatniej $a_{n+1} - a_n < 0$



Ćwiczenie 7



Oznaczamy przez K_n liczbę wszystkich krawędzi graniastosłupa n - kątnego. Zapisz wzór ogólny ciągu. Określ największy oraz najmniejszy wyraz ciągu należący do przedziału $\langle 200, 500 \rangle$.

Ćwiczenie 8



Ciąg (b_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = \frac{35-n}{n+1}$. Znajdź wszystkie wyrazy tego ciągu będące liczbami pierwszymi.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Najmniejsza/największa wartość ciągu

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym

2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach

$$\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_n = a_n + \frac{1}{2} \cdot a_n(1 - a_n) \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa najmniejszy/największy wyraz danego ciągu liczbowego (jeżeli istnieje),
- oblicza wyrazy ciągu spełniające dany warunek,
- wykorzystuje własności ciągów określonych wzorem ogólnym i rekurencyjnym,
- interpretuje informacje przedstawione w formie wykresu,
- dostrzega regularności i podobieństwa oraz analogie, formułuje wnioski na ich podstawie i uzasadnia ich poprawność.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- 2 – 1,
- wykres Ishikawy,
- analiza morfologiczna.

Formy zajęć:

- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer.

Przebieg lekcji**Faza wprowadzająca:**

1. Uczniowie metodą 2 – 1 (dwóch zadaje pytania, jeden odpowiada) powtarzają wiadomości na temat sposobów wyznaczania wyrazów ciągu.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z materiałami z sekcji Przeczytaj oraz z animacją. Następnie analizują zależności przyczynowo – skutkowe w zadaniach pokazujących sposoby wyznaczania wyrazów ciągu o danych własnościach i sporządzają wykres Ishikawy pokazujący te zależności.
2. Grupy prezentują swoje wykresy i wspólnie ustalają algorytm rozwiązywania zadań na poszukiwanie największych/najmniejszych wyrazów ciągu.
3. Ostatnim elementem tej części lekcji jest wspólne rozwiązywanie ćwiczeń interaktywnych 1 – 4 i analiza morfologiczna problemów związanych z wyznaczaniem wyrazów ciągu o danych własnościach.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie w domu ćwiczeń 5 – 8.

Materiały pomocnicze:

Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:

Animacja może być wykorzystana w czasie zajęć omawiających monotoniczność ciągów liczbowych.