Zależności między kątami w kole

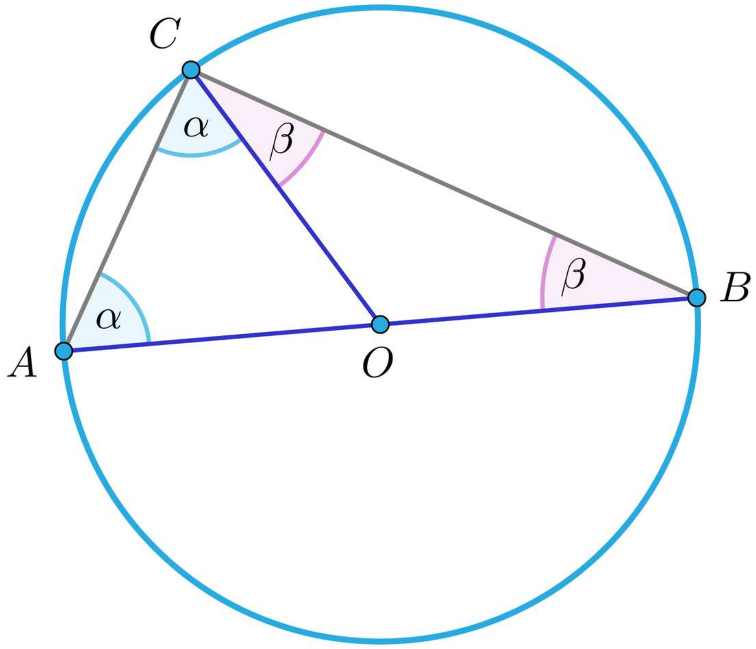
Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Twierdzenie Talesa o kącie wpisanym

W naszej praktyce szkolnej, terminologia związana z twierdzeniem Talesa jest stosowana wyłącznie do badania związków miarowych między odcinkami utworzonymi na ramionach kąta przez proste równoległe.

Są jednak kraje, w których postać Talesa przywoływana jest częściej.

Zachowały się przekazy o tym, że już Egipcjanie i Babilończycy wiedzieli, że kąt wpisany rozpięty na średnicy okręgu jest prosty, jednak to Talesowi przypisuje się pierwszy zapisany dowód tego twierdzenia. Nie dziwi więc fakt, że w niektórych krajach nazwa „twierdzenie Talesa” jest używana także w odniesieniu do tego szczególnego przypadku związku między kątem środkowym i wpisanym. Dowód tego twierdzenia, przypisywany Talesowi, znaleźć można w zapisach lekcji: Kąt wpisany w kole.



Twierdzenie Talesa o kącie wpisanym

Twoje cele

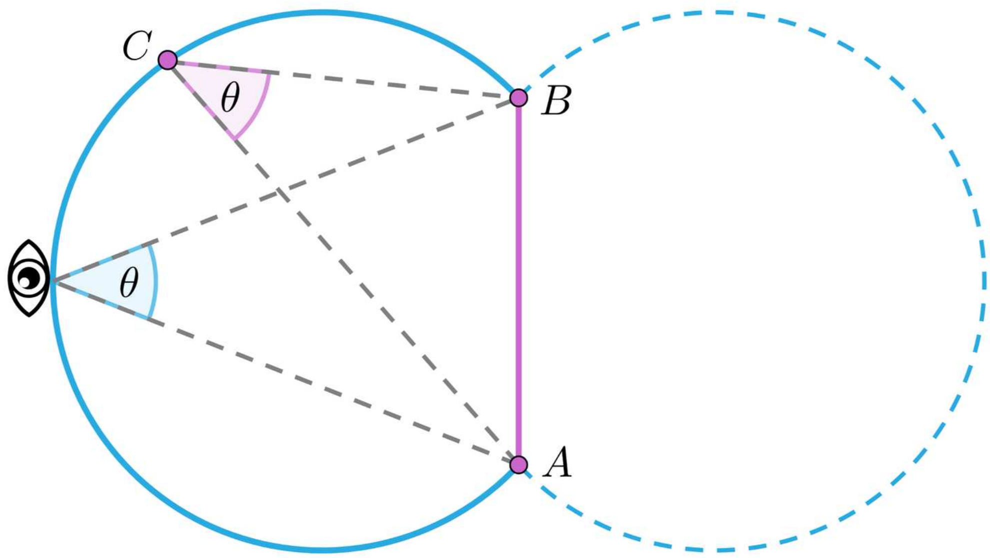
- Poznasz zależność między kątem wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku.
- Udowodnisz twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym.
- Zbadasz zależności między kątami wpisanymi opartymi na tym samym i na równych łukach.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Miejsce geometryczne punktów, z których dany odcinek widać pod stałym kątem

Pojęcie „miejsca geometrycznego” oznacza zbiór wszystkich punktów płaszczyzny lub przestrzeni, które spełniają z góry zadany warunek.

