Monotoniczność ciągu arytmetycznego

Monotoniczność ciągu arytmetycznego

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Monotoniczny, to inaczej jednostajny, nudny, niezmienny. W odniesieniu do ciągu arytmetycznego oznacza to, że ciąg arytmetyczny jest rosnący, malejący lub stały. I co ciekawego – każdy ciąg arytmetyczny jest monotoniczny.

Albert Einstein uważał, że *monotonia cichego życia pobudza umysł do twórczości.*

Natomiast **Coco Chanel** miała inne zdanie: *w życiu nie ma czasu na monotonię. Jest czas na pracę i czas na miłość. To wszystko nie pozostawia nam czasu na nic więcej.*

A Ty o tym co sądzisz?

W tym materiale nie będziemy prowadzić rozważań filozoficznych, ale zajmiemy się badaniem monotoniczności ciągów arytmetycznych i wykorzystaniem własności takich ciągów.

Twoje cele

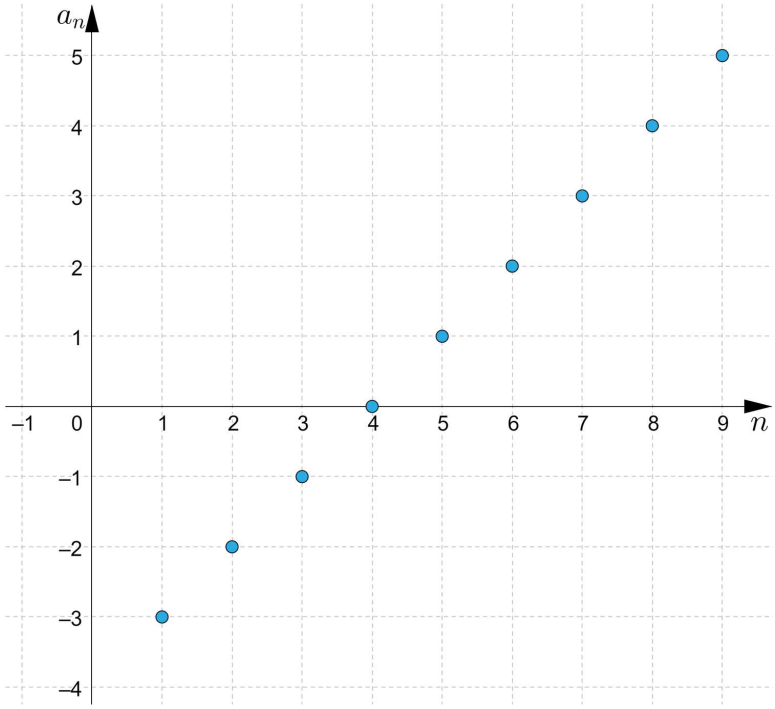
- Rozpoznasz ciągi arytmetyczne rosnące, malejące i stałe, określone różnymi sposobami.
- Podasz przykłady ciągów arytmetycznych monotonicznych.
- Udowodnisz, że dany ciąg arytmetyczny jest rosnący/malejący.

- Wykorzystasz w zadaniach własności ciągów arytmetycznych monotonicznych.

Przeczytaj

Ciąg arytmetyczny jest pewną funkcją, której dziedziną jest podzbiór zbioru liczb naturalnych lub zbiór liczb naturalnych. Zatem definicje określające monotoniczność ciągu arytmetycznego i sposoby określania tej monotoniczności, są analogiczne jak dla funkcji liczbowych.

Ciąg arytmetyczny rosnący



Na wykresie zaznaczonych jest kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n), określonego wzorem ogólnym

$$a_n = n - 4,$$

gdzie $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest większy od poprzedniego. O takim ciągu mówimy, że jest **rosnący**.

Poniżej przykłady jeszcze kilku ciągów arytmetycznych rosnących.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

$$10, 15, 20, 25, 30, \ldots$$

$$-8, -4, 0, 4, 8, \ldots$$

$$-126, -124, -122, -120, -118, \ldots$$

Zauważmy, że w ciągu arytmetycznym rosnącym różnica ciągu jest dodatnia.

Twierdzenie: Ciąg arytmetyczny rosnący

Niech n będzie liczbą naturalną dodatnią.

Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest ciągiem rosnącym, gdy $r > 0$.

