



Wykorzystanie wzoru na logarytm iloczynu i wzoru na logarytm ilorazu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Wykorzystanie wzoru na logarytm iloczynu i wzoru na logarytm ilorazu

Źródło: George Beckers, dostępny w internecie: pexels.com, domena publiczna.

Historycy twierdzą, że Luca Pacioli, szesnastowieczny włoski wędrowny nauczyciel i matematyk, odpowiedzialny jest za to, że teraz zgłębiasz tajniki przekształceń logarytmicznych. Bowiem Pacioli podobno jako pierwszy zauważył związek między wyrazami ciągu arytmetycznego a geometrycznego. Jeśli porównać wyrazy ciągu arytmetycznego i geometrycznego (np. takich ciągów, jak poniżej na rysunku), to wykładnik iloczynu dwóch wyrazów ciągu geometrycznego odpowiada sumie stojących nad nim wyrazów ciągu arytmetycznego.

0 1 2 3 4 5 6 ...

1 a a^2 a^3 a^4 a^5 a^6 ...

Nieco później, matematyk niemiecki Michael Stifel stwierdził, że odejmowanie wyrazów w ciągu arytmetycznym odpowiada dzieleniu w ciągu geometrycznym, mnożenie



Jacopo de Barbari, *Portret Luca Pacioli*

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

w pierwszym ciągu – potęgowaniu w drugim, itp.

Te obserwacje, między innymi, przyczyniły się do odkrycia wzorów na logarytm iloczynu i logarytm ilorazu. A przykładami wykorzystania tych wzorów będziemy właśnie zajmować się w tym materiale. Pokażemy zastosowanie logarytmów w obliczeniach arytmetycznych i algebraicznych (materiał nieco wykraczający poza podstawę programową).

Twoje cele

- Rozwiniesz umiejętność zamiany sumy (różnicy) logarytmów na logarytm jednomianu.
- Przekształcisz wyrażenia arytmetyczne zawierające logarytmy.
- Zapiszesz w prostszej postaci wyrażenia algebraiczne, korzystając z poznanych wzorów logarytmicznych.
- Dobierzesz odpowiednią strategię, rozwiązując nietypowe problemy matematyczne zawierające logarytmy.

Przeczytaj

W tej części materiału przeanalizujemy kilka zastosowań wzorów ułatwiających obliczenia logarytmiczne, a w szczególności wzoru na logarytm iloczynu i wzoru na [logarytm ilorazu](#).

Przypomnijmy zatem te twierdzenia.

Twierdzenie: Twierdzenie o logarytmie iloczynu

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, różną od 1, liczby x, y są liczbami dodatnimi, to:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Twierdzenie: Twierdzenie o logarytmie ilorazu

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, różną od 1, liczby x, y są liczbami dodatnimi, to:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Na początek – zastosowania logarytmów w obliczeniach rachunkowych. Dziś obliczeń z użyciem logarytmu nie wykonuje się już tak często jak kiedyś. Komputer pomnoży za nas, podzieli, znajdzie pierwiastek z niemal dowolną dokładnością. Ale jeszcze 100 lat temu wcale nie było tak łatwo podnieść do potęgi liczbę wielocyfrową lub pomnożyć kilka takich liczb. Możliwość zamiany mnożenia na dodawanie (lub dzielenia na odejmowanie) stanowiła znaczne ułatwienie pracy.

Przykład 1

Obliczymy przybliżoną wartość liczby $x = 5\sqrt[5]{1,469}$. Wynik podamy z dokładnością do 0,01.

Logarytmujemy obie strony wyrażenia (zauważmy, że $x > 0$).

$$\log x = \log\left(5\sqrt[5]{1,469}\right)$$

Korzystamy ze wzoru na [logarytm iloczynu](#) i logarytm potęgi.

$$\log x = \log 5 + \frac{1}{5} \cdot \log 1,469$$

Odczytujemy z tablic logarytmicznych (lub korzystamy z kalkulatora czy komputera) przybliżone wartości odpowiednich logarytmów.

$$\log 5 \approx 0,6990$$

$$\log 1,469 \approx 0,1670$$

Podstawiamy uzyskane liczby do zapisanej równości.

$$\log x \approx 0,6990 + \frac{1}{5} \cdot 0,1670 = 0,6990 + 0,0334 = 0,7324$$

$$\log x \approx 0,7324$$

Ponownie sięgamy do tablic logarytmicznych – teraz szukamy przybliżonej wartości x .

$$x \approx 5,40$$

Przykład 2

Obliczymy wartość wyrażenia $W = \sqrt{3,289^2 - 2,451^2}$ z dokładnością do 0,001.

