Pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wśród różnych wielościanów wyróżniamy ostrosłupy. Ostrosłup to taki wielościan, którego podstawą jest dowolny wielokąt, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku. W zbiorze ostrosłupów możemy wyróżnić ostrosłupy prawidłowe trójkątne.

W tym materiale skupimy się na obliczaniu pola powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.

> **Twoje cele**
>
> - Obliczysz pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.
> - Zastosujesz związki trygonometryczne i znane twierdzenia do obliczania pola powierzchni ostrosłupa.

Przeczytaj

Jeżeli podstawą ostrosłupa jest wielokąt foremny np. trójkąt równoboczny a spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na jego podstawie, to mówimy, że taki **ostrosłup jest prawidłowy**.

Ostrosłup prawidłowy trójkątny, to taki ostrosłup prosty, którego podstawą jest trójkąt foremny, czyli trójkąt równoboczny. **Spodek wysokości** pokrywa się z środkiem ciężkości tego trójkąta, czyli z punktem przecięcia się środkowych, które są zarazem wysokościami i dwusiecznymi kątów w podstawie. Ściany boczne ostrosłupa są przystającymi trójkątami równoramiennymi o wspólnym wierzchołku zwanym wierzchołkiem ostrosłupa.

Pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego to suma pola podstawy i pola powierzchni bocznej

$$P = P_p + P_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} \cdot a \cdot h,$$

gdzie:
P_p - pole podstawy,
P_b - pole powierzchni bocznej, czyli suma wszystkich pól ścian bocznych ostrosłupa,
h - wysokość ściany bocznej ostrosłupa.

Dla **czworościanu foremnego** o krawędzi a pole powierzchni

$$P = a^2\sqrt{3}.$$

Masz do dyspozycji dynamiczną wizualizację ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym możesz zmieniać położenie bryły w przestrzeni. Możesz obrócić ostrosłup przez przeciągnięcie myszką.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dh5FEPwnP

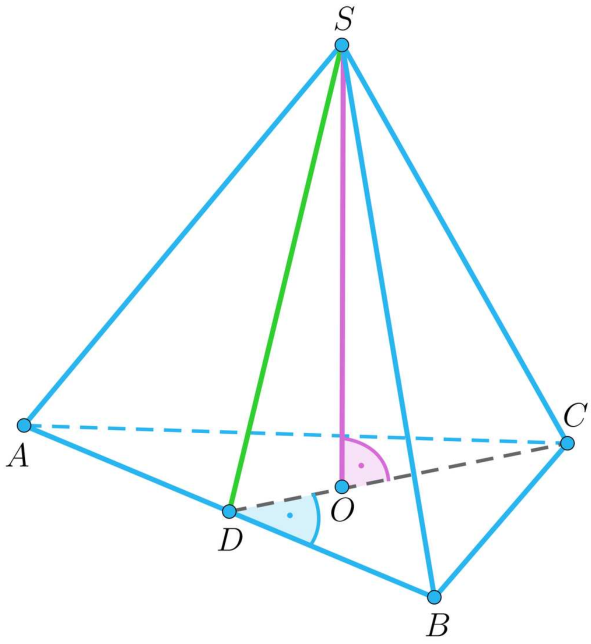
Zmieniając wartości n możesz zaznaczyć odpowiednio:
1 - trójkąt prostokątny wyznaczony przez krawędź podstawy i wysokość podstawy
2 - trójkąt prostokątny wyznaczony przez krawędź boczną ostrosłupa i wysokość ściany bocznej
3 - trójkąt prostokątny wyznaczony przez krawędź boczną i wysokość ostrosłupa
4 - trójkąt prostokątny wyznaczony przez wysokość ściany bocznej i wysokość ostrosłupa

Trójkąty prostokątne, które widzimy w ostrosłupie ułatwią określenie związków między odcinkami w ostrosłupie, a w konsekwencji rozwiazywanie zadań dotyczących obliczania pola powierzchni oraz objętości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.

Przykład 1

Obliczymy pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość ma długość 10 cm, a krawędź boczna 12 cm.