Kątem, pod którym dany odcinek AB widać z określonego punktu C nazywamy kąt wypukły, którego ramiona zawierają odcinki CA i CB. Jego miara wyznacza tzw. rozmiar kątowy danego obiektu.

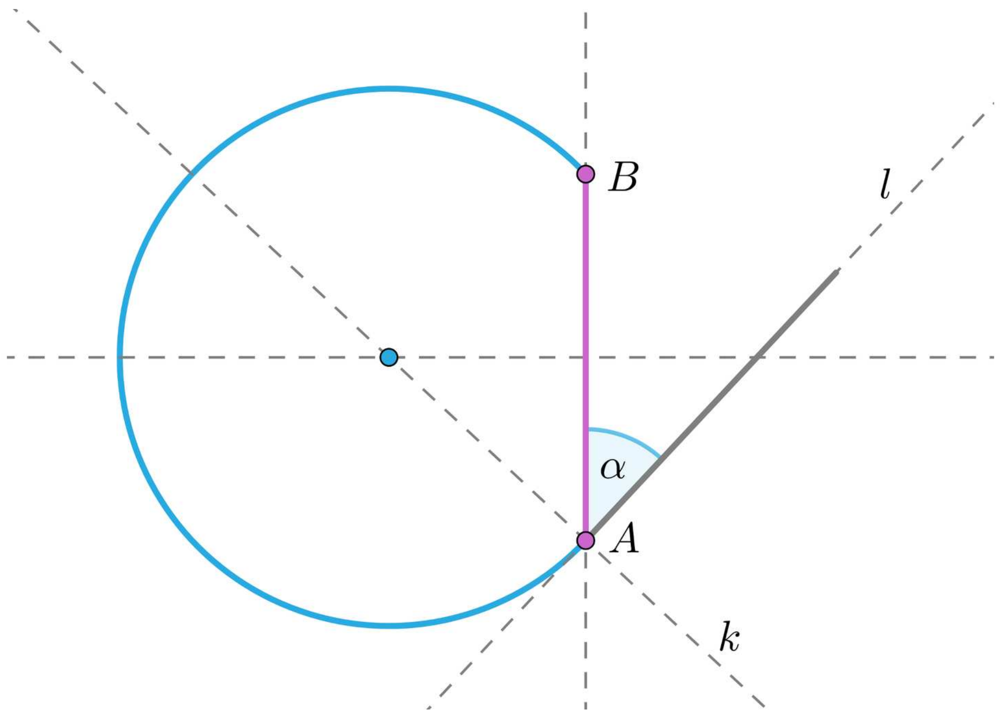


Rozmiar kątowy

Okazuje się, że miejscem geometrycznym punktów, z których dany odcinek widać pod stałym kątem jest łuk okręgu, którego końcami są końce obiektu i który przechodzi przez punkt wyznaczony przez „oko obserwatora” (należy tutaj przywołać znany fakt, że trzy niewspółliniowe punkty wyznaczaja w sposób jednoznaczny okrąg). Oczywiście łuk okręgu, który jest symetryczny do danego względem prostej AB, jest zbiorem punktów o tej samej własności.

Problem 1

Zajmiemy się teraz konstrukcją miejsca geometrycznego punktów, z których dany odcinek AB widać pod zadanym kątem α.



