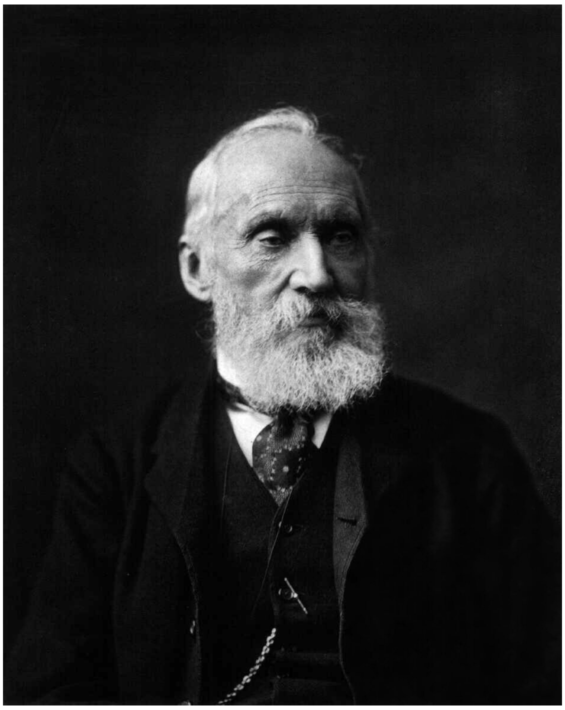
Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej na podstawie jej własności

Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej na podstawie jej własności

Źródło: Olaf Pictures, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Dzięki doświadczalnemu wykryciu zależności liniowej między ciśnieniem gazów a ich temperaturą, francuski fizyk Guillaume Amontos wprowadził w 1702 roku określenie „zera bezwzględnego”. Zero bezwzględne skali gazowej pokrywa się z zerem skali bezwzględnej temperatury zaproponowanej w 1848 roku przez Williama Thomsona, lorda Kelvina, który określił wartość zera bezwzględnego na około $(-273,15^{\circ}\mathrm{C})$. Na cześć Williama Thomsona jednostkę skali bezwzględnej temperatur nazwano Kelvinem.



William Thomson, lord Kelvin

Źródło: Messrs. Dickinson, dostępny w internecie: www.commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Zależność między skalą temperatur wyrażoną w kelwinach a skalą wyrażoną w stopniach Celsjusza jest też zależnością liniową: $T_{\mathrm{K}} = t_{\mathrm{C}} + 273$. Jest to jeden z przykładów praktycznego zastosowania funkcji liniowej. W tym materiale nauczysz się wyznaczać wzór funkcji liniowej znając jej własności.

Twoje cele

- Podasz wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej własnościach.
- Wykorzystasz własności funkcji liniowej do rozwiązywania zadań.
- Utrwalisz wiadomości związane z funkcją liniową.

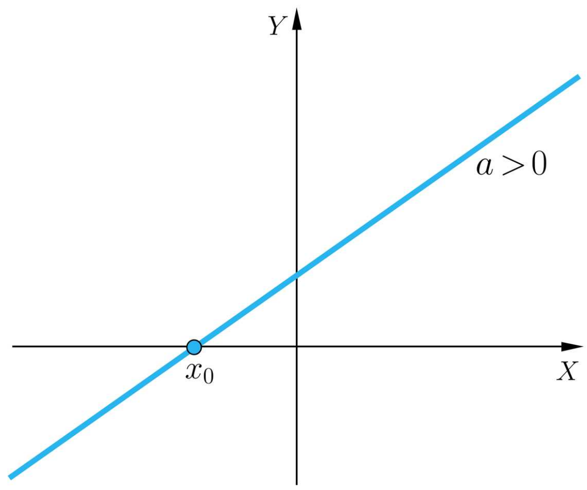
Przeczytaj

Przypomnijmy, że funkcję postaci $y = ax + b$, gdzie a i b są danymi liczbami rzeczywistymi nazywamy funkcją liniową.

Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, b – wyrazem wolnym.

Własności funkcji liniowej:

Funkcja $y = ax + b$ jest rosnąca, $a > 0$



$y < 0$ dla $x \in (-\infty,\ x_0)$, $y > 0$ dla $x \in (x_0,\ \infty)$

Mając dane dwa różne punkty możemy narysować tylko jedną prostą przechodzącą przez oba te punkty. Innymi słowy - dwa punkty jednoznacznie wyznaczają prostą. Jeśli wybrane punkty mają dodatkowo różne pierwsze współrzędne, możemy wyznaczyć wzór funkcji liniowej, która opisuje narysowaną prostą.

Przykład 1

Napisz wzór funkcji liniowej, do wykresu której należą punkty: $A = (1, 5)$ oraz $B = (-3, 2)$.

Rozwiązanie:

Jeżeli punkt $A = (x_1, y_1)$ należy do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$, to znaczy, że współrzędne tego punktu spełniają równanie $y_1 = ax_1 + b$. Czyli

$x_1 = 1$ i $y_1 = 5 \Rightarrow\ 5 = a \cdot 1 + b$

Jeżeli punkt $B = (x_2, y_2)$ należy do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$ to znaczy, że współrzędne tego punktu spełniają równanie: $y_2 = ax_2 + b$.

$y_2 = 2 \Rightarrow 2 = a \cdot (-3) + b$

Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} 5 = a \cdot 1 + b \\ 2 = a \cdot (-3) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = a + b & (1) \\ 2 = -3a + b & (2) \end{cases}$$

Odejmiemy stronami od pierwszego (1) równania drugie (2).

$5 - 2 = (a + b) - (-3a + b)$

$3 = a + b + 3a - b$

$3 = a + b + 3a - b$

$3 = 4a$, stąd

$a = \frac{3}{4}$

Wyznaczamy teraz wartość wyrazu wolnego b z pierwszego równania.

$5 = a + b$

$b = 5 - a$

$b = 5 - \frac{3}{4} = \frac{20}{4} - \frac{3}{4} = \frac{17}{4}$

Odpowiedź:

Szukana funkcja ma wzór $y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$.

Przykład 2

Napisz wzór funkcji liniowej, mając dane jej miejsce zerowe $x_0 = 5$ i punkt $A = (-1, -2)$, przez który przechodzi wykres tej funkcji.

Rozwiązanie (sposób I):

Miejsce zerowe funkcji to taki jej argument, dla którego przyjmuje ona wartość zero, czyli $f(x_0) = 0$.

$x_0 = 5$, więc $y_0 = f(5) = 0$, czyli $0 = a \cdot 5 + b$.

Jeżeli punkt $A = (x_1, y_1)$ należy do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$ to znaczy, że współrzędne tego punktu spełniają równanie $y_1 = ax_1 + b$.

$x_1 = -1$ i $y_1 = -2 \Rightarrow \ -2 = a \cdot (-1) + b = -a + b$

Otrzymujemy układ równań z dwiema niewiadomymi a i b.

$$\begin{cases} 0 = 5a + b & (1) \\ -2 = -a + b & (2) \end{cases}$$

Tym razem wyznaczymy b z pierwszego równania (1) i podstawimy do drugiego (2).

$b = 0 - 5a = -5a$

$-2 = -a + b$

$-2 = -a + (-5a)$

$-2 = -6a$

$a = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$b = -5a = -5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3}$

Odpowiedź:

Wzór szukanej funkcji liniowej to $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$.

Możemy też rozwiązać to zadanie, wykorzystując zależność między x_0 a współczynnikami a i b.

Rozwiązanie (sposób II):

Wyraźmy x_0, miejsce zerowe funkcji liniowej, za pomocą współczynników a i b.

$0 = ax_0 + b$

$-b = a \cdot x_0$

$x_0 = -\frac{b}{a}$, przy założeniu: $a \neq 0$.

