Wysokości w trójkącie

Źródło: Carlos Aranda, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Czy wysokości wyznaczają trójkąt?

Przez pytanie postawione w tytule należy rozumieć oczywiście zagadnienie wykonalności konstrukcji trójkąta, w którym wysokości byłyby równe zadanym trzem odcinkom. Powszechnie wiadomo, że mając trzy dane odcinki możemy, w sposób jednoznaczny, zbudować trójkąt, w którym te odcinki są bokami. Taka konstrukcja jest wykonalna, o ile taki trójkąt istnieje tzn. o ile spełniona jest nierówność trójkąta. Z konstrukcją trójkąta, w którym dane trzy odcinki są wysokościami, jest większy problem, ale między innymi o tym przeczytacie w tym materiale.

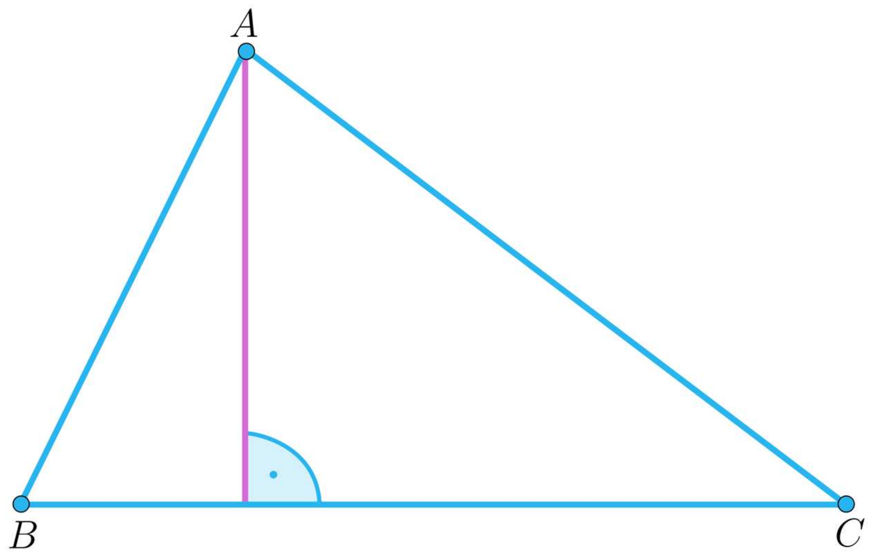
Twoje cele

- Usystematyzujesz wiadomości o wysokościach w trójkącie.
- Skonstruujesz trójkąt o danych wysokościach.
- Zbadasz zależności między bokami i wysokościami w trójkącie.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Definicja: Wysokość trójkąta

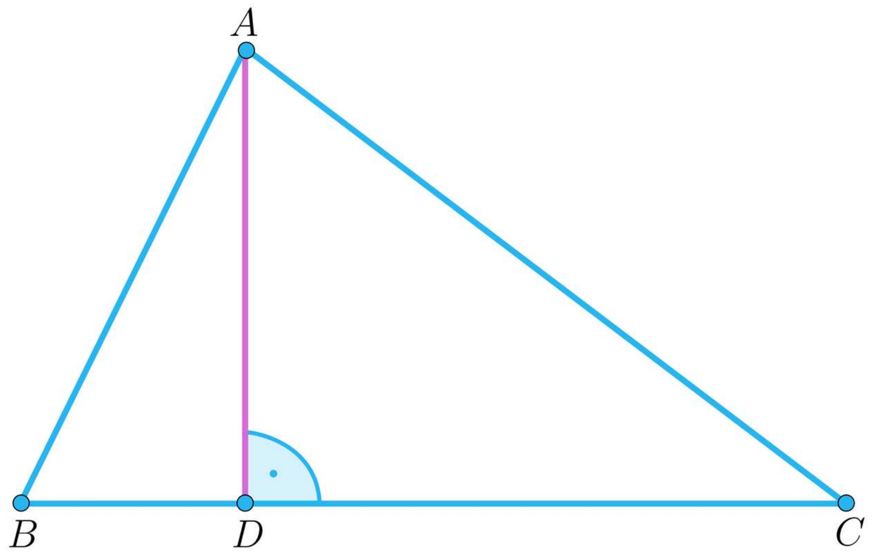
Niech A będzie wierzchołkiem trójkąta ABC. Najkrótszy z odcinków łączących wierzchołek A trójkąta z prostą BC zawierającą przeciwległy bok nazywamy wysokością trójkąta poprowadzoną z tego wierzchołka.