Rozwiązanie



Przyjmujemy, że $|AB| = a$ oraz $|OS| = 10$, wówczas: $|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie, zatem: $|OC| = \frac{2}{3} \cdot |DC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Rozpatrujemy trójkąt prostokątny COS, na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$|OC|^2 + |OS|^2 = |CS|^2$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 10^2 = 12^2$$

$$\frac{a^2}{3} = 144 - 100$$

$$a^2 = 44 \cdot 3 = 132$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa:

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{132\sqrt{3}}{4} = 33\sqrt{3}\ [\mathrm{cm}^2]$$

Mamy już pole podstawy, obliczymy pole powierzchni bocznej, która jest sumą pól ścian ostrosłupa.

$$|DO| = \frac{1}{3}|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Rozpatrujemy trójkąt prostokątny DOS, na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$|DS|^2 = |DO|^2 + |OS|^2$$

$$|DS|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 10^2$$

$$|DS|^2 = \frac{a^2}{12} + 100$$

$$|DS|^2 = \frac{132}{12} + 100$$

$$|DS|^2 = 11 + 100$$

$$|DS|^2 = 111$$

$$|DS| = \sqrt{111}\,[\mathrm{cm}]$$

$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$, gdzie h jest wysokością ściany bocznej: $h = |DS| = \sqrt{111}$ cm.

$$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{132} \cdot \sqrt{111} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{12 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 37} = \frac{3}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{407} = 9\sqrt{407}\ \left[\mathrm{cm}^2\right]$$

Zatem pole powierzchni ostrosłupa:

$$P = P_p + P_b = 33\sqrt{3} + 9\sqrt{407}\ \left[\mathrm{cm}^2\right]$$

Przykład 2

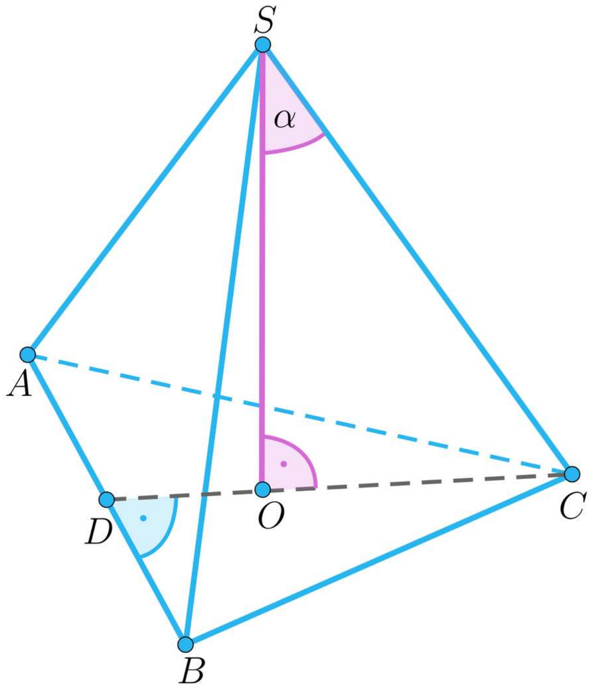
Obliczymy pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość o długości 16 cm tworzy:

a) z krawędzią boczną kąt α taki, że $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$,

b) z wysokością ściany bocznej kąt β taki, że $\cos \beta = 0,8$.

Rozwiązanie

a) Wykonujemy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami, zaznaczamy kąt α między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną.



Przyjmujemy, że $|AB| = a$ oraz $|OS| = 16$, wówczas: $|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie, zatem: $|OC| = \frac{2}{3}|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

W trójkącie CSO mamy: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|OC|}{|OS|}$, więc $\frac{1}{2} = \frac{|OC|}{|OS|}$, stąd $|OS| = 2|OC|$, zatem $16 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$48 = 2a\sqrt{3}$

$48\sqrt{3} = 6a$

$a = 8\sqrt{3}\ [\mathrm{cm}]$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa $P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(8\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 48\sqrt{3}\ [\mathrm{cm}^2]$.

Mamy już pole podstawy, obliczymy pole powierzchni bocznej, która jest sumą pól ścian ostrosłupa.

$|DO| = \frac{1}{3}|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Rozpatrujemy trójkąt prostokątny DOS, na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy:

$|DO|^2 + |OS|^2 = |DS|^2$

$\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 16^2 = |DS|^2$

$\frac{a^2}{12} + 256 = |DS|^2$

$|DS|^2 = 16 + 256$

$|DS|^2 = 272$

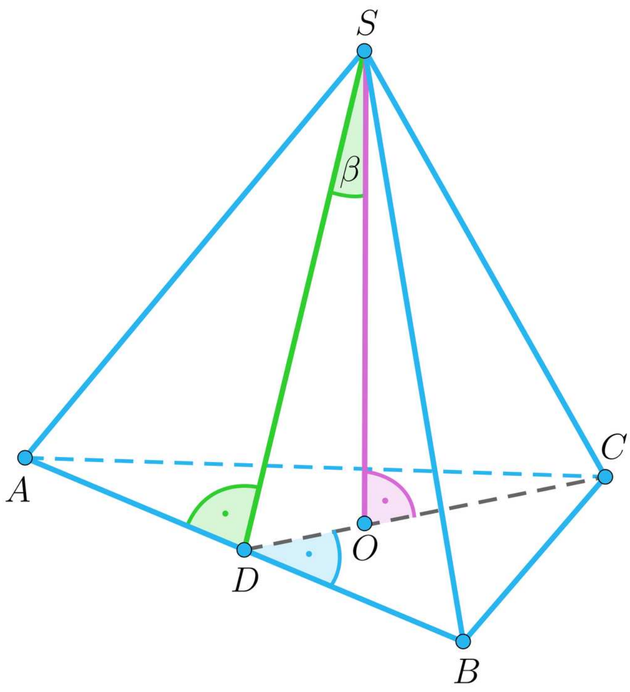
$|DS| = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}\ [\mathrm{cm}]$

$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$, gdzie h jest wysokością ściany bocznej $h = |DS| = 4\sqrt{17}\ [\mathrm{cm}]$.

$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{17} = 48\sqrt{51}\ [\mathrm{cm}^2]$.

Zatem pole powierzchni ostrosłupa:
$P = P_p + P_b = 48\sqrt{3} + 48\sqrt{51} = 48\left(\sqrt{3} + \sqrt{51}\right)\ [\mathrm{cm}^2]$.

b) Wykonujemy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami, zaznaczamy kąt β między wysokością ostrosłupa a wysokością ściany bocznej.



Przyjmujemy, że $|AB| = a$ oraz $|OS| = 16$, wówczas: $|DC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie, zatem: $|DO| = \frac{1}{3} \cdot |DC| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

W trójkącie DOS mamy: $\cos\beta = \frac{|OS|}{|DS|}$, więc $\frac{8}{10} = \frac{|OS|}{|DS|}$, stąd $|DS| = \frac{10}{8} \cdot |OS| = \frac{10}{8} \cdot 16 = 20$ [cm].

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$|DO|^2 + |OS|^2 = |DS|^2$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 16^2 = 20^2$$

$$\frac{3a^2}{36} = 400 - 256$$

$$\frac{a^2}{12} = 144$$

$a^2 = 1728 \ [\text{cm}^2]$

$a = 24\sqrt{3} \ \text{cm}$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa oraz pole powierzchni bocznej.

$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1728 \cdot \sqrt{3}}{4} = 432\sqrt{3} \ [\text{cm}^2]$

$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$, gdzie h jest wysokością ściany bocznej $h = |DS| = 20$

$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 20 = 720\sqrt{3} \ [\text{cm}^2]$.

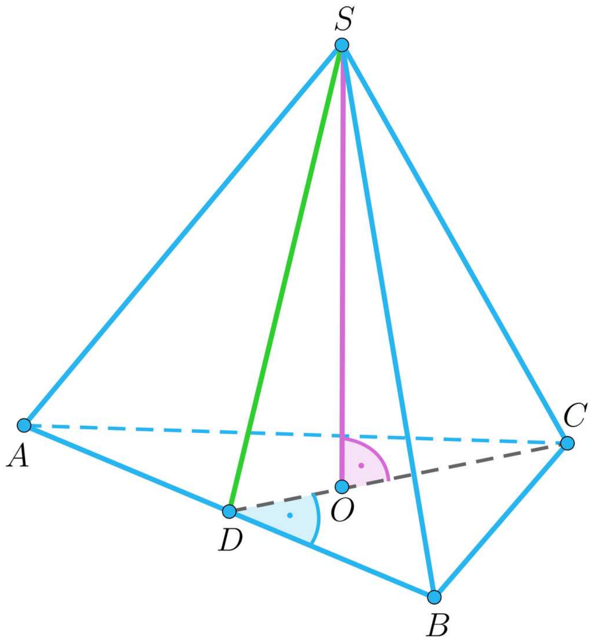
Zatem pole powierzchni ostrosłupa:
$P = P_p + P_b = 432\sqrt{3} + 720\sqrt{3} = 1152\sqrt{3} \ [\text{cm}^2]$.

Przykład 3

Podstawa ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma pole równe $25\sqrt{3}$. Obliczymy wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa, jeśli jego pole powierzchni całkowitej jest siedmiokrotnie większe od pola podstawy.

Rozwiązanie

Wykonujemy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami.



Oznaczamy $|BC| = |AB| = a$

$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$25\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$100 = a^2$

$10 = a$

Wiemy, że $P = P_p + P_b$ oraz $P = 7P_p$, stąd

$7P_p = P_p + P_b$

$6P_p = P_b$

$6 \cdot 25\sqrt{3} = P_b$

$150\sqrt{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

$100\sqrt{3} = a \cdot h$

$100\sqrt{3} = 10h$

$10\sqrt{3} = h$

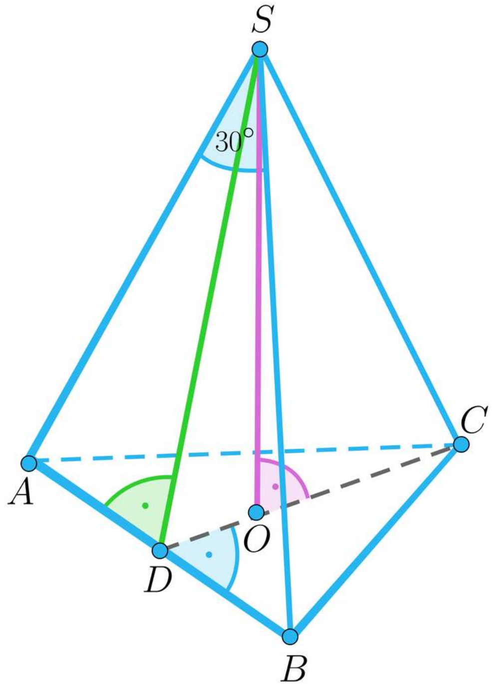
Zatem wysokość ściany bocznej ostrosłupa: $h = 10\sqrt{3}$.

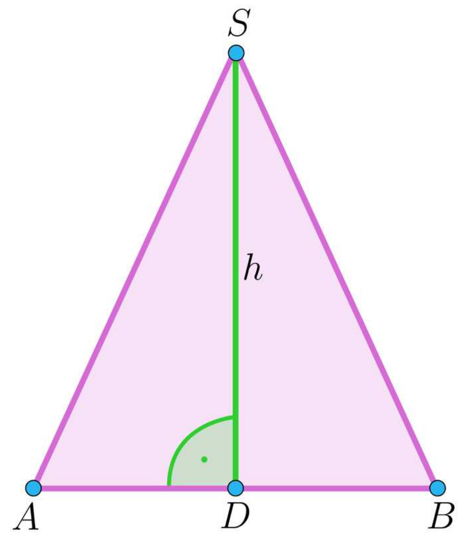
Przykład 4

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 2 cm a kąt między nimi ma miarę 30°. Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Wykonujemy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami, zaznaczamy kąt 30° między ramionami ściany bocznej ostrosłupa.