Punkt przecięcia z osią X: $A = (x_0, 0) \Rightarrow A = \left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

$x_0 = 5$, więc $5 = -\frac{b}{a}$.

$5a = -b$

$b = -5a$

Punkt $A = (-1, -2)$ należy do wykresu funkcji $y = ax + b$.

$-2 = a(-1) - b = -a + b$

$-2 = -a + b$

$-2 = -a + (-5a)$

$-2 = -6a$

$a = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Odpowiedź:

Wzór funkcji liniowej to $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$.

Przykład 3

Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $P = (2, 10)$ i jest równoległy do wykresu funkcji $y = 3x + 1$.

Rozwiązanie:

Jeżeli proste $y = ax + b$ i $y = cx + d$ są równoległe, to $a = c$.

Prosta $y = ax + b$ jest równoległa do prostej $y = 3x + 1$, więc $a = 3$.

Równanie naszej prostej przyjmuje postać: $y = 3x + b$.

Ponieważ wykres przechodzi przez punkt $P = (2, 10)$, to znaczy, że współrzędne tego punktu spełniają równanie $y = 3x + b$.

$y = 3x + b$

$10 = 3 \cdot 2 + b$

$10 = 6 + b$

$b = 10 - 6 = 4$

Odpowiedź:

Wzór funkcji liniowej: $y = 3x + 4$.

Przykład 4

Napisz wzór funkcji liniowej, której wykres tworzy z osią X kąt o mierze 45° i przecina oś Y w punkcie o współrzędnej $y_0 = 2$.

Rozwiązanie:

Wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ jest prosta nachylona do dodatniej półosi osi X pod takim kątem α, że $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Stąd $a = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

$$a = 1$$

Punkt przecięcia z osią Y to: $B = (0, y_0) \Rightarrow B = (0, b)$.

($y_0 = a \cdot 0 + b$, stąd $y_0 = b$)

Ponieważ $y_0 = 2$, to $b = 2$.

$$b = 2$$

Odpowiedź:

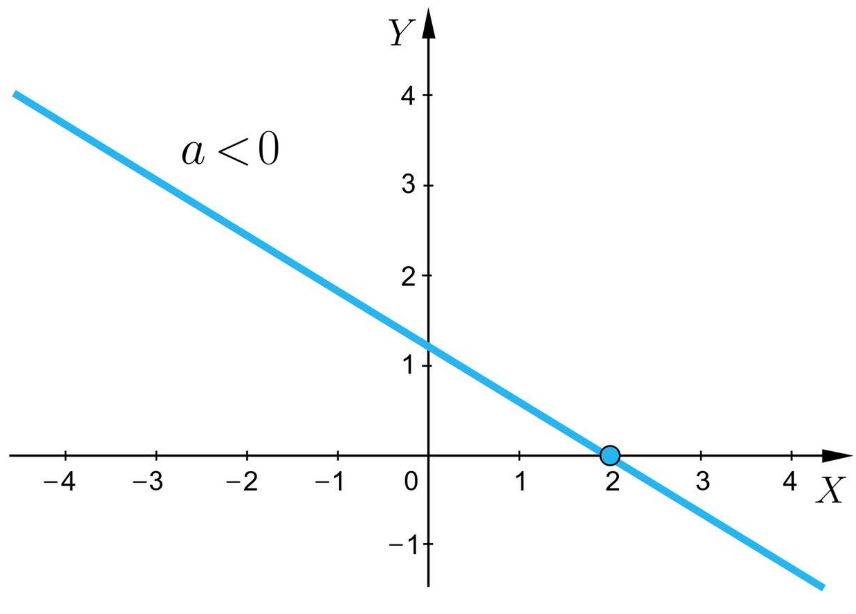
Wzór funkcji liniowej: $y = x + 2$.

Przykład 5

Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $A = (-2, 6)$ i która przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(-\infty, 2)$, zaś ujemne w przedziale $(2, +\infty)$.

Rozwiązanie:

Funkcja $y = ax + b$ przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(-\infty, 2)$, zaś ujemne w przedziale $(2, +\infty)$, oznacza to, że $x_0 = 2$ jest miejscem zerowym tej funkcji.



$y > 0$ dla $x \in (-\infty, 2)$ i $y < 0$ dla $x \in (2, \infty)$.

Miejsce zerowe funkcji to taki jej argument, dla którego przyjmuje ona wartość zero, czyli taki x, dla którego $y = 0$. Z wykresu możemy odczytać, że miejscem zerowym rozważanej funkcji jest $x_0 = 2$. Możemy zatem wstawić punkt $(2,\ 0)$ do równania funkcji:

$0 = a \cdot 2 + b = 2a + b.$

Jeżeli punkt $A = (x_1, y_1)$ należy do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$ to znaczy, że współrzędne tego punktu spełniają równanie: $y_1 = ax_1 + b$.

$x_1 = -2$ i $y_1 = 6 \ \Rightarrow \ 6 = a \cdot (-2) + b = -2a + b$

Otrzymujemy układ równań z dwiema niewiadomymi a i b.

$$\begin{cases} 0 = 2a + b & (1) \\ 6 = -2a + b & (2) \end{cases}$$

Dodajemy stronami pierwsze równanie do drugiego.

$0 + 6 = 2a + b + (-2a + b)$

$6 = 2a + b - 2a + b$

$6 = 2b$

$b = 3$

Z pierwszego równania wyznaczamy a.

$0 = 2a + b$

$2a = -b$

$a = -\frac{b}{2}$

$a = -\frac{3}{2}$

Odpowiedź:

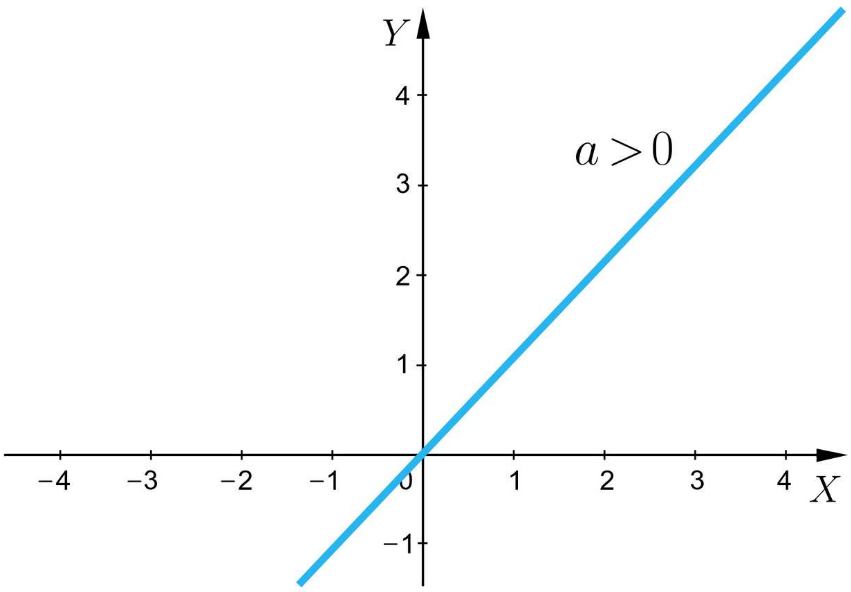
Wzór funkcji liniowej: $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

Przykład 6

Znajdź wzór funkcji liniowej $y = ax + b$, której wykres przechodzi przez punkt $P = (a, 4)$ i która przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(0, +\infty)$, zaś ujemne w przedziale $(-\infty, 0)$.

Rozwiązanie:

Funkcja $y = ax + b$ przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(0, +\infty)$, zaś ujemne w przedziale $(-\infty, 0)$, oznacza to, że $x = 0$ jest miejscem zerowym tej funkcji i jest to funkcja rosnąca $(a > 0)$.



$y < 0$ dla $x \in (-\infty, 0)$ i $y > 0$ dla $x \in (0, \infty)$.

$x_0 = 0$, więc $y_0 = f(0) = 0$, czyli $0 = a \cdot 0 + b$, stąd $b = 0$.

Punkt $P = (a, 4)$ należy do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$, więc otrzymujemy $4 = a \cdot a + b$.

$b = 0$, stąd otrzymujemy równanie $a^2 = 4$. Rozwiązaniem równania $a^2 = 4$ są liczby: 2 i -2.

Funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(0, +\infty)$, zaś ujemne w przedziale $(-\infty, 0)$, funkcja jest rosnąca czyli $a > 0$, stąd $a = 2$.

$a = 2,\ b = 0$

Odpowiedź:

Wzór funkcji: $y = 2x$.

Słownik

funkcja liniowa

funkcja postaci $y = ax + b$, gdzie a i b są danymi liczbami rzeczywistymi

miejsce zerowe

argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość zero

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą, jak wyznaczyć wzór funkcji liniowej na podstawie danych własności funkcji. Następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJnTUF3gm

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wyznaczania wzoru funkcji liniowej na podstawie jej własności.

Polecenie 2

Napisz wzór funkcji liniowej $y = ax + b$, mając dany współczynnik $a = 2$ oraz punkt $A = (-2, 1)$ należący do wykresu tej funkcji.

Polecenie 3

Napisz wzór funkcji liniowej f, której wykres przechodzi przez punkt $A = (1, 3)$ i jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = -3x + 3$. Następnie:

a) podaj miejsca zerowe obu funkcji,

b) sporządź wykresy obu funkcji,

c) oblicz pole figury ograniczonej wykresami obu funkcji i osiami układu współrzędnych.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: matematyka

Temat: Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej na podstawie jej własności.

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony.

Podstawa programowa:

Zakres podstawowy:

V. Funkcje

Uczeń:

2. Oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

3. Odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, najmniejsze i największe wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

4. Interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.

5. Wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach.

6. Wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- Kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.
- Kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.
- Kompetencje cyfrowe.
- Kompetencje osobiste, społeczne w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- ustala wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez dwa podane punkty,
- podaje wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta równoległa do danej prostej,
- oblicza miejsca zerowe funkcji liniowej,
- sporządza wykres funkcji liniowej,
- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej,
- wyznacza argument dla danej wartości funkcji liniowej oraz wartość funkcji liniowej dla podanego argumentu,
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- Konstruktywizm.
- Konektywizm.

Metody i techniki nauczania

- Praca z tekstem.
- Burza mózgów.

Formy pracy:

- Praca indywidualna.
- Praca w grupach.
- Praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne

- Komputery z dostępem do internetu.
- Tablica interaktywna/rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca

- Uczniowie przypominają definicję funkcji liniowej.
- Uczniowie metoda burzy mózgów podają własności funkcji liniowej.
- Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

- Nauczyciel dzieli uczniów na 3-osobowe grupy.
- Każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji PRZECZYTAJ.
- Uczniowie w grupach analizują przykłady zawarte w sekcji PRZECZYTAJ.

- Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem, następnie samodzielnie rozwiązują polecenia umieszczone w sekcji Animacja.
- Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1 - 4 .
- Nauczyciel kontroluje pracę uczniów, udzielając im wskazówek.

Faza podsumowująca:

- Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych.
- Uczniowie określają to, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień.
- Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

- Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych 5 -8.

Materiały pomocnicze:

- Definicja funkcji liniowej
- Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej
- Funkcja liniowa rosnąca, funkcja liniowa malejąca
- Zadania
- Zadania generatorowe

Wskazówki metodyczne:

Animację uczniowie mogą wykorzystać jako pracę własną przed lekcją. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.

Animacja może być przydatna na zajęciach poświęconych rozwiązywaniu układów równań.