Zadania optymalizacyjne z kontekstem realistycznym, które można rozwiązać korzystając z własności funkcji kwadratowej

Zadania optymalizacyjne z kontekstem realistycznym, które można rozwiązać korzystając z własności funkcji kwadratowej

Źródło: dostępny w internecie: analogicus z Pixabay, domena publiczna.

Budując plaster miodu pszczoły używają sześciokątnych „klocków”. W 1999 dr Thomas Hales wykazał, że jest to metoda optymalna, tj. że mając do dyspozycji określaną ilość budulca, uformowanie sześciennych komórek w plastrze miodu zapewnia maksymalną ich pojemność. W tym materiale zajmiemy się tego typu problemami, które można rozwiązać z wykorzystaniem własności funkcji kwadratowej.

Twoje cele

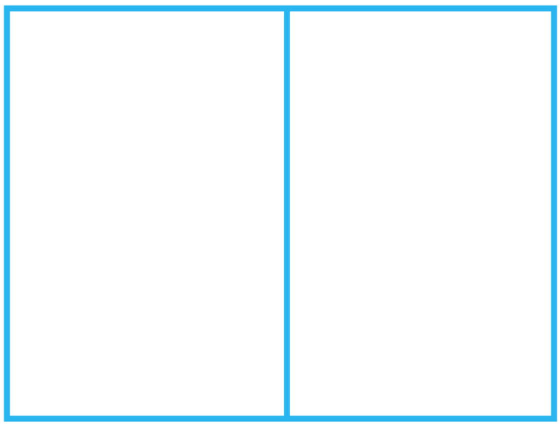
- Wyznaczysz współrzędne wierzchołka funkcji kwadratowej.
- Na podstawie własności funkcji kwadratowej i jej wykresu rozwiążesz zadania optymalizacyjne z kontekstem praktycznym.

Przeczytaj

Poniżej prześledzimy sposób rozwiązania kilku zadań optymalizacyjnych. Schemat postępowania jest zawsze taki sam – korzystając z danych zadania uzależniamy jedną niewiadomą od drugiej a następnie rozważamy funkcję jednej zmiennej. W tym materiale rozważamy tylko zadania, które można rozwiązać korzystając z własności funkcji kwadratowej.

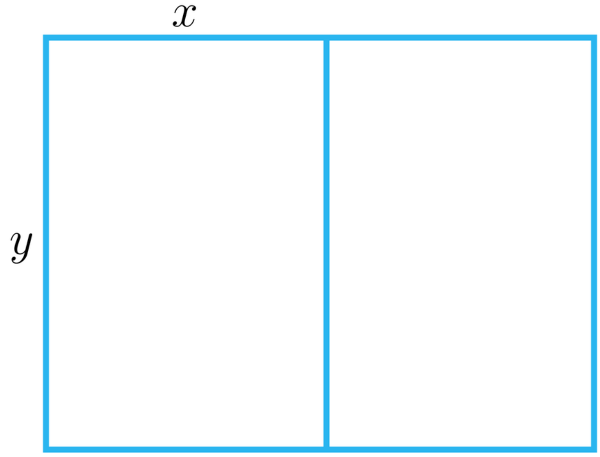
Przykład 1

Hodowca koni zamierza zbudować ogrodzenie ograniczające dwa jednakowe prostokątne boksy (patrz rysunek). Właściciel koni zakupił materiały pozwalające zbudować ogrodzenie o łącznej długości 60 m i chce, aby powierzchnia boksów była możliwie największa. Wyznaczymy wymiary każdego boksu.