Oznaczamy $|AB| = |BC| = |AC| = a$, $|DS| = h$ jest wysokością ściany bocznej trójkąta ABS.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCS mamy:

$$a^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2^2 \cdot \cos 30^\circ$$

$$a^2 = 4 + 4 - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = 8 - 4\sqrt{3}$$

$$a^2 = 4\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa
$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}}{4} = \left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3}\ \left[\mathrm{cm}^2\right]$.

Mamy już pole podstawy, obliczymy pole powierzchni bocznej, która jest sumą pól ścian bocznych ostrosłupa.

Dla trójkąta ABS: $P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ$, stąd mamy:

$$P_{ABS} = 2 \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1\left[\mathrm{cm}^2\right]$$

$$P_b = 3 \cdot 1 = 3\ \left[\mathrm{cm}^2\right]$$

Zatem pole powierzchni ostrosłupa:
$P = P_p + P_b = \left(2 - \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3} + 3 = 2\sqrt{3}\ \left[\mathrm{cm}^2\right]$.

Słownik

ostrosłup prawidłowy

to ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny i spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na jego podstawie

spodek wysokości bryły

to rzut prostokątny wierzchołka bryły na płaszczyznę podstawy

ostrosłup prawidłowy trójkątny

to ostrosłup prosty, którego podstawą jest trójkąt równoboczny

czworościan foremny

to ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie cztery ściany są trójkątami równobocznymi

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym apletem GeoGebry. Zauważ jak zmienia się pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, gdy zmienia się krawędź podstawy lub wysokość ostrosłupa. Przesuwając punkt A lub B zmieniasz długość a krawędzi podstawy, gdy przesuniesz punkt D zmieniasz wysokość H ostrosłupa, chwytając za suwak możesz otwierać lub zamykać siatkę ostrosłupa prawidłowego trójkątnego. Możesz obrócić ostrosłup przez przeciągnięcie myszką.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D10Wunq6N

Polecenie 2

Niech krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6, zaś jego wysokość $H = 8$. Korzystając z powyższego apletu ustaw punkt A tak, aby aby krawędź podstawy zwiększyła się dwukrotnie, ale wysokość pozostaw bez zmiany. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego po zmianie oraz określ o ile razy się ono zwiększyło.

Polecenie 3

Niech krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6, zaś jego wysokość $H = 8$. Korzystając z powyższego apletu ustaw punkt D tak, aby odcinek H zwiększył się dwukrotnie, ale krawędź podstawy pozostaw bez zmiany. Oblicz pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego po zmianie i określ o ile razy się ono zwiększyło.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

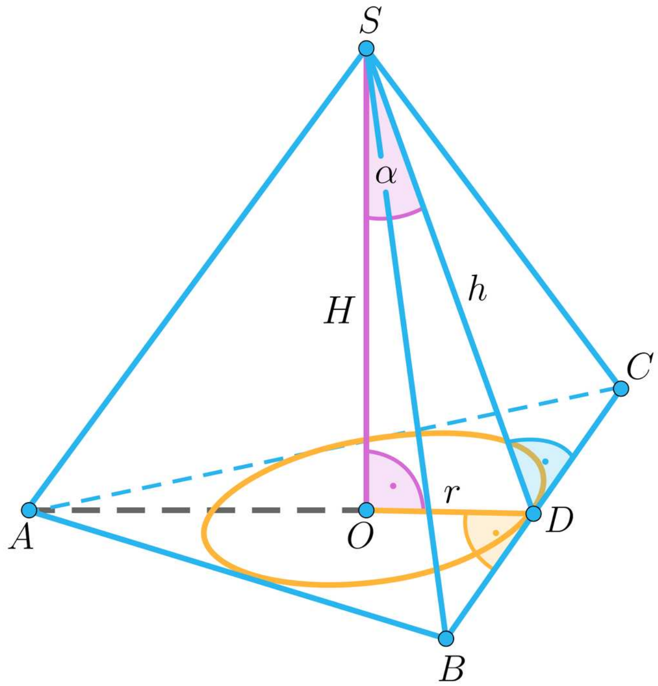
Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ (tak jak na rysunku) promień okręgu wpisanego w podstawę ABC tego ostrosłupa jest równy 4, kąt $\alpha = 30^{\circ}$. Zaznacz prawidłowe odpowiedzi.

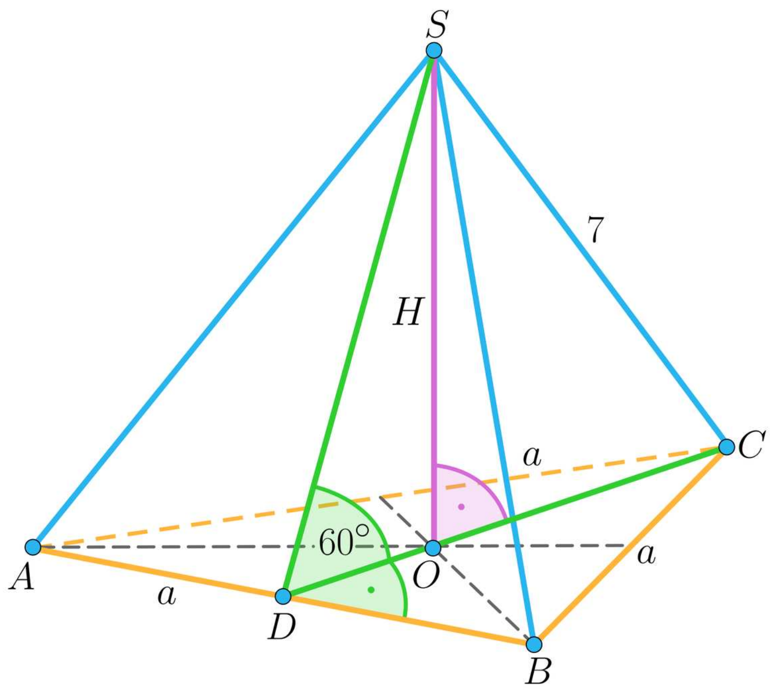


Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Trójkąt równoboczny ABC jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$, w którym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°, a krawędź boczna ma długość 7. Obliczając pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa uzupełnij puste miejsca właściwymi zapisami. Przeciągnij odpowiednie pola.



Ćwiczenie 8

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. Wykaż, że pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa stanowi $\frac{2}{3}$ jego pola powierzchni całkowitej.

Ćwiczenie 9

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym, powierzchnia boczna tego ostrosłupa jest 4 razy większa od powierzchni podstawy. Oblicz cosinus kąta między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy ostrosłupa oraz cosinus kąta między ścianą boczną i płaszczyzną jego podstawy.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Biernacka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:
6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Zakres rozszerzony. Uczeń:
2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego
- stosuje znane twierdzenia w obliczaniu pola powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego
- wykorzystuje związki między odcinkami ostrosłupa prawidłowego trójkątnego w celu budowania rozwiązania zadania
- wykorzystuje związki trygonometrii w obliczaniu pola powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- pokaz multimedialny
- analiza pomysłów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel zadaje pytania dotyczące definiowania oraz własności ostrosłupów, w szczególności ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie twierdzeń dotyczących własności ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.
2. Przedstawia aplet GeoGebry, w którym pokazane są związki między krawędziami ostrosłupa ułatwiające budowanie rozwiązania zadań dotyczących obliczania pola powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.
3. Podział klasy na grupy. Uczniowie w grupach analizują poszczególne przykłady obliczania pola powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego. Wspólnie wyjaśniają sposób ich rozwiązania.
4. Uczniowie także w grupach analizują polecenia z zakładki Aplet związane ze zmianą pola powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, wyciągają wnioski, który z wymiarów ostrosłupa ma istotny wpływ na jego pole powierzchni.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

1. Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.
2. Nauczyciel proponuje uczniom wyszukanie w Internecie lub opracowanie we własnym zakresie różnych modeli siatek ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.

Materiały pomocnicze:

- Ostrosłup i jego własności
- Objętość ostrosłupa

Wskazówki metodyczne:

Aplet wraz z poleceniami może zostać wykorzystany, jako element pracy domowej.

Aplet może pomóc uczniom w powtórzeniu materiału przed sprawdzianem. Można go również wykorzystać w lekcji „Pole powierzchni ostrosłupa” lub w lekcji „Siatka ostrosłupa” .