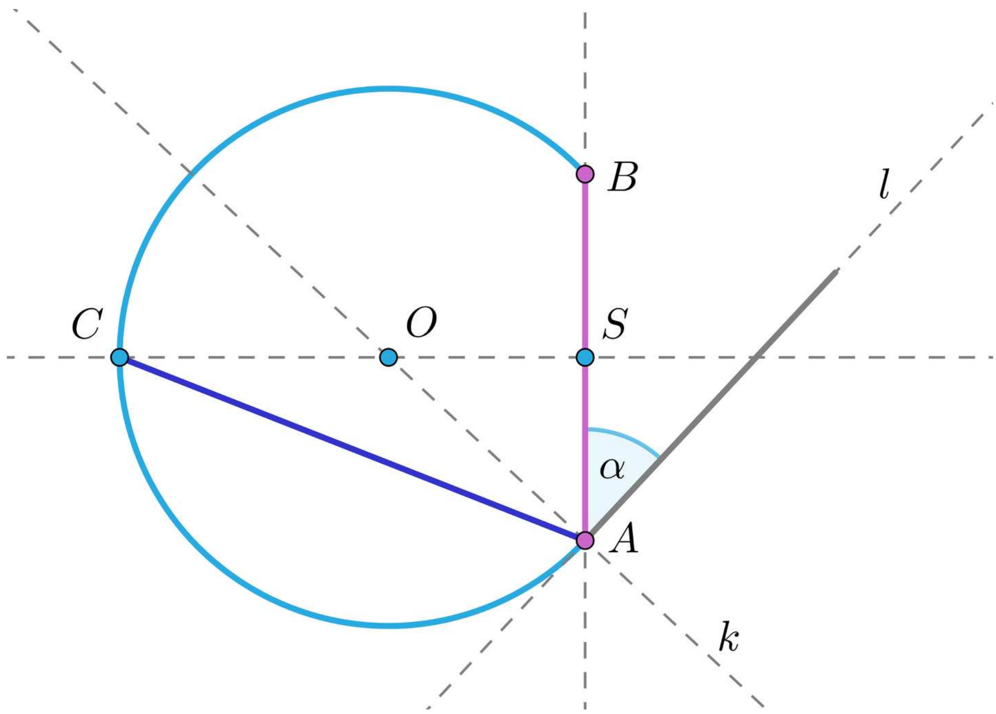
Konstrukcja miejsca geometrycznego

Opis konstrukcji:

- Na prostej odmierzamy odcinek AB.
- Odkładamy kąt α w taki sposób, że wierzchołkiem kąta będzie punkt A, a jedno ramię kąta zawiera dany odcinek – drugie ramię wyznacza prostą l.
- Kreślimy prostą prostopadłą do l, przechodzącą przez punkt A – otrzymujemy prostką k.
- Kreślimy symetralną odcinka AB – punkt wspólny tej symetralnej i prostej k wyznacza punkt O.
- Z punktu O kreślimy łuk o końcach w punktach A i B.

Wykreśliliśmy tylko jedną z części szukanego zbioru. Pozostaje wyznaczyć teraz punkt symetryczny do punktu O, względem odcinka AB i nakreślić drugi – symetryczny łuk.

Dla dowodu poprawności konstrukcji poprowadzimy cięciwę wyznaczoną przez punkt A i przez symetralną odcinka, oraz oznaczymy przez S środek odcinka AB, jak na rysunku.



Dowód poprawności konstrukcji

Zauważmy, że $|\measuredangle OAB| = 90^\circ - \alpha$ oraz $|\measuredangle AOS| = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$.

Kąt AOS jest kątem zewnętrznym w trójkącie równoramiennym AOC, zatem $\alpha = |\measuredangle AOS| = 2 \cdot |\measuredangle ACO|$.

Stąd $|\measuredangle ACO| = \frac{\alpha}{2}$.

Symetralna jest osią symetrii trójkąta ACB, zatem $|\measuredangle ACB| = \alpha$.

Pozostaje jeszcze udowodnić, że tę własność ma każdy punkt leżący na wykreślonym łuku. Ale to już jest przedmiotem poniższego twierdzenia i wniosków, jakie z tego twierdzenia wynikają.

Twierdzenie: Twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym

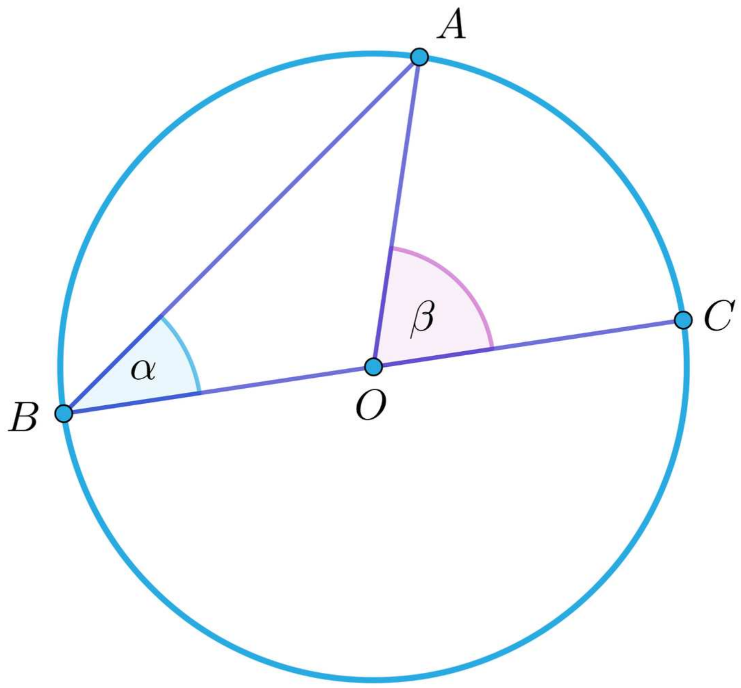
Kąt wpisany jest równy połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

Dowód

Rozważymy trzy różne przypadki, w zależności od położenia kąta wpisanego względem środka okręgu, które wyczerpują wszystkie wzajemne położenia środka okręgu i kąta wpisanego w tym okręgu.

Przypadek 1.

Przypuśćmy, że średnica okręgu zawiera się w jednym z ramion kąta wpisanego, jak na rysunku.