Wysokość trójkąta

Definicja: Spodek wysokości

Niech D będzie punktem wspólnym wysokości poprowadzonej z wierzchołka A i prostej BC. Wówczas punkt D będziemy nazywać spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A.

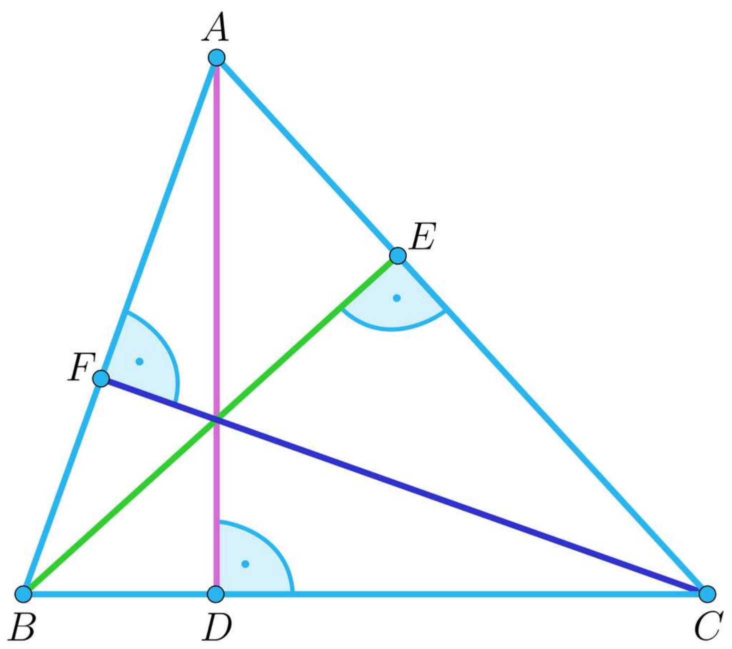


Bezpośrednio z definicji i własności prostej prostopadłej wynika poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: O wysokości trójkąta

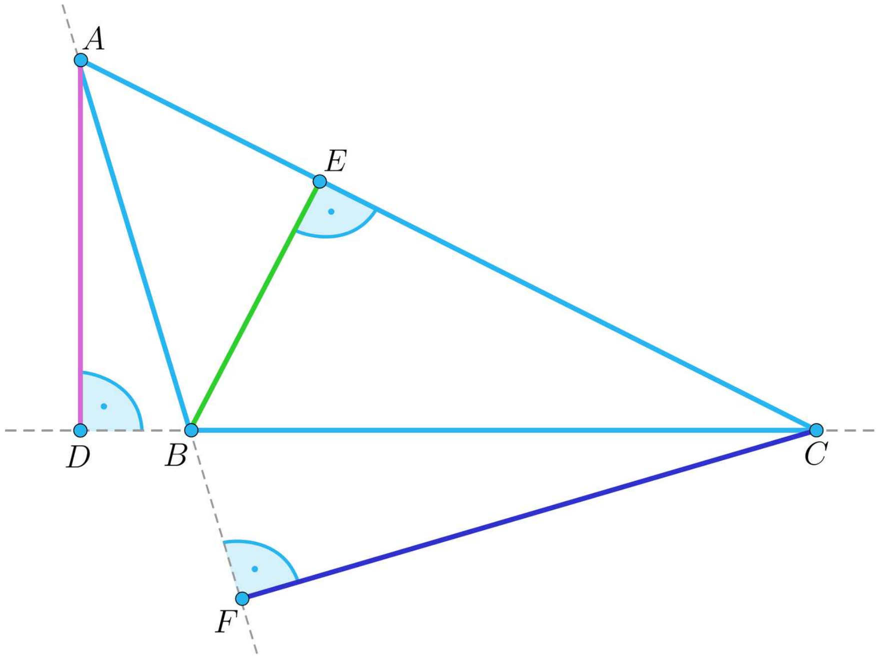
Wysokość trójkąta jest prostopadła do prostej zawierającej spodek tej wysokości.