Rozwiązanie:

Oznaczmy:

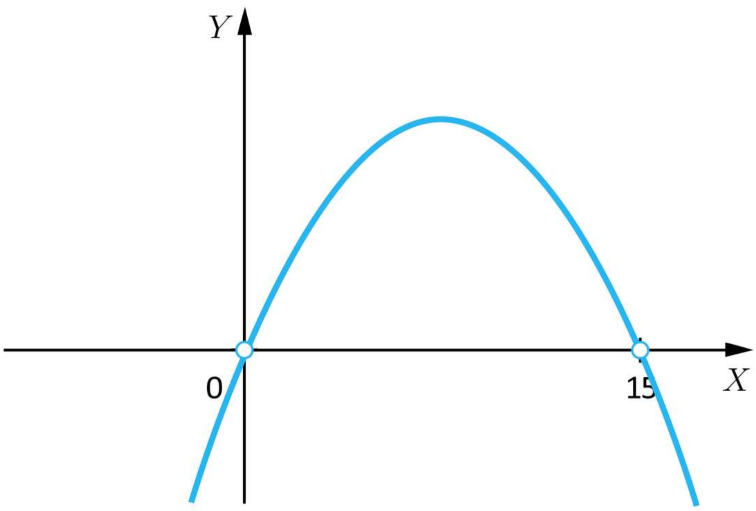


Zapiszmy równanie wynikające z długości ogrodzenia boksów $4x + 3y = 60$.
Wyznaczymy jedną zmienną $y = 20 - \frac{4}{3}x$. Pole dwóch prostokątów wynosi

$$P(x) = 2x\left(20 - \frac{4}{3}x\right)$$

Długości boków muszą być liczbami dodatnimi, więc dziedziną funkcji P jest zbiór $D = (0, 15)$

Naszkicujemy wykres tej funkcji. Jest to funkcja kwadratowa, współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny, więc ramiona paraboli skierowane są w dół.



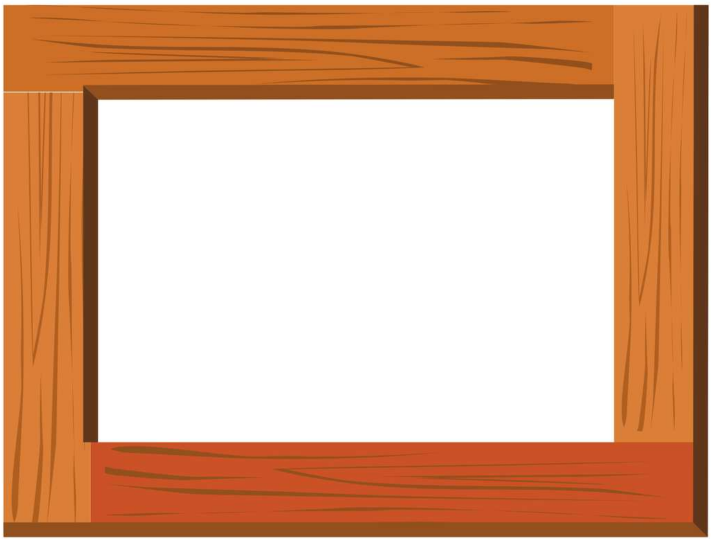
Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli x_w, jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych, zatem $x_w = \frac{0+15}{2} = 7,5\ \text{cm}$. Zauważmy, że należy do dziedziny funkcji, zatem funkcja przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli. Wyznaczymy $y = 20 - \frac{4}{3}x = 20 - \frac{4}{3} \cdot 7,5 = 10\ \text{cm}$.

Odpowiedź:

Wymiary każdego boksu wynoszą $7,5\ \text{cm} \times 10\ \text{cm}$.