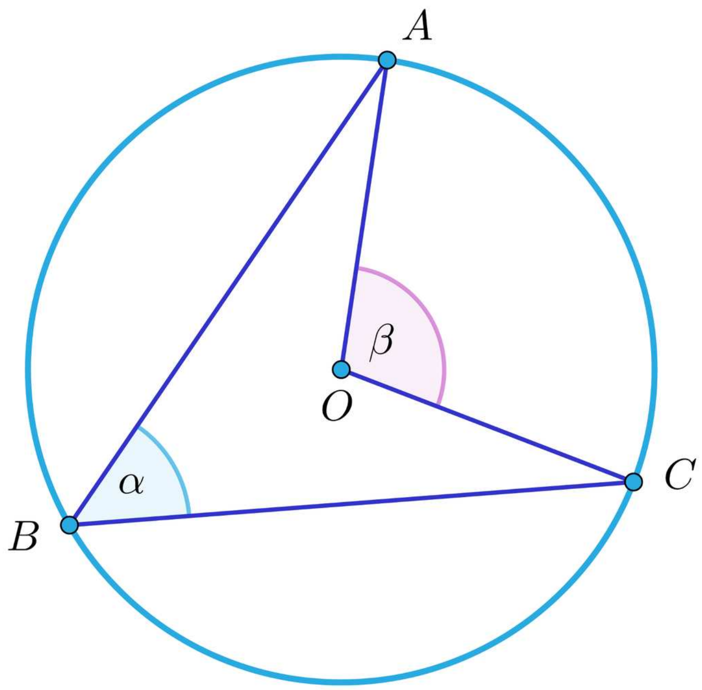
Kąt środkowy β i kąt wpisany α są oparte na łuku AC.

Zauważmy, że β jest kątem zewnętrznym w trójkącie równoramiennym AOB, w którym $|\measuredangle ABO| = |\measuredangle BAO| = \alpha$.

Miara kąta zewnętrznego w trójkącie jest równa sumie miar dwóch kątów do niego nieprzyległych, czyli $\beta = 2\alpha$, co należało wykazać.

Przypadek 2.

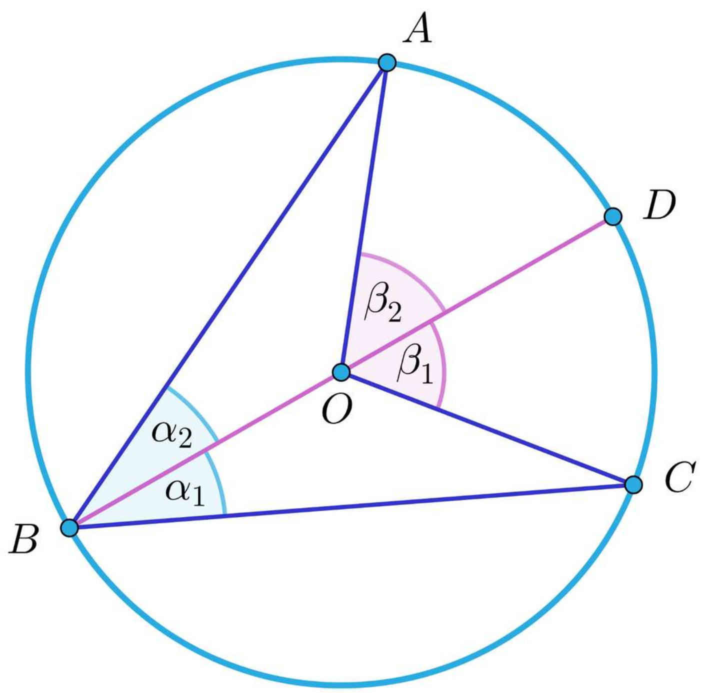
Przypuśćmy, że środek okręgu leży wewnątrz kąta wpisanego, jak na rysunku.



Kąt środkowy β i kąt wpisany α są oparte na łuku AC.

Poprowadźmy średnicę o końcu w punkcie B.

Dzieli ona kąty: wpisany i środkowy na kąty odpowiednio: α_1, α_2 oraz β_1, β_2, jak na rysunku.



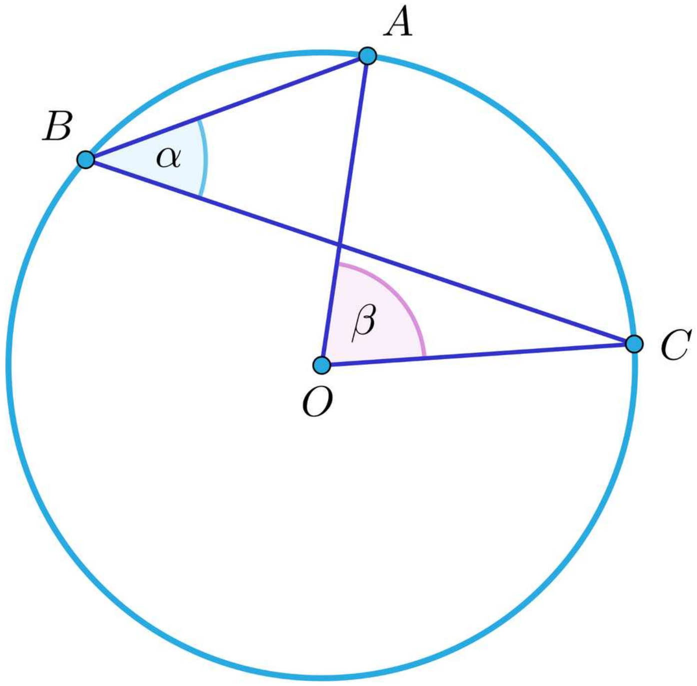
Zauważmy, że do kątów: wpisanego i środkowego, opartych na łuku CD, możemy zastosować zależność udowodnioną już w Przypadku 1. Wtedy $\beta_1 = 2\alpha_1$.

