



Analiza nierówności z parametrem

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Analiza nierówności z parametrem

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Nierówność liniowa z jedną niewiadomą jest to nierówność, którą możemy zapisać na przykład w postaci $ax + b > 0$ lub $ax + b \geq 0$. Współczynniki a i b są danymi liczbami rzeczywistymi, a x jest niewiadomą.

W tym materiale zajmiemy się analizą nierówności liniowej z parametrem. Analiza ta będzie polegała na rozwiązaniu nierówności z niewiadomą x np.: $a(x - 7) < a + 2$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Liczbę a nazywamy parametrem nierówności.

Twoim zadaniem będzie zbadanie liczby rozwiązań nierówności w zależności od parametru a , czyli na podaniu takich wartości liczby a , dla których rozwiązaniem nierówności jest przedział liczbowy lub dla których nierówność jest sprzeczna, lub gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Twoje cele

- Znajdziesz wszystkie takie wartości rzeczywiste danego parametru, dla których dany przedział jest zbiorem rozwiązań danej nierówności liniowej.
- Znajdziesz takie wartości rzeczywiste parametru, dla których dana nierówność jest sprzeczna lub tożsamościowa.
- Zbadasz liczbę rozwiązań nierówności liniowej w zależności od parametru występującego w nierówności.

Przeczytaj

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność liniową $3m - 2x - 4 > 0$.

Przekształcimy równoważnie nierówność, przenosząc odpowiednio wyrażenie $3m$ oraz liczbę na drugą stronę nierówności.

$$-2x > 4 - 3m$$

Podzielimy obie strony nierówności przez (-2) , pamiętając o zmianie znaku nierówności na przeciwny.

$$-2x > 4 - 3m \mid : (-2)$$

$$x < \frac{4-3m}{-2}$$

$$x < \frac{3m-4}{2}$$

Zatem dla każdej wartości parametru m rozwiązaniem nierówności jest przedział $(-\infty, \frac{3m-4}{2})$.

Przykład 2

Przeprowadzimy analizę **nierówności liniowej z jedną niewiadomą** $ax - a^2 \leq -2(x + 2)$. Niewiadomą jest liczba x , natomiast parametrem jest a .

Najpierw przekształcimy równoważnie nierówność, w celu wyznaczenia niewiadomej x .

$$ax - a^2 \leq -2x - 4$$

$$ax + 2x \leq a^2 - 4$$

$$x(a + 2) \leq a^2 - 4$$

1. Jeżeli $a + 2 > 0$, czyli $a > -2$, to możemy podzielić obie strony nierówności przez $a + 2$.

Nie zmienimy znaku nierówności na przeciwny, ponieważ założyliśmy, że $a + 2 > 0$.

$$x(a + 2) \leq a^2 - 4 \mid : (a + 2)$$

$$x \leq \frac{a^2-4}{a+2}$$

$$x \leq \frac{(a-2)(a+2)}{a+2}$$

$$x \leq a - 2$$

Dla $a > -2$ rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty, a - 2)$.

2. Jeżeli $a + 2 < 0$, czyli $a < -2$, to możemy podzielić obie strony nierówności przez $a + 2$.

Pamiętamy jednak, że zmieniamy znak nierówności na przeciwny, ponieważ założyliśmy, że $a + 2 < 0$.

$$x(a + 2) \leq a^2 - 4 \quad | : (a + 2)$$

$$x \geq \frac{a^2 - 4}{a + 2}$$

$$x \geq \frac{(a - 2)(a + 2)}{a + 2}$$

$$x \geq a - 2$$

Dla $a < -2$ rozwiązanie nierówności: $x \in (a - 2, \infty)$.

3. Jeżeli $a + 2 = 0$, czyli $a = -2$, wtedy liczbę (-2) podstawimy do nierówności

$$x(a + 2) \leq a^2 - 4$$

$$x(-2 + 2) \leq (-2)^2 - 4$$

$$x \cdot 0 \leq 4 - 4$$

$$x \cdot 0 \leq 0$$

$$0 \leq 0.$$

Otrzymaliśmy nierówność prawdziwą, zatem dla $a = -2$ rozwiązaniem nierówności jest każda liczba rzeczywista.

Przykład 3

Dla jakich wartości parametru p nierówność $2x - 6 > px - 2p$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą?

$$2x - 6 > px - 2p$$

$$2x - px > 6 - 2p$$

$$x(2 - p) > 6 - 2p$$

Zastanówmy się teraz dla jakiego parametru p otrzymamy nierówność tożsamościową.

Aby nierówność była spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą, współczynnik przy niewiadomej musi być równy 0.

Będzie to zachodziło dla $2 - p = 0$, czyli dla $p = 2$.