Przykład 1

Wykażemy, że ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem $a_n = 2n + 7$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, jest rosnący.

Aby wykazać, że ciąg jest rosnący, należy zbadać różnicę $a_{n+1} - a_n$ (dla dowolnego $n \geq 1$).

$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) + 7 - (2n+7)$

Przekształcamy otrzymane wyrażenie.

$a_{n+1} - a_n = 2n + 2 + 7 - 2n - 7$

$a_{n+1} - a_n = 2 > 0$

Pokazaliśmy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ spełniony jest warunek $a_{n+1} > a_n$, co oznacza, że ciąg (a_n) jest rosnący.

Przykład 2

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym takim, że $a_1 = 6$, $a_2 = t^2 - 6$, $a_3 = t + 10$. Znajdziemy wszystkie liczby t, dla których ciąg ten jest ciągiem rosnącym.

Z definicji ciągu arytmetycznego wynika, że różnica między kolejnymi wyrazami ciągu jest stała.

Zatem

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$t^2 - 6 - 6 = t + 10 - t^2 + 6$

$2t^2 - t - 28 = 0$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

$\Delta = 1 + 224 = 225$

$t_1 = \frac{1-15}{4} = \frac{-14}{4}$

$t_2 = \frac{1+15}{4} = \frac{16}{4} = 4$

Wyznaczymy różnicę ciągu dla każdej znalezionej wartości t.

Dla $t_1 = -\frac{14}{4}$ otrzymujemy:

$a_1 = 6$

$a_2 = \left(-\frac{14}{4}\right)^2 - 6 = \frac{100}{16}$

$r = \frac{100}{16} - 6 = \frac{1}{4}$

$r > 0$ – ciąg rosnący

Dla $t_2 = 4$ otrzymujemy:

$a_1 = 6$

$a_2 = 4^2 - 6 = 10$

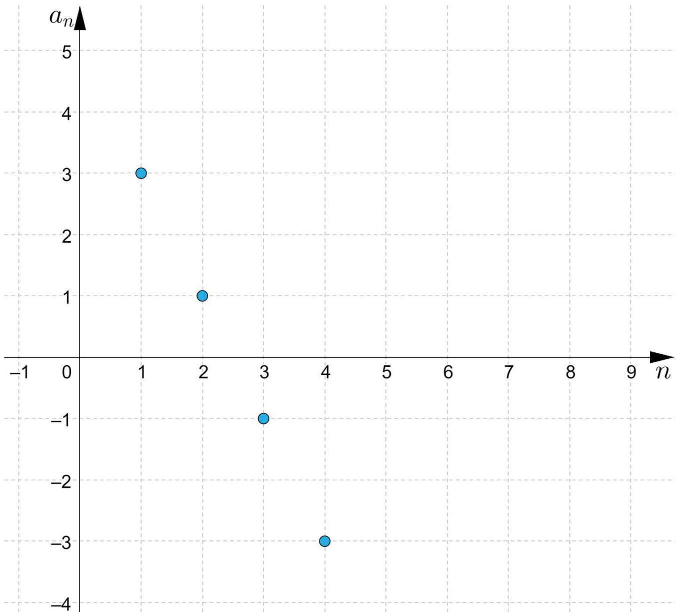
$r = 10 - 6 = 4$

$r > 0$ – ciąg rosnący

Odpowiedź:

Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym dla $t \in \left\{-\frac{14}{4}, 4\right\}$.

Ciąg arytmetyczny malejący



Na wykresie zaznaczonych jest kilka wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), określonego wzorem ogólnym

$$a_n = -2n + 5,$$

gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu (oprócz wyrazu pierwszego) jest mniejszy od poprzedniego. O takim ciągu mówimy, że jest **malejący**.

Poniżej przykłady jeszcze kilku ciągów arytmetycznych malejących.

$$18, 10, 2, -6, -14, \ldots$$

$$100, 96, 92, 88, 84, 80, \ldots$$

$$-20, -22, -24, -26, -28, \ldots$$

Zauważmy, że w ciągu arytmetycznym malejącym różnica ciągu jest ujemna.

Twierdzenie: Ciąg arytmetyczny malejący

Niech n będzie liczbą naturalną dodatnią.

Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest ciągiem malejącym, gdy $r < 0$.

Przykład 3

Określimy, dla jakich wartości parametru k ($k \neq 0$ i $k \in R$) ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = -(kn + 3) + 4(6 + k)n$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ jest malejący.

Musimy znaleźć różnicę ciągu. W tym celu wyznaczamy dwa kolejne wyrazy ciągu.

$a_1 = -k - 3 + 24 + 4k = 3k + 21$

$a_2 = -2k - 3 + 48 + 8k = 6k + 45$

Wyznaczamy różnicę ciągu.

$r = a_2 - a_1$

$r = 6k + 45 - 3k - 21 = 3k + 24$

Aby ciąg był malejący, różnica ciągu musi być ujemna.

$3k + 24 < 0$

$k < -8$

Odpowiedź:

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest malejący, gdy $k < -8$.

Przykład 4

W ciągu arytmetycznym malejącym (a_n) stosunek wyrazu szóstego do trzeciego jest równy 7, a suma kwadratów wyrazów drugiego i czwartego jest równa 40. Wyznaczymy wzór ogólny ciągu.

Oznaczmy:
a – pierwszy wyraz ciągu,
r – różnica ciągu.

Stąd:

$a_6 = a + 5r$

$a_3 = a + 2r$

$a_2 = a + r$

$a_4 = a + 3r$

Zapisujemy równania wynikające z treści zadania.

$\frac{a_6}{a_3} = 7 \Rightarrow \frac{a+5r}{a+2r} = 7$

${a_2}^2 + {a_4}^2 = 40 \Rightarrow (a + r)^2 + (a + 3r)^2 = 40$

Przekształcamy oba równania, sprowadzając je do najprostszej postaci.

$$\begin{cases} a + 5r = 7a + 14r \\ 2a^2 + 8ar + 10r^2 = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{3r}{2} \\ 2a^2 + 8ar + 10r^2 - 40 = 0 \end{cases}$$

Do drugiego równania podstawiamy wyznaczoną zmienną a.

$$\begin{cases} a = -\frac{3r}{2} \\ 2 \cdot \frac{9}{4}r^2 + 8 \cdot \left(-\frac{3r}{2}\right)r + 10r^2 - 40 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie z uzyskanych równań.

$\frac{9}{2}r^2 - 12r^2 + 10r^2 - 40 = 0$

$5r^2 - 80 = 0$

$r = 4$ lub $r = -4$

Ciąg ma być malejący, zatem $r = -4$.

Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu.

$a = -\frac{3}{2} \cdot (-4) = 6$

Zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$a_n = 6 + (n-1) \cdot (-4)$

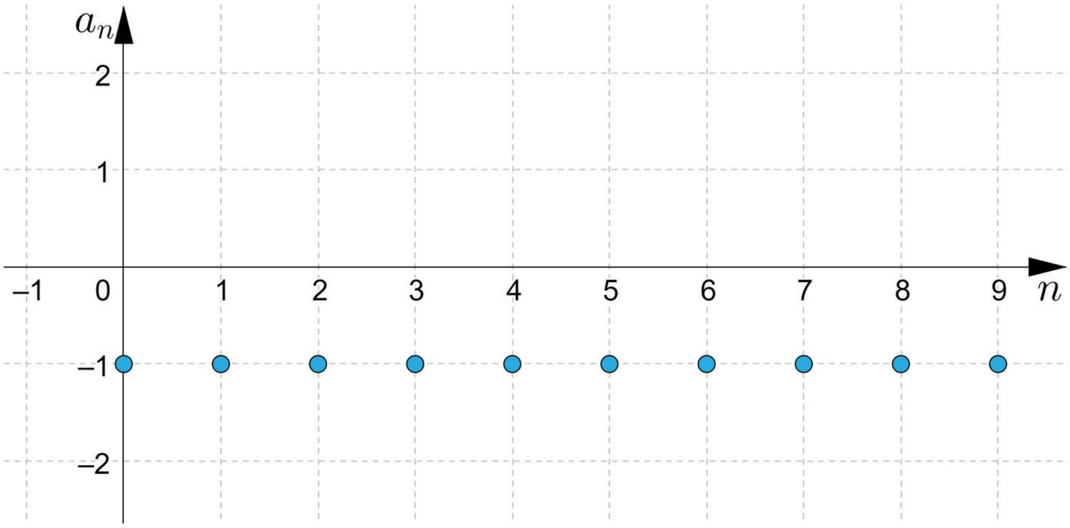
$a_n = -4n + 10$

Odpowiedź:

Wzór ogólny ciągu:

$a_n = -4n + 10.$

Ciąg arytmetyczny stały



Na wykresie zaznaczonych jest kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n), określonego wzorem ogólnym

$$a_n = -1$$

gdzie $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Zauważmy, że każdy wyraz ciągu ma tę samą wartość. O takim ciągu mówimy, że jest **stały**.

Poniżej przykłady jeszcze kilku ciągów arytmetycznych stałych.

$$3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots$$

$$-7, -7, -7, -7, -7, \ldots$$

$$100, 100, 100, 100, 100, 100, \ldots$$

Zauważmy, że w ciągu arytmetycznym stałym różnica jest równa 0.

Twierdzenie: Ciąg arytmetyczny stały

Niech n będzie liczbą naturalną dodatnią.

Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest ciągiem stałym, gdy $r = 0$.
Przykład 5

Znajdziemy taką liczbę x, dla której ciąg x^2, $2x + 3$, $12 - x$ jest trzywyrazowym ciągiem arytmetycznym stałym.

W ciągu stałym wszystkie wyrazy są równe, zatem:

$2x + 3 = 12 - x$

$3x = 9$

$x = 3$

Ciąg ma postać: $(9, 9, 9)$.

Odpowiedź:

Szukana liczba to 3.

Słownik

monotoniczność ciągu arytmetycznego

niech n będzie liczbą naturalną dodatnią; ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy r jest ciągiem:

- rosnącym, gdy $r > 0$,
- malejącym, gdy $r < 0$,
- stałym, gdy $r = 0$

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady podane w animacji i wykonaj Polecenie 2.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DwCudD5hb

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej monotoniczności ciągu arytmetycznego.

Polecenie 2

Zbadaj, czy ciąg arytmetyczny określony wzorem $a_n = 2n - 11$ jest rosnący, malejący czy stały.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ciąg (x, y, z) jest ciągiem arytmetycznym rosnącym. Suma wyrazów ciągu jest równa 6, a ich iloczyn jest równy (-24). Znajdź liczby x, y, z.

Ćwiczenie 8

Wykaż, że ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = \frac{(n-2)^2}{8} - \frac{(6-n)^2}{8}$ jest rosnący.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Monotoniczność ciągu arytmetycznego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, klasa II lub III, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;

4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje ciągi arytmetyczne rosnące, malejące i stałe, określone różnymi sposobami
- podaje przykłady ciągów arytmetycznych monotonicznych
- udowadnia, że dany ciąg arytmetyczny jest rosnący/malejący
- wykorzystuje w zadaniach własności ciągów arytmetycznych monotonicznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- karawana
- gwiazda porządkująca
- los szczęścia

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą karawany (czyli kolejno jeden za drugim w rzędach, w jakich siedzą w ławkach) przypominają uzyskane już informacje na temat ciągu arytmetycznego. Przy czym nie wolno powielać informacji. Procedura trwa, aż „karawana” dojedzie do celu (czyli do momentu aż wiadomości uczniów wyczerpią się).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach. Zapoznają się z materiałem w sekcji „Przeczytaj” i materiałem zawartym w animacji.
   Na podstawie uzyskanych informacji, tworzą „gwiazdę porządkującą”, na krótszych ramionach której zapisują kolejne kroki algorytmu badania monotoniczności ciągu arytmetycznego. Na dłuższych ramionach zapisują inne, przydatne pozyskane informacje.
2. Grupy prezentują swoje gwiazdy, wspólnie wybierają najlepszą z nich i ewentualnie dopisują swoje pomysły na jej ramionach.
3. Jeden z uczniów losuje 4 kartki z imionami uczniów, którzy na forum klasy rozwiązują wybrane przez siebie ćwiczenia interaktywne. I dokonują samooceny własnej pracy.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Nauczyciel prosi, aby uczniowie w domu wykonali ćwiczenia, których nie rozwiązali na lekcji.

Materiały pomocnicze:

Ciąg arytmetyczny

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać wprowadzając pojęcie monotoniczności ciągu arytmetycznego.