Podobnie, do kątów: wpisanego i środkowego, opartych na łuku AD, możemy zastosować udowodnioną już zależność. Wtedy $\beta_2 = 2\alpha_2$.

Ale $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$, co należało wykazać.

Przypadek 3.

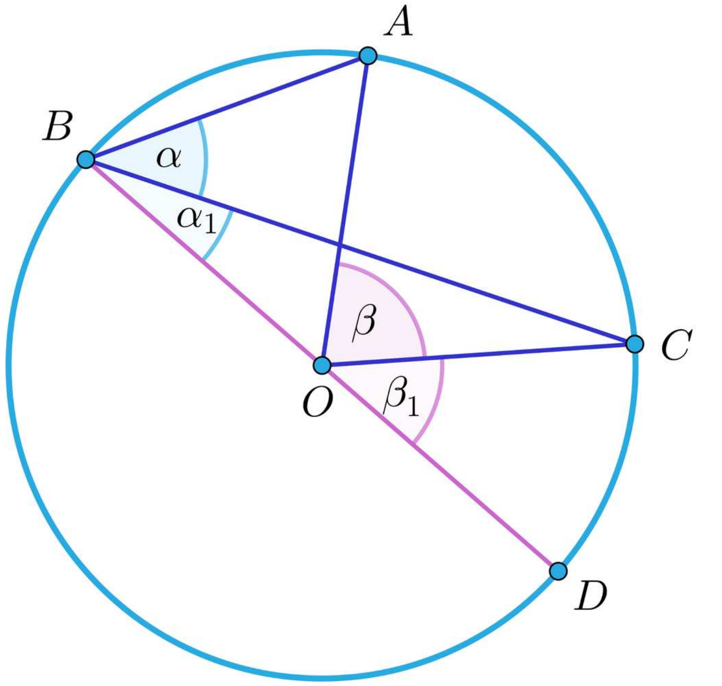
Pozostaje rozważyć sytuację, gdy środek okręgu leży na zewnątrz kąta wpisanego, jak na rysunku.



Kąt środkowy β i kąt wpisany α są oparte na łuku AC.

Poprowadźmy średnicę o końcu w punkcie B.

Tworzy ona z ramieniem BC kąta wpisanego oraz z ramieniem OC kąta środkowego odpowiednio kąty: wpisany α_1 oraz środkowy β_1, jak na rysunku.



Zauważmy, że do kątów: wpisanego i środkowego, opartych na łuku CD, możemy zastosować zależność udowodnioną już w Przypadku 1. Wtedy $\beta_1 = 2\alpha_1$.

Podobnie, do kątów: wpisanego i środkowego, opartych na łuku AD, możemy zastosować zależność udowodnioną w Przypadku 1. Wtedy $\beta + \beta_1 = 2 \cdot (\alpha + \alpha_1)$.

Ale $\beta = (\beta + \beta_1) - \beta_1 = 2 \cdot (\alpha + \alpha_1) - 2\alpha_1 = 2\alpha$, co należało wykazać.

Prostym wnioskiem z tego twierdzenia jest twierdzenie Talesa o kącie wpisanym.

Twierdzenie: Twierdzenie Talesa o kącie wpisanym

Kąt wpisany rozpięty na średnicy okręgu jest prosty, jako kąt dwa razy mniejszy od kąta półpełnego, czyli kąta środkowego rozpiętego na tej średnicy.