Liczbę podpierwiastkową zapisujemy w postaci iloczynu, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

$$W = \sqrt{(3,289 - 2,451)(3,289 + 2,451)} = \sqrt{0,838 \cdot 5,74}$$

Logarytmujemy obie strony wyrażenia.

$$\log W = \log\left(\sqrt{0,838 \cdot 5,74}\right)$$

Korzystamy ze wzoru na logarytm iloczynu i logarytm potęgi.

$$\log W = \frac{1}{2} \cdot (\log 0,838 + \log 5,74)$$

Odczytujemy z tablic logarytmicznych (lub korzystamy z kalkulatora czy komputera) przybliżone wartości odpowiednich logarytmów.

$$\log 0,838 \approx -0,0768$$

$$\log 5,74 \approx 0,7589$$

Podstawiamy uzyskane liczby do zapisanej równości.

$$\log W \approx \frac{1}{2} \cdot (-0,0768 + 0,7589) = 0,34105$$

$$\log W \approx 0,34105$$

Ponownie sięgamy do tablic logarytmicznych – teraz szukamy przybliżonej wartości W .

$$W \approx 2,1931 \approx 2,193$$

Przykład 3

Dana jest liczba dodatnia x spełniająca warunek: $x > 1$ i $600 = 246^{\frac{1}{x-1}}$.

Wykażemy, że liczba x jest mniejsza od 2.

Podobnie, jak w poprzednich przykładach logarytmujemy obie strony rozważanej równości.

$$\log 600 = \log 246^{\frac{1}{x-1}}$$

Korzystamy ze wzoru na logarytm potęgi.

$$\log 600 = \left(\frac{1}{x-1}\right) \cdot (\log 246)$$

Mnożymy obie strony równości przez $x - 1$.

$$(x - 1) \cdot \log 600 = \log 246$$

Wykonujemy wskazane działania.

$$x \log 600 - \log 600 = \log 246$$

$$x \log 600 = \log 246 + \log 600$$

Korzystamy ze wzoru na logarytm iloczynu.

$$x \log 600 = \log 147600$$

Odczytujemy z tablic logarytmicznych (lub korzystamy z kalkulatora czy komputera) przybliżone wartości odpowiednich logarytmów.

$$x \approx \frac{5,1691}{2,7782}$$

$$x \approx 1,86 < 2$$

Poznane wzory wykorzystamy do rozwiązywania prostych równań. Zastosujemy w tym celu analizę starożytnych – złożymy, że dane równanie ma rozwiązanie i tym rozwiązaniem jest liczba x . Następnie przekształcając równanie równoważnie znajdziemy liczbę x . Na koniec sprawdzimy, czy znaleziona liczba jest rozwiązaniem równania.

Przykład 4

$$\text{Rozwiążemy równanie } \log_5(x - 2\sqrt{2}) + \log_5(x + 2\sqrt{2}) = 0.$$

Zakładamy, że istnieje liczba x spełniająca to równanie.

Przekształcamy równanie, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu i ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$\log_5(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = 0$$

$$\log_5(x^2 - 8) = 0$$

Z definicji logarytmu wynika, że $x^2 - 8 = 5^0$.

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

$$x^2 - 8 = 1$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x = -3 \text{ lub } x = 3$$

Sprawdzamy, czy liczba (-3) jest rozwiązaniem równania.

$$\log_5(-3 - 2\sqrt{2}) + \log_5(-3 + 2\sqrt{2}) = 0$$

Liczba (-3) nie spełnia równania, bo $-3 - 2\sqrt{2} < 0$, zatem $\log_5(-3 - 2\sqrt{2})$ nie istnieje.

Sprawdzamy, czy liczba 3 jest rozwiązaniem równania.

$$\log_5(3 - 2\sqrt{2}) + \log_5(3 + 2\sqrt{2}) = 0$$

$$\log_5(9 - 8) = \log_5 1 = 0$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest liczba 3 .

Szukanie liczb spełniających określone warunki w wyrażeniach zapisanych za pomocą logarytmów, nie zawsze jest łatwe. W niektórych przypadkach może prowadzić do rozwiązywania równań kwadratowych, a nawet równań wyższych stopni.

Przykład 5

Znajdziemy wszystkie liczby x spełniające warunek $\log \sqrt{x-1} - \log x = \log \frac{2}{5}$.

Rozwiązanie zadania w istocie prowadzi do rozwiązania równania logarytmicznego. Określimy najpierw dziedzinę tego równania.

$$x - 1 \geq 0, x > 0, \sqrt{x-1} > 0, \text{ stąd } D = (1, \infty).$$

Przekształcamy równanie do najprostszej postaci, korzystając z poznanych wzorów.

$$\log \sqrt{x-1} = \log x + \log \frac{2}{5}$$

$$\log \sqrt{x-1} = \log \frac{2}{5}x$$

Z różnowartościowości funkcji logarytmicznej wynika, że liczby logarytmowane muszą być równe.

$$\sqrt{x-1} = \frac{2}{5}x$$

Obie strony uzyskanego równania są dodatnie, zatem możemy podnieść je do kwadratu.

$$|x-1| = \frac{4}{25}x^2$$

Ponieważ $x > 1$, otrzymujemy:

$$x-1 = \frac{4}{25}x^2$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$\frac{4}{25}x^2 - x + 1 = 0 \quad | \cdot 25$$

$$4x^2 - 25x + 25 = 0$$

$$\Delta = 625 - 400 = 225 > 0$$

$$x = \frac{25-15}{8} = \frac{5}{4} \text{ lub } x = \frac{25+15}{8} = 5$$

Obie uzyskane liczby są większe od 1 – należą więc do dziedziny równania.

Odpowiedź:

Szukane liczby to $\frac{5}{4}$ i 5.

Słownik

twierdzenie o logarytmie iloczynu

jeżeli a jest liczbą dodatnią, różną od 1, liczby x, y są liczbami dodatnimi, to:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

twierdzenie o logarytmie ilorazu

jeżeli a jest liczbą dodatnią, różną od 1, liczby x, y są liczbami dodatnimi, to:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Rozwiąż najpierw samodzielnie podane przykłady, a następnie porównaj z prezentowanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D19Gze9qk>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego wykorzystania wzoru na logarytm iloczynu i wzoru na logarytm ilorazu

Polecenie 2

Rozwiąż równanie zapisane w Przykładzie 2 animacji, sprowadzając najpierw to równanie do najprostszej postaci, a dopiero następnie logarytmując. Przyjmij $\log 5 \approx 0,7$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jeśli $a = \sqrt[6]{0,2}$, to:

☐ $\log a = -\frac{1}{6} \cdot \log 0,04$

☐ $\log a = \frac{1}{3} \cdot \log 5$

☐ $\log a = -\frac{1}{6} \cdot \log 5$

☐ $\log a = \frac{1}{6} \cdot \log 0,04$

Ćwiczenie 2



Równanie równoważne równaniu $30^{x-2} = 10^x$, to:

☐ $x = \frac{2 \cdot \log 30}{\log 30 - 1}$

☐ $x = \frac{\log 30}{\log 30 + 1}$

☐ $x = \frac{2 \cdot \log 30}{\log 30 + 1}$

☐ $x = \frac{\log 30}{\log 30 - 1}$

Ćwiczenie 3



Połącz równanie z liczbą spełniającą to równanie.

$$\log x^2 = 0$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$\log_3(x^2 + 9) = 2$$

$$x = 1$$

$$\log(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$\log_3(x + 1) = 1$$

$$x = 2$$

Ćwiczenie 4

Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Warunek $\log_2 t^2 = 4$ spełnia liczba $t = 2$.	☐	☐
Jeśli $\log(t^2 - 6) = 0$, to $t = \sqrt{6}$ lub $t = -\sqrt{6}$.	☐	☐
Nie istnieje liczba rzeczywista t spełniająca warunek $\log_5(5 + t^2) = 2$.	☐	☐
Jeśli $\log(t^2 - 143) = 0$, to t jest liczbą całkowitą.	☐	☐

Ćwiczenie 5



Oszacuj wartość każdej z liczb A, B, C, D , wpisując w puste miejsca dwie kolejne liczby całkowite.

$$A = \log 8 + \log 3 - \log 4, \quad \boxed{} < A < \boxed{}$$

$$B = \frac{\log 1296}{\log 5 + \log 2}, \quad \boxed{} < B < \boxed{}$$

$$C = \log 400 - \log 40 - \log 20, \quad \boxed{} < C < \boxed{}$$

$$D = \log 6^2 - 3 \cdot \log 3 + \log 9000, \quad \boxed{} < D < \boxed{}$$

Ćwiczenie 6



Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie liczby.

Wartość funkcji $f(x) = 2x - 1$ dla argumentu $x = \log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{8}$ jest równa

Wartość wyrażenia $\log(x + 1) + \log(1 + x)^2$ jest równa 3, zatem liczba x jest równa

Jeśli wartość wyrażenia $\log[\sqrt{x} \cdot (2x - 1)] - \log \frac{7}{x+1}$ jest równa to $x = 4$.

-1	-9	-3	1	0	3	9
----	----	----	---	---	---	---

Ćwiczenie 7



Liczby a, b, c są dodatnie. Zapisz podane wyrażenie w postaci logarytmu jednomianu.

$$W = \log \sqrt[3]{a^2} - \log a^{-\frac{1}{3}} bc^3 + 2 \cdot \log c \sqrt{b} - 1 + \log 10c.$$

Ćwiczenie 8



Wykaż, że jeśli $9^{x-1} = 100$ to $x = 1 + \frac{1}{\log 3}$.

Ćwiczenie 9



Zaznacz prawidłowy wynik dla następującego działania:

$$\log_3 4 - \log_3 2 =$$

☐ $\log_3 4$

☐ $\log_3 6$

☐ $\log_3 8$

☐ $\log_3 2$

Ćwiczenie 10



Zaznacz prawidłowy wynik dla następującego działania:

$$\log_3 81 \cdot \log_4 64 =$$

☐ 16

☐ 12

☐ 10

☐ 9

Ćwiczenie 11



Zaznacz prawidłowy wynik dla następującego działania:

$$\log_2 3 + \log_2 3 =$$

☐ $\log_8 9$

☐ $\log_2 6$

☐ $\log_8 3$

☐ $\log_2 9$

Ćwiczenie 12



Zaznacz prawidłowy wynik dla następującego działania:

$$\log_4 2 - \log_4 32 - 6 \cdot \log_4 1 =$$

☐ $\frac{1}{2}$

☐ -2

☐ 4

☐ 2

Ćwiczenie 13



Zaznacz prawidłowy wynik dla następującego działania:

$$\log_3 54 =$$

☐ $3 + \log_3 2$

☐ $4 + \log_3 \frac{1}{2}$

☐ $2 + \log_3 6$

☐ $1 + \log_3 18$

Ćwiczenie 14



Wskaż równość prawdziwą.

☐ $\log_6 3 = 2 + \log_6 12$

☐ $\log_6 18 = 2 + \log_6 2$

☐ $\log_6 72 = 2 + \log_6 3$

☐ $\log_6 144 = 2 + \log_6 4$

Ćwiczenie 15



Uporządkuj rosnąco podane liczby.

$$\log_2 \frac{3}{4} + \log_2 \frac{32}{3}$$



$$\log_3 \frac{4}{9} - 2 \cdot \log_3 2$$



$$\log_2 \frac{1}{6} + \log_2 96$$



$$2 \cdot \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 4$$



Ćwiczenie 16



Połącz w pary równe liczby.

$$\log 800 - 3 \cdot \log 2$$

4

$$\log_2 48 - \log_2 3$$

2

$$6 \cdot \log_4 2 - 2 \cdot \log_4 1$$

5

$$\log_3 \frac{243}{6} - \log_3 \frac{1}{6}$$

3

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie wzoru na logarytm iloczynu i wzoru na logarytm ilorazu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwija umiejętność zamiany sumy (różnicy) logarytmów na logarytm jednomianu
- przekształca wyrażenia arytmetyczne zawierające logarytmy
- zapisuje w prostszej postaci wyrażenia algebraiczne, korzystając z poznanych wzorów logarytmicznych
- dobiera odpowiednią strategię, rozwiązując nietypowe problemy matematyczne zawierające logarytmy

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- ocena ważona
- technika kruszenia

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie techniką oceny ważonej przypominają sobie w parach poznane twierdzenia, wzory, pomocne w przekształcaniu wyrażeń zawierających logarytmy. Ustalenia zamieszczają na hierarchicznym grafie, który powinien obrazować powiązania między wzorami. Np. wzór na logarytm ilorazu może wynikać ze wzoru na logarytm iloczynu, wzór na logarytm potęgi naturalnej ze wzoru na logarytm potęgi o wykładniku rzeczywistym, itp.
2. Wybrany uczeń omawia efekty pracy swoje i osoby, z którą pracował, pozostali uczniowie ewentualnie korygują wypowiedź lub przedstawiają inne pomysły.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach techniką kruszenia, rozważając przykłady zapisane w sekcji „Przeczytaj”. Po przeczytaniu treści przykładu, ustalają z czego mogą wynikać problemy w rozwiązaniu danego zadania. Zastosowanie tej techniki pozwala na analizę danego problemu z innego punktu widzenia i ułatwia poszukiwanie alternatywnych rozwiązań. Po omówieniu w ten sposób zadania, uczniowie w każdym przypadku ustalają, co należy zrobić, aby wyeliminować trudności, które mogą się pojawić, co należy wiedzieć i jakie wzory zastosować.
2. Następnie porównują swoje przypuszczenia z proponowanym rozwiązaniem.
3. Przykłady pokazane w sekcji Animacja rozwiązują samodzielnie, sprawdzając odpowiedzi z zamieszczonymi w animacji.

Faza podsumowująca:

1. W ramach podsumowania zajęć uczniowie wspólnie wypracowują algorytm rozwiązania prostego równania logarytmicznego (umiejętności rozwiązywania równań

logarytmicznych nie ma zapisanej w podstawie programowej, ale umiejętność ta jest pomocna np. przy omawianiu własności funkcji logarytmicznej lub przy zastosowaniach tej funkcji).

2. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Działania na logarytmach – Przykłady](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako wstęp do zajęć utrwalających wiadomości na temat logarytmów.