



Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do rozwiązywania nierówności

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Gra edukacyjna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do rozwiązywania nierówności

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

W tym materiale pokażemy, jak wzory na sinus, cosinus i tangens podwojonego argumentu można stosować do rozwiązywania nierówności trygonometrycznych. Będziemy się opierać także na twierdzeniach opisujących rozwiązywanie nierówności postaci: $\sin x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$.

Prezentowane w tej jednostce nierówności wykraczają poza wymagania z podstawy programowej, ale są ciekawym rozszerzeniem tej tematyki.

Twoje cele

- Zastosujesz wzory na sinus, cosinus i tangens podwojonego argumentu do rozwiązywania nierówności trygonometrycznych.
- Przypomnisz sobie, jak rozwiązujemy nierówności typu: $\sin x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$.

Przeczytaj

W tym materiale zaprezentujemy, w jaki sposób można wykorzystać wzory na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta do rozwiązywania nierówności trygonometrycznych. Przedstawimy typowe nierówności, które będziemy starali się sprowadzić do postaci prostych nierówności trygonometrycznych np. typu $\sin x > a$.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność: $\sin 2x > 4 \sin x$.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na [sinus podwojonego kąta](#):

$$2 \sin x \cos x > 4 \sin x.$$

Przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę i wyłączamy przed nawias wspólny czynnik:

$$2 \sin x (\cos x - 2) > 0.$$

Ponieważ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $\cos x - 2 < 0$, to nierówność z zadania jest równoważna nierówności $\sin x < 0$, a stąd otrzymujemy:

$$x \in (-\pi + 2k\pi, 2k\pi), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność: $\cos 2x + \cos x > 0$.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru na [cosinus podwojonego kąta](#) i przekształcamy nierówność do postaci:

$$2 \cos^2 x - 1 + \cos x > 0.$$

Wprowadźmy podstawienie: $t = \cos x$.

Nierówność ma wówczas postać nierówności kwadratowej:

$$2t^2 + t - 1 > 0.$$

Rozwiązujemy nierówność kwadratową ze zmienną t :

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 9.$$

$$t = \frac{-1-3}{2 \cdot 2} = -1 \text{ lub } t = \frac{-1+3}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Rozwiązaniem nierówności $2t^2 + t - 1 > 0$ jest każda liczba ze zbioru:

$$(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Wracamy do zmiennej x :

$$\cos x < -1 \text{ lub } \cos x > \frac{1}{2}.$$

Pierwszej nierówności nie spełnia żadna liczba rzeczywista, natomiast rozwiązaniem drugiej nierówności jest każda liczba ze zbioru:

$$\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

I jest to także rozwiązanie nierówności z zadania.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność: $\cos^4 x - \sin^4 x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie

Skorzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów:

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej:

$$\cos^2 x - \sin^2 x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zapisujemy nierówność korzystając ze wzoru na [cosinus podwojonego kąta](#):

$$\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rozwiązaniem nierówności $\cos t \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ jest każda liczba t ze zbioru:

$$\left\langle -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}; \text{ zatem } x \in \left\langle -\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi \right\rangle, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność: $2 \operatorname{tg} 2x \leq 3 \operatorname{tg} x$.

Rozwiązanie

Zapiszmy założenia: $\cos 2x \neq 0, \cos x \neq 0$.

Zatem $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ i $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Korzystamy ze wzoru na [tangens podwojonego kąta](#) i zapisujemy nierówność z zadania w postaci:

$$2 \cdot \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \leq 3 \operatorname{tg} x.$$

Przenosimy wszystkie wyrażenia na jedną stronę:

$$\frac{4\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} - 3 \operatorname{tg} x \leq 0.$$

Sprowadzamy wyrażenia z lewej strony do wspólnego mianownika:

$$\frac{4\operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg} x(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1-\operatorname{tg}^2 x} \leq 0,$$

$$\frac{\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^3 x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \leq 0.$$

Dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ jest ona równoważna nierówności:

$$\operatorname{tg} x (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x) (1 - \operatorname{tg}^2 x) \leq 0$$

Podstawiamy: $t = \operatorname{tg} x$.

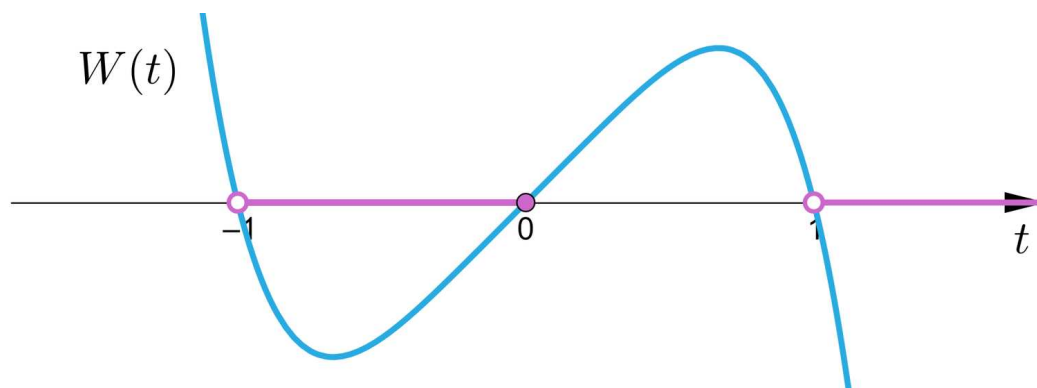
Otrzymujemy nierówność wielomianową:

$$t(1 + 3t^2)(1 - t^2) \leq 0.$$

Pierwiastkami wielomianu $W(t) = t(1 + 3t^2)(1 - t^2)$ są: 0, (-1), 1.

Zauważmy, że dla każdego t : $1 + 3t^2 > 0$.

Szkicujemy wykres wielomianu $W(t)$.



Z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności wielomianowej:

$$-1 < t \leq 0 \text{ lub } t > 1.$$

Powracając do zmiennej x otrzymujemy: $-1 < \operatorname{tg} x \leq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$\operatorname{tg} x > 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązaniem nierówności jest każda liczba ze zbioru:

$\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Słownik

sinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

cosinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

tangens podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ i $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w poniższą grę. Następnie rozwiąż nierówność z następnego polecenia.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność: $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3 \operatorname{tg} x$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Rozwiązaniem nierówności $\cos 2x > 1 - \sin x$ jest zbiór:

☐ $(2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi) \cup (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $(2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi) \cup (\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $(2k\pi, \frac{\pi}{8} + 2k\pi) \cup (\frac{7\pi}{8} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $(2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 2



Rozwiązaniem nierówności $\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \geq \operatorname{tg} 2x$ jest zbiór:

☐ $(-\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $(-\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2})$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2})$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 3



Połącz w pary nierówności, które mają to samo rozwiązanie.

$$\sin 2x \geq 2 \sin x$$

$$\cos x \leq 0$$

$$\sin 2x \leq 2 \cos x$$

$$\sin x \leq 0$$

$$\sin 2x < 5 \cos x$$

$$\sin x > 0$$

$$\sin 2x > -4 \sin x$$

$$\cos x < 0$$

Ćwiczenie 4



Wskaż wszystkie kąty x , dla których spełniona jest nierówność: $\sin x \cos x \cos 2x < \frac{1}{8}$.

☐ 5☐ 8☐ 7☐ 9☐ 4☐ 6☐ 10☐ 3

Ćwiczenie 5



Wstaw w puste pole taki przedział, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Rozwiązaniem nierówności $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x > 0$ w przedziale $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ jest zbiór .

☐ $(-\frac{\pi}{4}, 0)$

☐ $(0, \frac{\pi}{8})$

☐ $(0, \frac{\pi}{4})$

☐ $(-\frac{\pi}{8}, 0)$

Ćwiczenie 6



Wskaż rozwiązanie nierówności: $\cos 2x > \cos^2 x - 1$.

☐ $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 7



Rozwiąż nierówność: $\sin x \cos x \cos 2x < \frac{1}{8}$.

Ćwiczenie 8



Rozwiąż nierówność $\frac{1+\sin 2x}{\sin x + \cos x} > \sin x$ w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do rozwiązywania nierówności

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$, $2 \sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzory na sinus, cosinus i tangens podwojonego argumentu do rozwiązywania nierówności trygonometrycznych.
- rozwiązuje nierówności typu: $\sin x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- analiza materiału źródłowego (porównawcza);

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do rozwiązywania nierówności” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
3. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie w parach grają w grę edukacyjną. Wyniki zapisują na tablicy, wyłaniając tych, którzy zdobyli najwięcej punktów.
2. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do rozwiązywania nierówności”.