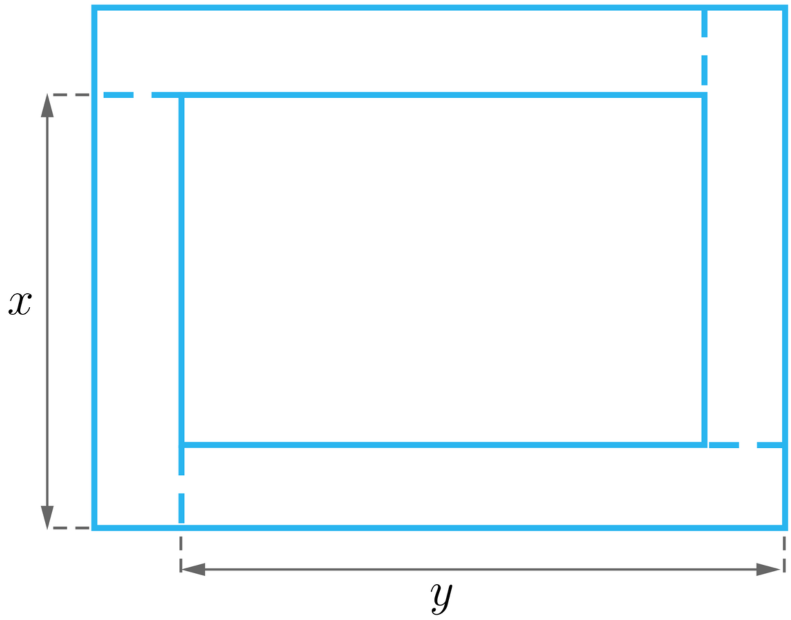
Przykład 2

Drewnianą listwę o długości $0,8\ \text{m}$ i szerokości $4\ \text{cm}$ należy pociąć na takie cztery części, aby po ich sklejeniu (zobacz rysunek) otrzymać ramę, w którą można oprawić obraz. Wyznaczymy maksymalne pole powierzchni obrazu, który może być oprawiony w tak zbudowaną ramę.



Rozwiązanie:

Oznaczmy:



Znając długość listwy możemy zapisać równanie $2x + 2y = 80$ cm. Wyznaczmy jedną zmienną $y = 40 - x$. Pole obrazu

$P = (x - 4)(y - 4)$

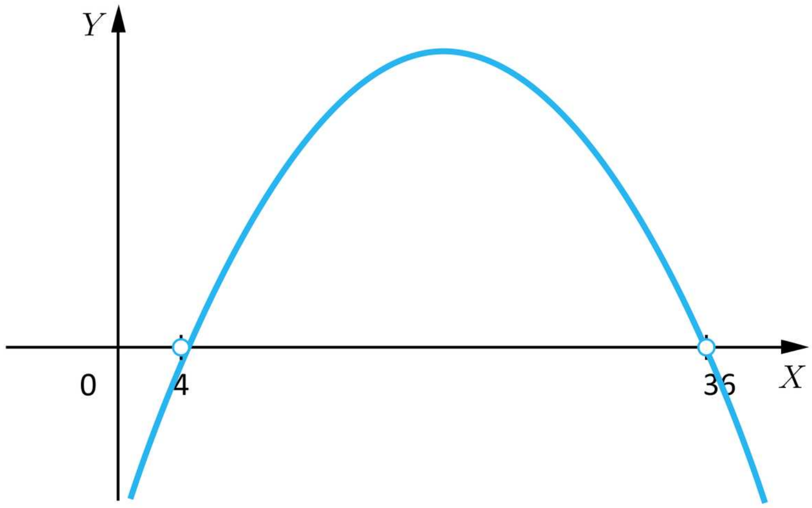
Podstawiając za $y = 40 - x$ otrzymujemy funkcję wyrażającą pole obrazu

$P(x) = (x - 4)(36 - x)$

Biorąc pod uwagę, że długości boków muszą być liczbami dodatnimi, wyznaczamy dziedzinę funkcji P.

$D = (4, 36)$

Naszkicujemy wykres funkcji, współczynnik przy najwyższej potędze jest ujemny, więc ramiona paraboli skierowane są w dół.