Dla danego trójkąta możemy wyznaczyć trzy jego wysokości, poprowadzone z każdego z jego wierzchołków, jak na rysunku.



Wysokości trójkąta ostrokątnego

Każdy ze spodów wysokości poprowadzonych w trójkącie ostrokątnym, jak na powyższym rysunku, leży na przeciwległym boku trójkąta. Inaczej jest w przypadku trójkąta rozwartokątnego.



Wysokości trójkąta rozwartokątnego

Zauważmy, że dwa spośród spodków wysokości – te, które poprowadzono z wierzchołków kątów ostrych w trójkącie ABC, leżą poza bokami trójkąta, a tylko spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta rozwartego leży na przeciwległym boku trójkąta.

Pozostaje nadmienić, że w przypadku trójkąta prostokątnego wysokości poprowadzone z wierzchołków kątów ostrych pokrywają się z przyprostokątnymi tego trójkąta, a ich spodki wysokości pokrywają się z wierzchołkiem kąta prostego w tym trójkącie.

Zamiast mówić o wysokości poprowadzonej z wierzchołka A niekiedy mówi się o wysokości poprowadzonej na bok BC lub na podstawę BC trójkąta (w konsekwencji na podstawę AC lub AB).

Wzór Herona dla wysokości trójkąta

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c możemy wyrazić poprzez wzór Herona:

$$P = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2}}$$

Jeśli teraz przez h_a, h_b, h_c oznaczymy odpowiednio wysokości tego trójkąta, to wówczas możemy zapisać:

$a = \frac{2P}{h_a}, b = \frac{2P}{h_b}, c = \frac{2P}{h_c}$.

Podstawiając te wielkości do wzoru zapisanego wcześniej dostajemy:

$$P=\sqrt{P^4\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)}$$

Stąd

$$\frac{1}{P}=\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)}$$

co oznacza, że pole trójkąta o danych wysokościach jest wyznaczone jednoznacznie.

Przykład 1

Rozważmy teraz trójkąt ABC, w którym wysokości mają odpowiednio długości: $12, 15, 20$. Pominiemy na razie zagadnienie istnienia takiego trójkąta, o czym będzie mowa poniżej, a zajmiemy się wyznaczeniem długości boków tego trójkąta.

Możemy skorzystać ze wzoru Herona w wersji z wysokościami:

$$\frac{1}{P}=\sqrt{\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}\right)\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}-\frac{1}{20}\right)\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{15}+\frac{1}{20}\right)\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}\right)}=\frac{1}{150}$$

Zatem $a=\frac{2P}{h_a}=\frac{300}{12}=25, b=\frac{300}{15}=20, c=\frac{300}{20}=15$.

Nietrudno zauważyć, że jest to trójkąt Pitagorejski.

Istnienie trójkąta o danych wysokościach

W Przykładzie 1. wyznaczyliśmy boki trójkąta o danych wysokościach. Nietrudno sprawdzić, że istotnie trójkąt, którego boki mają długości $a=15, b=20, c=25$, ma wysokości odpowiednio równe $h_a=20, h_b=15, h_c=12$.

Rozważmy teraz trzy odcinki o długości $5, 10, 12$. Rozstrzygniemy, czy istnieje trójkąt, którego wysokości byłyby równe odpowiednim długościom danych odcinków?

Przypuśćmy, że pole danego trójkąta jest równe P, a jego boki mają długości a, b, c, gdzie $a\le b\le c$.

Oczywiście warunek trójkąta można zapisać sumując długości dwóch dowolnych boków i porównując z długością trzeciego boku, ale pamiętamy, że wystarczy porównać sumę dwóch z długością boku najdłuższego – przy założeniu $a\le b\le c$ będziemy badać zależność $a+b>c$. Ale warunek trójkąta $a+b>c$ można zapisać w postaci $\frac{2P}{h_a}+\frac{2P}{h_b}>\frac{2P}{h_c}$, czyli $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}>\frac{1}{h_c}$.

Łatwo zauważyć, że wysokość poprowadzona na najdłuższy z boków jest najkrótsza. Dlatego otrzymaną nierówność trójkąta dla wysokości równych odpowiednio $5, 10, 12$ zapiszemy w postaci $\frac{1}{12}+\frac{1}{10}>\frac{1}{5}$.

Po doprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymujemy, że $\frac{5}{60} + \frac{6}{60} > \frac{12}{60}$, ale ta nierówność jest sprzeczna. Oznacza to, że taki trójkąt nie istnieje.

Pozostaje zauważyć, że swoistym kryterium istnienia trójkąta, w którym wysokości miałyby określone długości jest zbadanie wyrażenia, które jest pod pierwiastkiem we wzorze

$$\frac{1}{P} = \sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)}$$

gdyby nierówność trójkąta miała nie być spełniona, to dany iloczyn będzie miał wartość ujemną. Ale ze względu na złożoność obliczeniową, kryterium to wydaje się być mało efektywne.

Przykład 2

Rozważmy teraz trójkąt ABC, w którym dwie wysokości mają odpowiednio długości: $h_a = 12$, $h_b = 15$. Rozstrzygniemy, jaką długość może osiągnąć trzecia z wysokości tego trójkąta – oznaczmy ją przez h_c.

Przypuśćmy, że $h_c < 12$. Wtedy nierówność trójkąta dla wysokości przyjmuje postać $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} > \frac{1}{h_c}$.

Stąd $\frac{9}{60} > \frac{1}{h_c}$, czyli $h_c > 6\frac{2}{3}$.

Przypuśćmy teraz, że $h_c \geq 12$.

Wtedy nierówność trójkąta dla wysokości przyjmuje postać $\frac{1}{h_c} + \frac{1}{15} > \frac{1}{12}$.

Stąd $\frac{15+h_c}{15h_c} > \frac{1}{12}$, czyli $h_c < 60$.

Otrzymujemy więc, że $6\frac{2}{3} < h_c < 60$.

Konstrukcja trójkąta o danych wysokościach

Przypuśćmy, że mamy dane trzy odcinki o długościach h_a, h_b, h_c takie, że $h_a \leq h_b \leq h_c$.

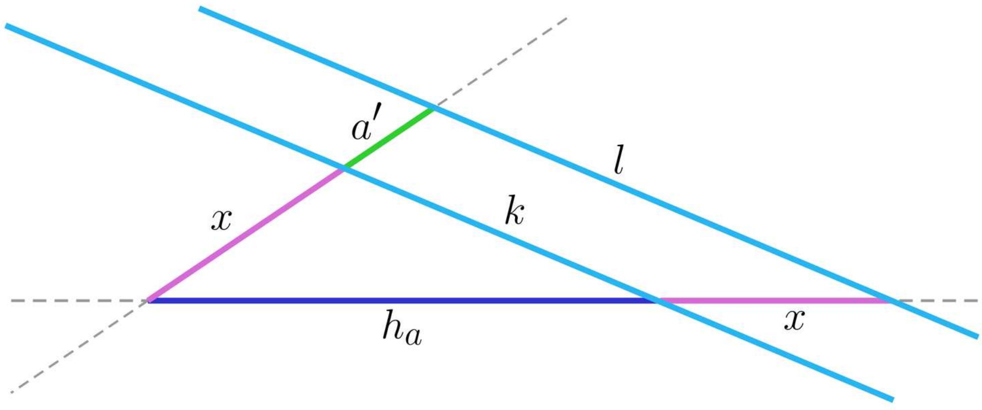
Naszym zadaniem jest opis konstrukcji trójkąta, którego wysokości są równe danym odcinkom. Z wcześniejszych rozważań wynika, że warunkiem istnienia takiego trójkąta jest spełnienie warunku $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} > \frac{1}{h_a}$.

Niech a, b, c oznaczają długości odpowiednich boków trójkąta. Wtedy mamy w szczególności, że $\frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b$.

Stąd $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$. Analogicznie $\frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a}$ oraz $\frac{c}{b} = \frac{h_b}{h_c}$.

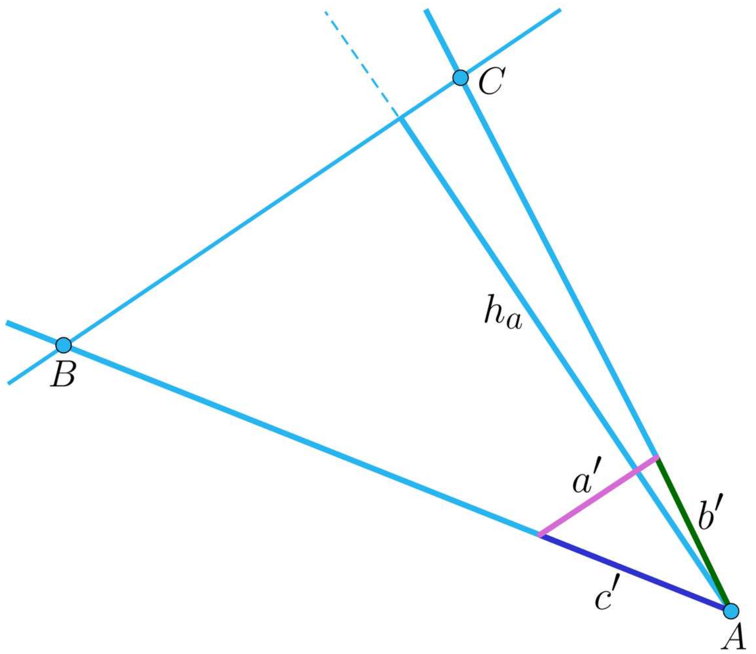
Opis konstrukcji:

1. Weźmy dowolny niezerowy odcinek o długości x.
2. Konstruujemy odcinek a' taki, że $\frac{a'}{x} = \frac{x}{h_a}$, jak na rysunku.



Konstrukcja boku trójkąta o danych wysokościach

3. Analogicznie konstruujemy odcinki b', c' takie, że $\frac{b'}{x} = \frac{x}{h_b}$ oraz $\frac{c'}{x} = \frac{x}{h_c}$.
4. Konstruujemy trójkąt o bokach długości a', b', c'. Ponieważ $a' = \frac{x^2}{h_a}$, $b' = \frac{x^2}{h_b}$ oraz $c' = \frac{x^2}{h_c}$, więc $\frac{a'}{b'} = \frac{\frac{x^2}{h_a}}{\frac{x^2}{h_b}} = \frac{h_b}{h_a}$, $\frac{a'}{c'} = \frac{\frac{x^2}{h_a}}{\frac{x^2}{h_c}} = \frac{h_c}{h_a}$ oraz $\frac{c'}{b'} = \frac{\frac{x^2}{h_c}}{\frac{x^2}{h_b}} = \frac{h_b}{h_c}$. Oznacza to, że trójkąt o bokach długości a', b', c' jest podobny do szukanego trójkąta.
5. Pozostaje na półprostej zawierającej jedną z wysokości trójkąta a', b', c' odłożyć odpowiednią wysokość szukanego trójkąta. Bez zmniejszenia ogólności możne to być wysokość poprowadzona na bok a' – wówczas na półprostej odkładamy odcinek h_a w taki sposób, że jeden z jej końców pokrywa się z wierzchołkiem trójkąta a', b', c' – będzie to wierzchołek A szukanego trójkąta. Przez drugi koniec tej wysokości prowadzimy prostą równoległą do a', aż do przecięcia z przedłużeniami boków b' i c', a otrzymane punkty przecięcia są wierzchołkami B, C szukanego trójkąta.



Konstrukcja trójkąta o danych wysokościach

Słownik

wzór Herona

wzór pozwalający obliczyć pole trójkąta znając długości jego trzech boków

trójkąt Pitagorejski

trójkątem Pitagorejskim nazywamy trójkąt prostokątny, w którym długości boków są liczbami naturalnymi

Aplet

Polecenie 1
Uruchom aplet. Ustal położenie wierzchołków trójkąta tak, aby trójkąt był ostrokątny, prostokątny lub rozwartokątny. Zastanów się, gdzie leżą spodki wysokości trójkąta. Wybierz polecenie „wysokości” i sprawdź swoje przypuszczenia. Następnie określ położenie punktu wspólnego wysokości danego trójkąta w zależności od miar kątów wewnętrznych trójkąta. Wybierz polecenie „ortocentrum” i sprawdź swoje przypuszczenia.

☐ Wysokości

☐ Ortocentrum

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D7L1IjFpi

Polecenie 2
Znajdź takie położenie wierzchołków trójkąta, dla których wysokości mają długości odpowiednio równe $h_a = h_b = 2, h_c = 5$.

Polecenie 3
Znajdź możliwie najdokładniejsze oszacowanie długości, jaką może osiągać trzecia wysokość trójkąta, jeżeli dwie pozostałe są odpowiednio równe: $h_a = 2, h_c = 5$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

W trójkącie prostokątnym, w którym $h_a > h_b > h_c$ mamy dane: $h_b = 5$, $h_a = 12$. Wyznacz długość wysokości h_c tego trójkąta.

Ćwiczenie 2

W trójkącie prostokątnym, wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 2, a jedna z pozostałych wysokości ma długość 3. Oblicz długość trzeciej wysokości tego trójkąta.

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Zaznacz poprawną odpowiedź. W trójkącie o wysokościach h_a, h_b, h_c mamy dane $h_a = \frac{1}{2}$, $h_b = \frac{1}{3}$, $h_c = \frac{1}{4}$. Pole tego trójkąta jest równe:

- $\frac{\sqrt{455}}{144}$
- $\frac{144}{\sqrt{455}}$
- $\frac{1}{\sqrt{135}}$
- $\sqrt{135}$

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

W trójkącie ostrokątnym o bokach długości a, b, c i wysokościach odpowiednio h_a, h_b, h_c mamy dane $h_a = 3$, $h_b = 4$, $c = 6$. Oblicz pole tego trójkąta.

Ćwiczenie 7

Przeprowadź konstrukcję trójkąta mając dane: podstawę $AB = c$, wysokość $CP = h_c$ i kąt α, jaki środkowa CQ tworzy z bokiem AC.

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wysokości w trójkącie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna i stosuje podstawowe konstrukcje geometryczne
- zna i stosuje pojęcie wysokości trójkąta
- zna i stosuje nierówność trójkąta
- konstruuje i sprawdza istnienie trójkąta, dla którego dane trzy odcinki są wysokościami
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie i metody nauczania:

- konstruktywizm
- dyskusja

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie zagadnienia trójkąta o danych trzech bokach i nierówności trójkąta, jako warunku koniecznego wykonalności takiej konstrukcji. Następnie prosi o przypomnienie wzoru Herona.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie pojęcia wysokości w trójkącie. Pokazuje różne możliwości zdefiniowania tego pojęcia i proponuje zapisanie jednej definicji. Uczniowie wyznaczają spodki wysokości w różnych trójkątach i ustalają kryteria ich położenia w zależności od rodzaju trójkąta. Następnie poleca uruchomić dołączony Aplet Geogebry i wykonać zamieszczone w nim polecenia.
2. Nauczyciel zapisuje wzór Herona i prosi o wyprowadzenie jego odpowiednika dla wysokości trójkąta. Następnie uczniowie stosują wyprowadzony wzór do rozwiązania problemu opisanego w Przykładzie 1.
3. Nauczyciel prosi o zapisanie nierówności trójkąta, a następnie o wyprowadzenie jego odpowiednika dla wysokości trójkąta. Uczniowie pod kierunkiem nauczyciela rozwiązują w parach postawiony problem istnienia trójkąta, a następnie omawiają wspólnie efekty pracy i rozwiązują zagadnienie opisane w Przykładzie 2.
4. Nauczyciel prezentuje zagadnienie konstrukcji trójkąta o danych wysokościach. Wcześniej nauczyciel dobiera odpowiednio długości odcinków tak, by konstrukcja była możliwa. Wybrani uczniowie wykonują konstrukcję na tablicy lub przy użyciu aplikacji komputerowej.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć. Zachęca uczniów do rozwiązania zadania 6. metodą wykorzystania wzoru Herona dla wysokości.

Materiały pomocnicze:

Wysokość trójkąta

Wskazówki metodyczne:

Aplet można wykorzystać w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można go również wykorzystać przy realizacji tematu o ortocentrum trójkąta.