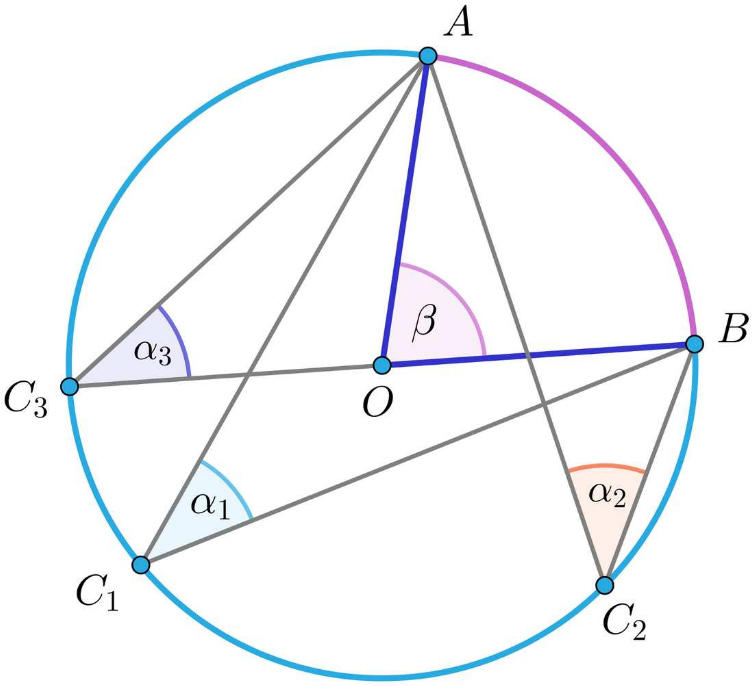
Pozostaje sformułować wniosek, który stanowi nie tylko uzupełnienie dowodu poprawności wcześniejszej konstrukcji, ale jest ważnym narzędziem w rozwiązywaniu zadań z planimetrii.

Twierdzenie: Twierdzenie o kątach wpisanych

Wszystkie kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.

Dowód

Zauważmy, że dany łuk AB jednoznacznie wyznacza kąt środkowy. Z kolei istnieje wiele kątów wpisanych opartych na tym samym łuku, ale miara każdego z tych kątów jest dwa razy mniejsza od miary kąta środkowego, tym samym te miary są sobie równe (patrz rysunek).

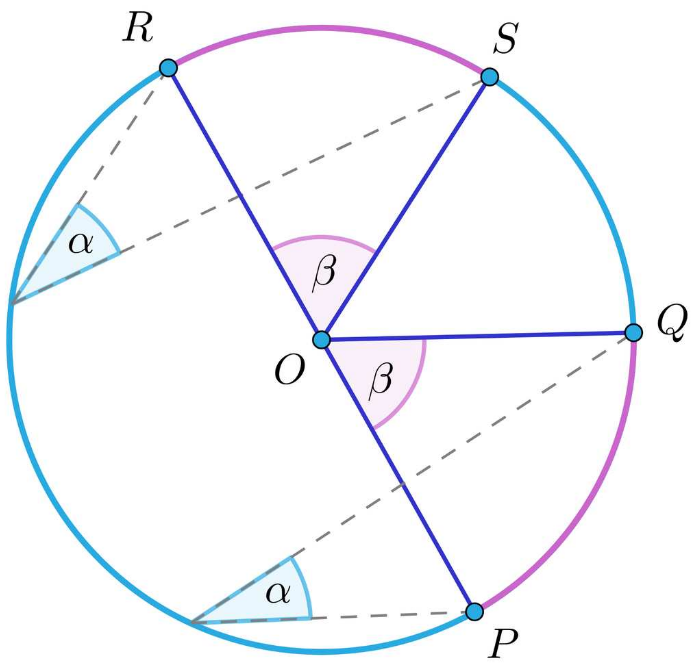


Twierdzenie: Twierdzenie o kątach wpisanych w okrąg

Kąty wpisane w dany okrąg, oparte na dwóch łukach o równej długości, są sobie równe.

Dowód

Popatrzmy na rysunek.



Kąty oparte na równych łukach

Rozważmy łuki PQ i RS o równej długości.

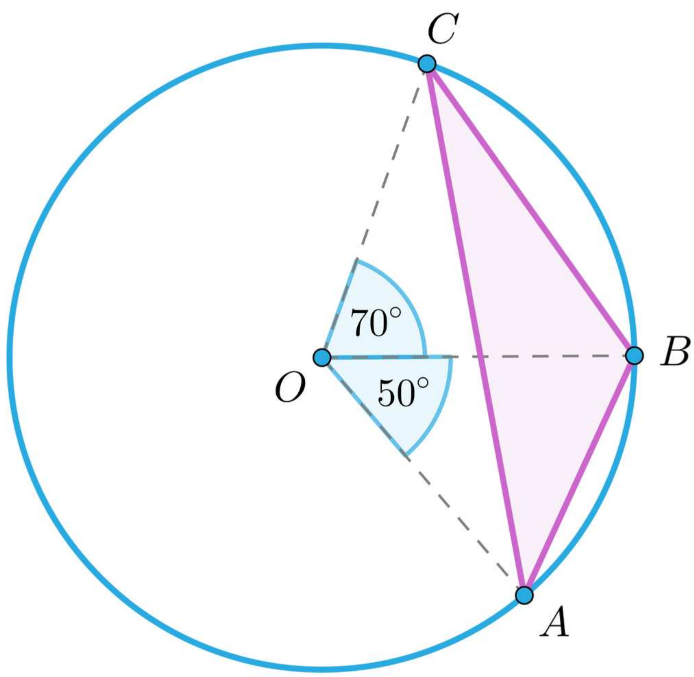
Wtedy kąty środkowe oparte na tych łukach mają taką samą miarę – oznaczmy ją β.