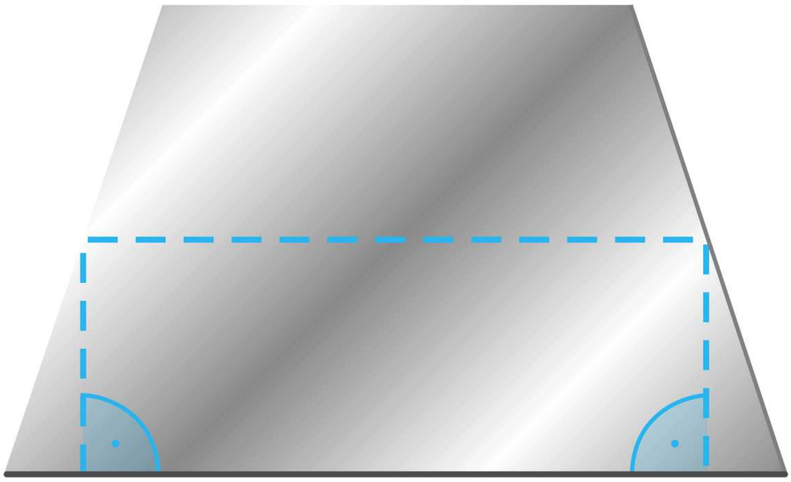


Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli x_w, jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych, zatem $x_w = \frac{4+36}{2} = 20 \text{ cm}$. Zauważmy, że należy do dziedziny funkcji, zatem funkcja przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli. Wyznaczymy $y = 40 - x = 40 - 20 = 20 \text{ cm}$. Maksymalne pole powierzchni obrazu wynosi

$P(20) = (20 - 4)(36 - 20) = 256 \text{ cm}^2$.

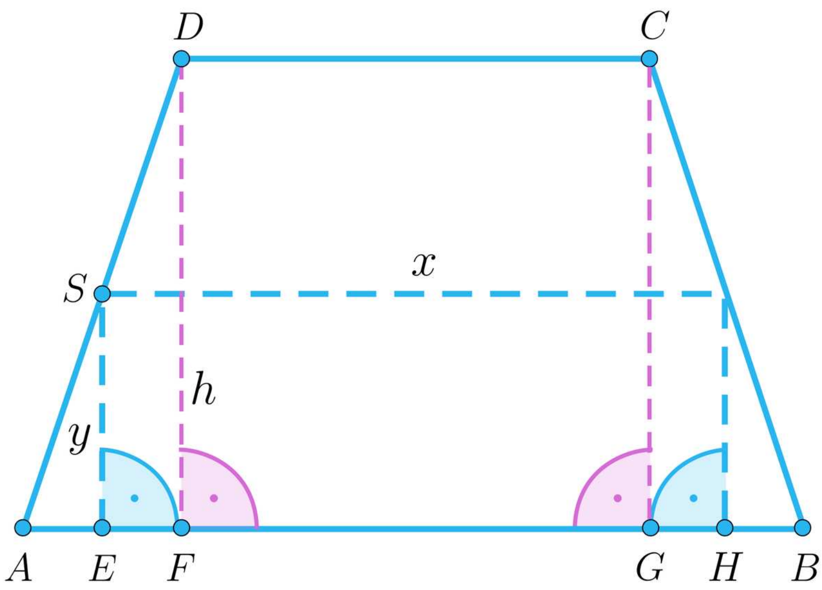
Przykład 3

Z kawałka blachy w kształcie trapezu równoramiennego o polu 3 m^2 i podstawach długości 80 cm i 220 cm należy wyciąć prostokąt o maksymalnym polu (zobacz rysunek). Wyznaczymy wymiary wyciętego prostokąta.



Rozwiązanie:

Oznaczmy:



Z polecenia wiemy, że $|AB| = 2,2$ m oraz $|CD| = 0,8$ m. Ze wzoru na pole trapezu wyznaczymy jego wysokość.