Ale dla $p = 2$ otrzymamy warunek $0 \cdot x > 6 - 2 \cdot 2$.

$$0 > 2$$

Zatem otrzymaliśmy nierówność sprzeczną.

Nie istnieje taka wartość parametru p , dla której nierówność będzie spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

Słownik

nierówność liniowa z jedną niewiadomą

nierówność, którą możemy zapisać w postaci $ax + b > 0$ lub $ax + b \geq 0$, gdzie a i b są danymi liczbami rzeczywistymi

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką i przeanalizuj, jak badamy liczbę rozwiązań nierówności liniowej z jedną niewiadomą w zależności od parametrów a i b .

Polecenie 2

Dla jakich wartości parametru a i b nierówność $(a + 1)x + 3b \leq 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań?

Polecenie 3

Dla jakiej wartości parametru b rozwiązanie nierówności $2x - b > 0$ można zapisać w postaci $x \in (0, \infty)$?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dana jest nierówność $kx > 3k - 6$ z parametrem k .
Przenieś w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Dla $k =$ nierówność jest tożsamościowa.

Jeśli $k =$ to $x > 0$.

Ćwiczenie 2



Nierówność $a^2x + 1 > a + x$ z niewiadomą x i parametrem a jest tożsamościowa dla:

☐ $a = -1$ ☐ $a = 2$ ☐ $a = -2$ ☐ $a = 1$

Ćwiczenie 3



Dla jakiej wartości parametru p nierówność $(p^2 - 16)x \geq p + 4$ z niewiadomą x ma nieskończenie wiele rozwiązań?

☐ $p = -4$

☐ Nie istnieje takie p .

☐ $p = 16$

☐ $p = 4$

Ćwiczenie 4



Dana jest nierówność $mx < 3m - 1$ z parametrem m . Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Dla $m = \frac{1}{3}$ nierówność jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.

☐ Dla $m = 1$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(-\infty, 2)$.

☐ Dla $m = -1$ zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $(4, \infty)$.

☐ Dla $m = 0$ nierówność jest sprzeczna.

Ćwiczenie 5



Uzupełnij brakujące miejsca w tekście.

Dana jest nierówność $kx - 4k > 0$ z niewiadomą x i parametrem k .

Dla $k = 0$	
Dla $k > 0$	
Dla $k < 0$	

rozwiązanie nierówności: $x < 4$

nierówność jest sprzeczna

rozwiązanie nierówności: $x > 4$

Ćwiczenie 6



Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

Zbiorem rozwiązań nierówności $ax - 8 \geq 0$ z niewiadomą x jest $(-\infty, -4]$.

Wówczas liczba $a =$.

Ćwiczenie 7



Przeciągnij do obszaru "Nierówności właściwe" te nierówności, które dla $m = -3$ nie mają rozwiązań, a do obszaru "Pozostałe nierówności" przeciągnij pozostałe nierówności.

Nierówności właściwe

$$(m^2 - 9)x < m + 1$$

$$(m + 3)x > -5$$

$$m^2x + 2x < m + 4$$

Pozostałe nierówności

$$(m^2 - 9)x > m + 3$$

$$2mx - 3x < m + 3$$

$$mx \geq -x + 7 - 2x$$

$$(m + 3)x \leq m - 1$$



Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Analiza nierówności z parametrem

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- znajduje wszystkie takie wartości rzeczywiste parametru, aby dany przedział był rozwiązaniem nierówności liniowej
- znajduje takie wartości rzeczywiste parametru, aby nierówność była sprzeczna lub tożsamościowa
- bada liczbę rozwiązań nierówności liniowej w zależności od wartości parametru występującego w nierówności
- bada liczbę rozwiązań nierówności w zależności od znaku parametru występującego w nierówności

- przeprowadza rozumowania związane z analizą nierówności liniowej z jednym parametrem, formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane ze sposobami rozwiązywania nierówności liniowych z parametrem.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel wyświetla infografikę i czyta treść polecenia 1.
3. Uczniowie w parach analizują przykład pokazujący analizę nierówności z parametrem.
4. Po omówieniu przykładów w parach nauczyciel sprawdza zrozumienie sposobów rozwiązywania przykładów.
5. Nauczyciel prosi uczniów, aby w parach rozwiązali polecenia 2 i 3.
6. Uczniowie wspólnie z nauczycielem konsultują poprawność wykonania poleceń umieszczonych pod animacją.
Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące wykonanych ćwiczeń.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem ucznia jest wykonanie ćwiczenia 7, 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:**Nierówności stopnia pierwszego****Wskazówki metodyczne:**

Przykłady zawarte w animacji uczniowie mogą przeanalizować w parach.