Ale każdy z kątów wpisanych opartych odpowiednio na łukach PQ i RS jest połową kąta środkowego, czyli ma miarę $\alpha = \frac{\beta}{2}$, co należało wykazać.

Przykład 1

Pokażemy zastosowanie twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym w okręgu. Przyjmijmy, że na okręgu wyznaczono łuki AB i BC. Kąty środkowe oparte na tych łukach mają odpowiednio miary 50° i 70°. Wyznaczymy miary kątów trójkąta ABC.

Popatrzmy na rysunek ilustrujący dane z zadania.



Dwa spośród kątów trójkąta to kąty oparte odpowiednio na tych samych łukach, co dane kąty środkowe.

Zatem $|\measuredangle ACB| = \frac{1}{2} \cdot 50^\circ = 25^\circ$ oraz $|\measuredangle BAC| = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ$.

Z bilansu kątów trójkąta wynika, że $|\measuredangle ABC| = 180^\circ - 35^\circ - 25^\circ = 120^\circ$.

Oczywiście, trzeci z kątów trójkąta można też wyznaczyć, jako kąt wpisany oparty na tym łuku o końcach A, C do którego nie należy punkt B – kąt środkowy oparty na tym łuku ma miarę $360^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 240^\circ$, a kąt wpisany jest dwa razy mniejszy.

Słownik

rozmiar kątowy

rozmiar kątowy, inaczej odległość kątowa θ, pomiędzy dwoma obiektami, to kąt, którego ramionami są promienie „wychodzące z oka obserwatora” i przechodzące przez te obiekty; miarą takiej odległości są stopnie i jego części: minuty i sekundy

Aplet

Polecenie 1

Uruchom Aplet. Naciśnij przycisk: „ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY KĄTAMI” i wybierz jeden z łuków okręgu, klikając wskaźnikiem. Zmieniaj położenie punktów A, B lub C i zapisz miary kątów: środkowego i wpisanego dla kilku różnych położeń punktu C. Wybierz następnie przycisk „DOWÓD” i przeanalizuj pojawiające się oznaczenia kątów.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DHHXUkl22

Polecenie 2

Wciśnij przycisk „ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY KĄTAMI”. Na podstawie obserwacji miar kątów wpisanego i środkowego, opartych na tym samym łuku, sformułuj twierdzenie o zależności między miarami kąta środkowego i kąta wpisanego.Poproszę o alt. do polecenia w tym polu.

Polecenie 3

Wciśnij przycisk „DOWÓD”. Uzasadnij, dlaczego przy ustalonym oznaczeniu miary kąta ACB, jako α, można kątowi OBC także przypisać miarę α, a kątom COB i AOB odpowiednio miary $180^\circ - 2\alpha$ oraz 2α.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Na okręgu wyznaczono łuki AB i BC. Kąty środkowe oparte na tych łukach mają odpowiednio miary 124° i 92°. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

Ćwiczenie 2

Dany jest okrąg o środku w punkcie O i cięciwa AB tego okręgu. Na okręgu wyznaczono taki punkt C, że $2 \cdot |\measuredangle AOB| = |\measuredangle ACB|$. Wyznacz miarę kąta AOB.

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

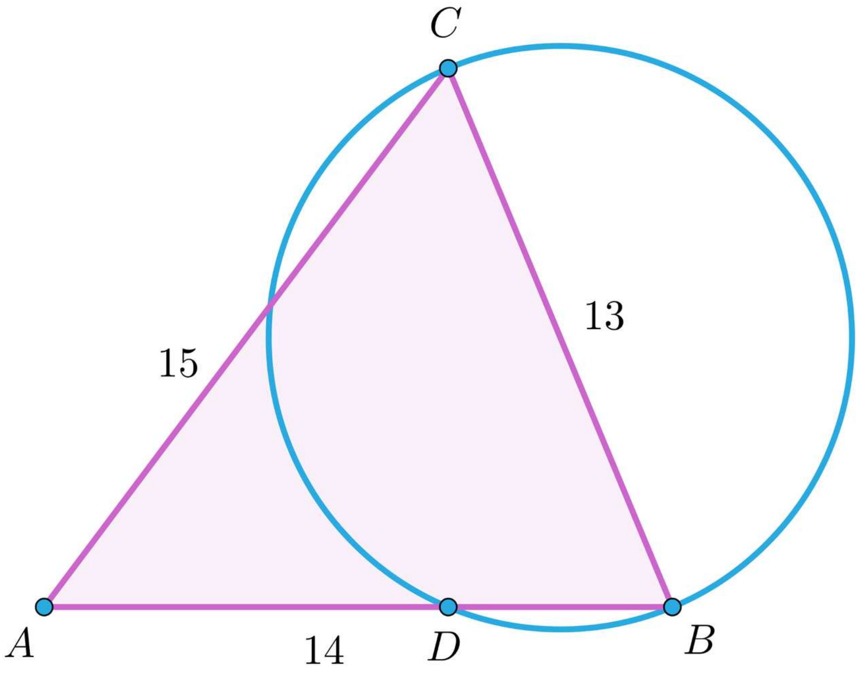
Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Wyznacz miejsce geometryczne punktów, które są środkami cięciw poprowadzonych z ustalonego punktu na danym okręgu.