$P = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$

Podstawiamy $3 = \frac{3\cdot h}{2}$, stąd $h = 2$ m. W związku z tym, że $|CD| = |FG|$ oraz trapez jest równoramienny to $|AF| = |GB| = 0,7$ m. Przyjmując, że $|EH| = x$ mamy $\left|AE\right| = \frac{2,2-x}{2}$. Trójkąt SAE oraz DAF są podobne, cecha *bkb*. Zapisujemy

$\frac{h}{y} = \frac{|AF|}{|AE|}$

Wyznaczając y otrzymujemy

$y = \frac{h \cdot |AE|}{|AF|} = \frac{2{,}2 - x}{0{,}7}$

Następnie wyznaczamy pole prostokąta jako funkcję zmiennej x. Skoro $P = xy$, to

$P(x) = \frac{10}{7}x(2,2 - x)$

Biorąc pod uwagę, że długości boków muszą być dodatnie określamy, że dziedziną jest zbiór $D = (0; 2,2)$

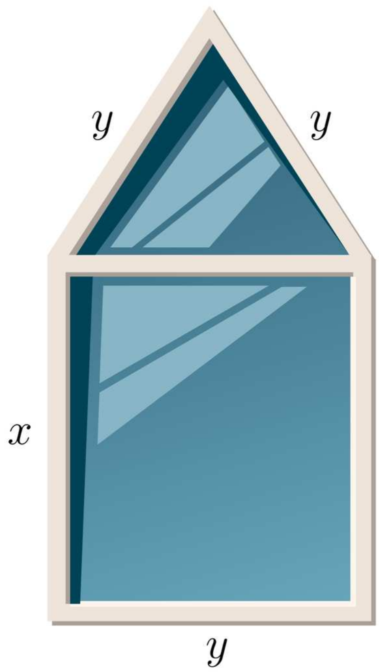
Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, której wykres pokrywa się z wykresem funkcji P, jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych, zatem $x_w = \frac{0+2{,}2}{2} = 1,1 \text{ m}$. Zauważmy, że należy do dziedziny funkcji, zatem funkcja przyjmuje największą wartość w wierzchołku paraboli. Wyznaczymy $y = \frac{2{,}2-x}{0{,}7} = \frac{11}{7} \text{ m}$.

Odpowiedź:

Wymiary wyciętego prostokąta to $1,1 \text{ m} \times \frac{11}{7} \text{ m}$.

Przykład 4

Obwód okna przedstawionego na rysunku wynosi 14 m. Wyznaczymy miary odcinków x i y (patrz rysunek), aby przez okno wpadało jak najwięcej światła.



Rozwiązanie:

Zapiszmy równanie wynikające z obwodu okna $2x + 3y = 14$. Wyznaczymy jedną ze zmiennych np. x otrzymujemy $x = 7 - \frac{3}{2}y$. Przez okno będzie wpadać jak najwięcej światło gdy jego pole powierzchni będzie maksymalne. Okno składa się z dwóch figur: z prostokąta oraz z trójkąta równobocznego.

$P = xy + \frac{y^2\sqrt{3}}{4}$

Podstawiając za x otrzymujemy

$P(y) = \left(7 - \frac{3}{2}y\right)y + \frac{y^2\sqrt{3}}{4}$

Przekształcając funkcję, otrzymujemy funkcję zmiennej y wyrażającej pole powierzchni okna

$P(y) = 7y + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)y^2$

Biorąc pod uwagę, że długości boków muszą być dodatnie, określamy, że dziedziną jest zbiór $D = \left(0, \frac{14}{3}\right)$

Wyznaczymy wierzchołek paraboli ze wzoru $-\frac{b}{2a}$. Otrzymujemy

$y = -\frac{7}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)} = -\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 3}$

Następnie usuwamy niewymierność z mianownika

$y = -\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 3} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 3}{\frac{\sqrt{3}}{2} + 3}$

Mnożymy ułamki i upraszczamy

$y = \frac{-\frac{7\sqrt{3}}{2} - 21}{\frac{3}{4} - 9} = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{2} + 21}{\frac{33}{4}} = \frac{14\sqrt{3}}{33} + \frac{28}{11}$

Następnie wyznaczymy $x = 7 - \frac{3}{2}y = \frac{35}{11} - \frac{7\sqrt{3}}{11}$.

Odpowiedź:

Miary $x = \frac{35}{11} - \frac{7\sqrt{3}}{11}$ m oraz $y = \frac{14\sqrt{3}}{33} + \frac{28}{11}$ m.

Słownik

funkcja kwadratowa

funkcja określona wzorem:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gdzie współczynniki a, b, c są ustalonymi liczbami przy czym $a \neq 0$

trójkąty podobne

dwa trójkąty których odpowiednie kąty są równe, a odpowiednie boki proporcjonalne; trójkąty są podobne gdy zachodzi którykolwiek z poniższych równoważnych warunków:

1. cecha *bbb* (bok–bok–bok) – stosunki długości odpowiednich par boków są równe,
2. cecha *bkb* (bok–kąt–bok) – stosunku długości dwóch par boków są równe i miary kątów między tymi bokami są równe,
3. cecha *kkk* (kąt–kąt–kąt) – zachowane są miary odpowiednich kątów

trójkąt równoboczny

trójkąt, którego wszystkie boki mają tę samą długość

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z poniższym filmem edukacyjnym, a następnie wykonaj polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DG4A68Din

Film nawiązujący do treści dotyczącej zadań optymalizacyjnych.

Polecenie 2

Stosunek szerokości do długości prostopadłościennej skrzyni wynosi $3:2$. Suma długości metalowych wzmocnień wzdłuż wszystkich krawędzi skrzynki jest równna $6,08\ \mathrm{m}$. Wysokość skrzynki o możliwie największym polu powierzchni całkowitej (wraz z wiekiem) wynosi:

- $0,5\ \mathrm{m}$
- $0,51\ \mathrm{m}$
- $0,52\ \mathrm{m}$
- $0,54\ \mathrm{m}$

Polecenie 3

Jaką wysokość powinien mieć graniastosłup prawidłowy czworokątny o sumie długości krawędzi równej $32\ \mathrm{m}$, aby dodatkowe wzmocnienie, poprowadzone wzdłuż przekątnej tego graniastosłupa, miało możliwie najmniejszą długość?

- $\frac{12}{9}\ \mathrm{m}$
- $2\ \mathrm{m}$
- $\frac{8}{3}\ \mathrm{m}$
- $\frac{16}{9}\ \mathrm{m}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi. Chcesz ogrodzić działkę w kształcie prostokąta mając do dyspozycji $50\ \mathrm{m}$ siatki. Funkcja opisująca pole działki to:

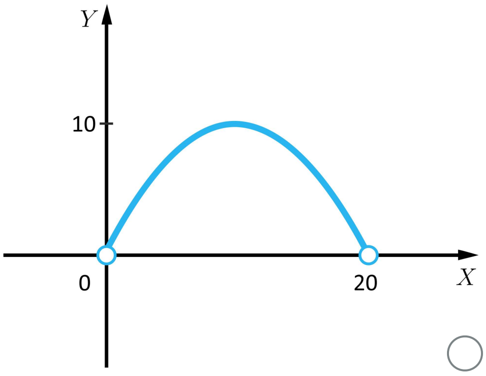
- [ ] $f(x) = -x^2 + 25x$
- [ ] $f(x) = x(50 - 2x)$
- [ ] $f(x) = -2x^2 + 50x$
- [ ] $f(x) = -x^2 + 50x$
- [ ] $f(x) = x(25 - x)$
- [ ] $f(x) = x(50 - x)$

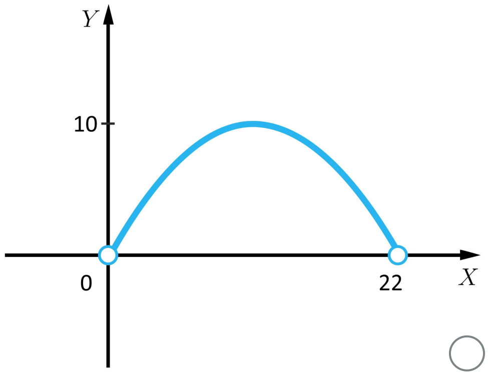
Ćwiczenie 2

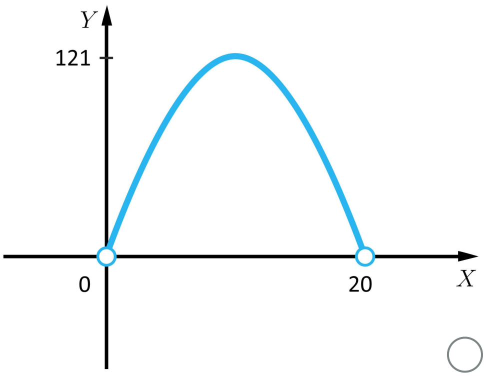
Mając $60\ \mathrm{m}$ siatki ogrodzeniowej należy wykonać ogrodzenie na wybieg dla krów w kształcie prostokąta. Wybieg jednym bokiem ma przylegać do budynku gospodarczego. Wyznacz wymiary tego wybiegu.

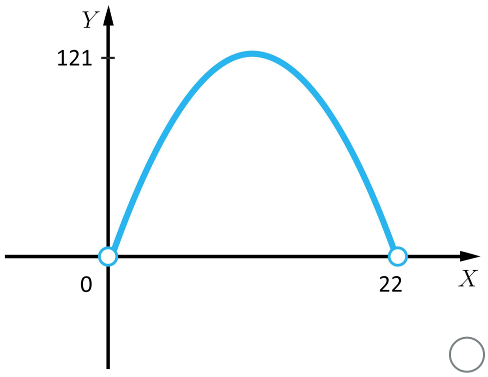
Ćwiczenie 3

Zamierzasz ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni mając $42\ \mathrm{m}$ siatki ogrodzeniowej. Na jednym z boków trzeba zostawić nieogrodzone $2\ \mathrm{m}$ na furtkę. Wskaż prawidłowy rysunek opisujący rozwiązanie.



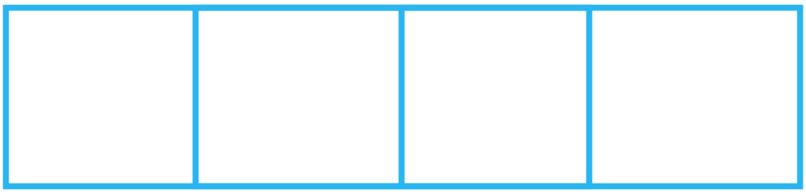






Ćwiczenie 4

Należy zbudować ogrodzenie ograniczające cztery jednakowe boksy w jednym rzędzie (por. rysunek). Posiadasz materiały pozwalające zbudować ogrodzenie o łącznej długości $80\ \mathrm{cm}$ i chcesz by powierzchnia boksów była jak największa.



Wymiary tych boksów wynoszą:

- $4\ \mathrm{cm} \times 12\ \mathrm{cm}$
- $4\ \mathrm{cm} \times 9\ \mathrm{cm}$
- $5\ \mathrm{cm} \times 10\ \mathrm{cm}$
- $5\ \mathrm{cm} \times 8\ \mathrm{cm}$

Ćwiczenie 5

Drut o długości $56\ \mathrm{cm}$ należy podzielić na dwie części. Z jednej zrobić kwadratową ramkę, a z drugiej ramkę prostokątną, której jeden bok jest trzy razy dłuższy od drugiego. Jak należy podzielić drut, aby suma pól otrzymanego kwadratu i prostokąta była najmniejsza?

Obwód kwadratu wynosi ____ cm.

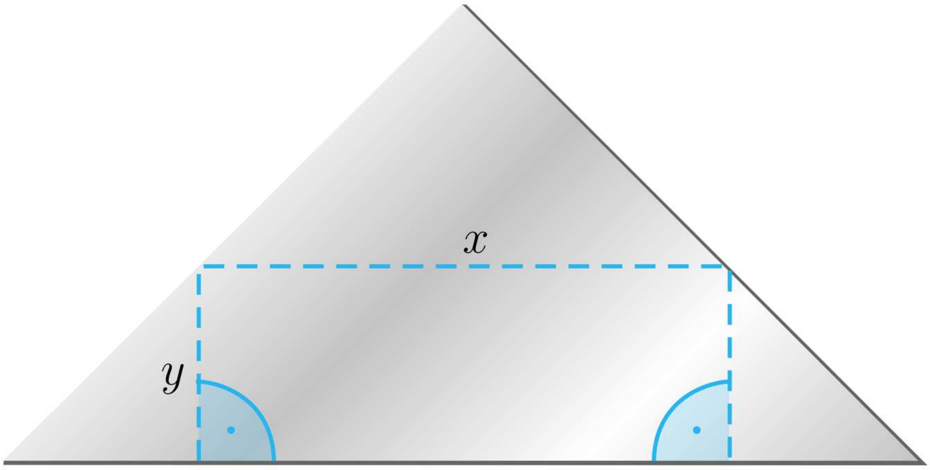
Obwód prostokąta wynosi ____ cm.

Ćwiczenie 6

Z prostokątnego arkusza blachy o bokach $52\ \mathrm{cm}$ i $44\ \mathrm{cm}$ wycinamy na rogach kwadraty, tak aby po sklejeniu otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe?

Ćwiczenie 7

Z kawałka blachy w kształcie trójkąta równoramiennego o bokach $16\ \mathrm{cm}$, $10\ \mathrm{cm}$, $10\ \mathrm{cm}$ należy wyciąć prostokąt o maksymalnym polu (zobacz rysunek). Wyznacz wymiary wyciętego prostokąta.



Ćwiczenie 8

Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi. Wysokość akwarium jest równa $40\ \mathrm{cm}$, a jego podstawą jest prostokąt o obwodzie $180\ \mathrm{cm}$. Największa możliwa objętość tego prostopadłościanu to:

- [ ] $324000\ \mathrm{cm}^3$
- [ ] $81000\ \mathrm{cm}^3$
- [ ] $64000\ \mathrm{cm}^3$
- [ ] $0,144\ \mathrm{m}^3$
- [ ] $0,64\ \mathrm{m}^3$
- [ ] $0,324\ \mathrm{m}^3$
- [ ] $0,81\ \mathrm{m}^3$
- [ ] $144000\ \mathrm{cm}^3$
- [ ] $0,081\ \mathrm{m}^3$

Dla nauczyciela

Autor: Alicja Dembczak-Kołodziejczyk

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania optymalizacyjne z kontekstem realistycznym, które można rozwiązać korzystając z własności funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres podstawowy. Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje opis matematyczny danej sytuacji w postaci funkcji
- wyznacza dziedzinę otrzymanej funkcji
- obliczy wartość najmniejszą bądź największą otrzymanej funkcji
- wyciąga wnioski na podstawie zrealizowanych przykładów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrany przez nauczyciela uczeń przypomina własności funkcji kwadratowej i jej wykresu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wraz z nauczycielem analizują i omawiają rozwiązane przykłady z sekcji blok tekstowy.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Film edukacyjny”. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego zrozumieniem. Uczniowie w grupach rozwiązują polecenia nr 2 oraz nr 3 w sekcji „Film edukacyjny”. Wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie. Nauczyciel, w razie potrzeby, uzupełnia informacje.
3. Następnie uczniowie wykonują w grupach zadania z ćwiczeń interaktywnych.
4. Wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Uczniowie dobierają się w pary i tworzą dla drugiej osoby zadania analogiczne do zadań 5, 6 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Współrzędne wierzchołka paraboli

Wskazówki metodyczne:

„Film edukacyjny” można wykorzystać jako wstęp do zajęć, utrwalając w ten sposób schemat rozwiązania zadań optymalizacyjnych.