Ćwiczenie 7

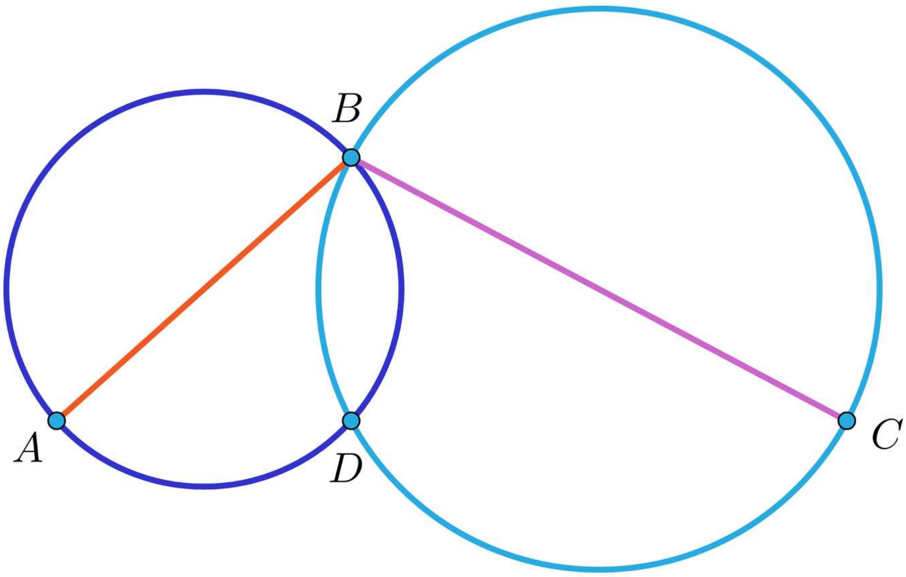
Okrąg o średnicy BC przecina bok AB trójkąta ABC w punkcie D, jak na rysunku.



Długości boków trójkąta są odpowiednio równe: $|AB| = 14$, $|AC| = 15$, $|BC| = 13$.
Oblicz długość odcinka AD.

Ćwiczenie 8

Na niewspółliniowych odcinkach AB i BC, jako na średnicach, wykreślono dwa okręgi. Okręgi te przecinają się w punkcie $D \neq B$ (patrz rysunek).



Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zależność między kątami w kole

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych;

5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje kąty wpisane i środkowe
- zna i stosuje twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku
- przeprowadza dowód twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku
- zna pojęcie miejsca geometrycznego punktów i wyznacza zbiory punktów o zadanych własnościach
- zna i stosuje twierdzenie o równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel zadaje pytanie dotyczące postaci Talesa i zagadnień z tą postacią związanych. Przywołuje twierdzenie o kącie wpisanym rozpiętym na średnicy i historyczne wzmianki o zasługach Talesa w tym zakresie.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie pojęć kątów wpisanych i środkowych w okręgu i kole.
2. Nauczyciel formułuje problem związany z miejscem geometrycznym punktów, z których dany odcinek widać pod stałym kątem – może skorzystać z Infografiki dołączonej do lekcji: „Kąt wpisany w koło”.
3. Nauczyciel pomaga opisać zbiór o zadanej własności i prosi wybranego ucznia o przeprowadzenie konstrukcji. Omawiając poprawność konstrukcji odwołuje się do konieczności uzasadnienia równości odpowiednich kątów wpisanych i w ten sposób przechodzi do twierdzenia o kącie środkowymi wpisanym.
4. Nauczyciel zachęca do przejrzenia Apletu i wykonania dołączonych tam poleceń.
5. Nauczyciel sugeruje przeprowadzenie dowodu w trzech różnych wariantach i prosi wybranego ucznia o dowód w przypadku, gdy ramię kąta wpisanego zawiera średnicę. Następnie dyskutują nad dowodem w pozostałych przypadkach. Nauczyciel może zaproponować przeprowadzenie dowodu dla pozostałych przypadków w ramach pracy domowej.

6. Nauczyciel prosi o podanie wniosków z twierdzenia, dotyczących w szczególności kątów wpisanych opartych na tym samym i na równych łukach.
7. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć. Ewentualnie może prosić o dokończenie dowodu twierdzenia.

Materiały pomocnicze:

Kąt środkowy, kąt wpisany

Wskazówki metodyczne:

Aplet można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem.