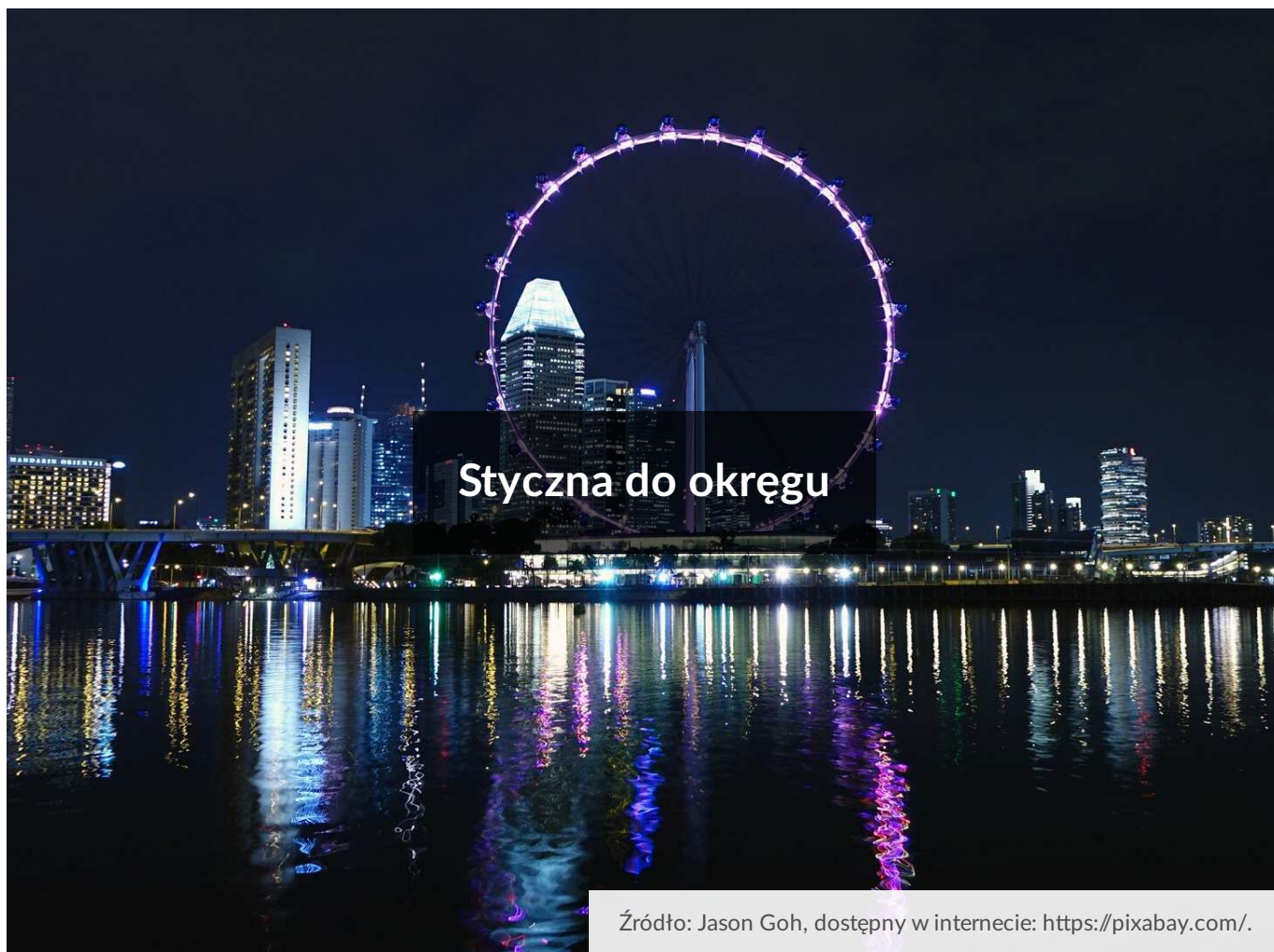




Styczna do okręgu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

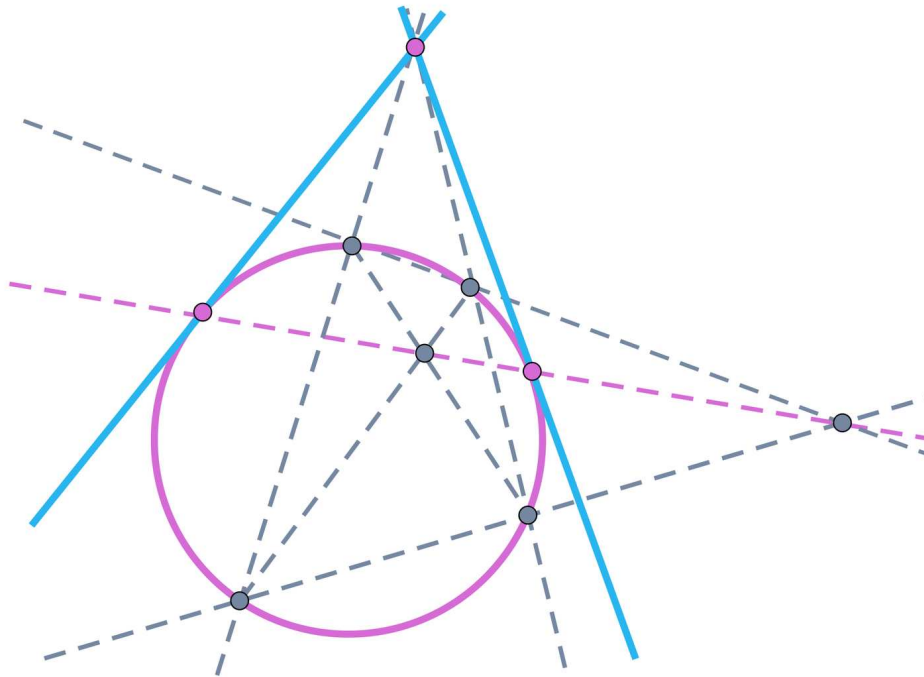


O konstrukcjach klasycznych inaczej

Nie będzie nadużyciem stwierdzenie, że geometria starożytna, to geometria cyrkla i linijki. Do dzisiaj stosujemy metody kreślenia symetralnych, dwusiecznych czy stycznych do okręgu, które były zaproponowane blisko trzy tysiące lat temu. Ale tak, jak matematycy próbowali ograniczyć liczbę aksjomatów zaproponowanych przez Euklidesa, tak samo próbowali rozstrzygnąć, czy możliwe jest wyznaczanie określonych obiektów geometrycznych, o zadanych własnościach, dysponując ograniczonym do minimum zestawem narzędzi. Okazało się, o czym mówi twierdzenie Ponceleta-Steinera, że jeśli dana konstrukcja jest wykonalna za pomocą cyrkla i linijki, to jest ona wykonalna za pomocą samej linijki, o ile dany jest na płaszczyźnie pewien okrąg wraz ze środkiem. Co więcej, jeśli przez konstrukcję będziemy rozumieli tylko wyznaczanie punktów konstrukcji, a pominiemy rysowanie linii, to każda konstrukcja wykonalna za pomocą cyrkla i linijki, jest wykonalna także za pomocą samego cyrkla (twierdzenie Mohra-Mascheroniego). Te w pewien sposób wyjątkowe konstrukcje zilustrujemy kreśląc styczne do okręgu przez punkt leżący poza okręgiem. Poniżej opisane są kolejne etapy konstrukcji i narysowany jest odpowiedni model.

- Z danego punktu kreślimy dwie sieczne wyznaczające na okręgu cięciwy o różnej długości.

- Otrzymane punkty wyznaczają czworokąt, w którym prowadzimy przekątne oraz przedłużamy, aż do przecięcia, boki czworokąta.
- Przez punkt przecięcia przekątnych i punkt przecięcia prostych zawierających boki (różne od siecznych) prowadzimy prostą – punkty wspólne tej prostej i danego okręgu są punktami styczności dla szukanych stycznych.
- Prowadzimy szukane styczne.



Twoje cele

- Będziesz badać wzajemne położenie prostych i okręgów.
- Skonstruujesz styczne do okręgu i wspólne styczne do dwóch danych okręgów.
- Poznasz zależności, które pozwolą wyznaczyć liczbę wspólnych stycznych do dwóch danych okręgów, w zależności od wzajemnego położenia tych okręgów.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

Styczna do okręgu

Przypomnijmy, że styczna i promień okręgu poprowadzony do punktu styczności są wzajemnie prostopadłe. Fakt ten będzie podstawą **konstrukcji** przeprowadzanych w trakcie tej lekcji.

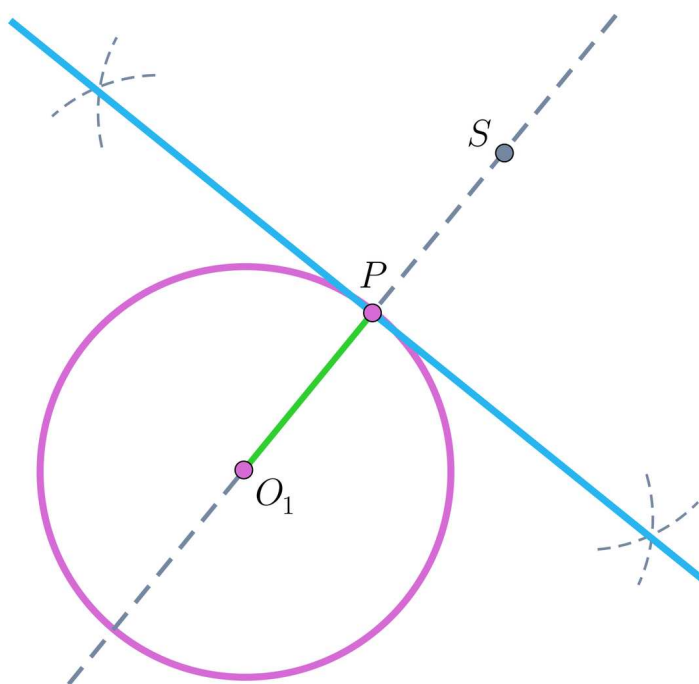
Przykład 1

Styczna przechodząca przez punkt na okręgu

Rozważmy okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 i punkt P leżący na tym okręgu. Naszym zadaniem będzie wykreślenie stycznej do danego okręgu, dla której punkt P będzie punktem styczności.

Rozwiązanie

Prowadzimy promień O_1P . Naszym zadaniem jest wykreślenie prostej prostopadłej do tego promienia przechodzącej przez P . W tym celu prowadzimy prostą O_1P . Z punktu P zakreślamy okrąg o promieniu równym O_1P i na przecięciu z prostą otrzymujemy punkt $S \neq P$. Pozostaje skonstruować symetralną odcinka O_1S . Z punktów O_1 i S kreślimy łuki o jednakowym promieniu, aż do ich przecięcia po obu stronach prostej O_1P . Przez punkty przecięcia się łuków prowadzimy symetralną odcinka O_1S , która jest szukaną styczną.



Styczna przez punkt na okręgu

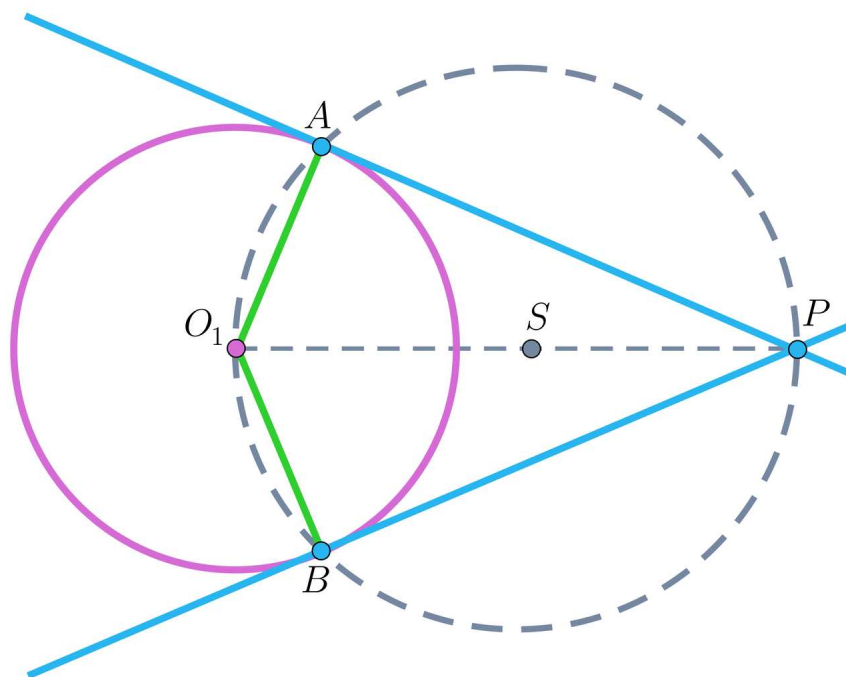
Uwaga!

Powyższa, doskonale znana konstrukcja symetralnej odcinka nie będzie każdorazowo opisywana przy rozwiązywaniu kolejnych zadań – będziemy wówczas mówili krótko, że prowadzimy symetralną. Podobnie z prostą równoległą – gdyby naszym zadaniem było wykreślenie równoległej do naszej stycznej i przechodzącej przez punkt S , to moglibyśmy powtórzyć konstrukcję symetralnej dla odcinka leżącego na prostej O_1P , którego punkt S byłby środkiem. Tym samym często będziemy mówić o poprowadzeniu równoległej, bez formalnego opisu tej części konstrukcji.

Przykład 2

Styczna przechodząca przez punkt poza okręgiem

Teraz naszym zadaniem będzie wykreślenie stycznej do danego okręgu, przechodzącej przez punkt P leżący poza okręgiem. Rozważmy okrąg o środku O_1 i promieniu r_1 i punkt P leżący na zewnątrz okręgu. Rozwiązanie Prowadzimy odcinek O_1P i wyznaczamy jego środek – S . Z punktu S kreślimy okrąg o promieniu równym O_1S i otrzymujemy punkty A i B . Przez punkty A i P oraz B i P prowadzimy proste, które są szukanymi stycznymi.



Styczna przez punkt poza okręgiem

Zauważmy, że poprawność konstrukcji wynika z faktu, że trójkąt wpisany w okrąg i rozpięty na średnicy jest trójkątem prostokątnym.

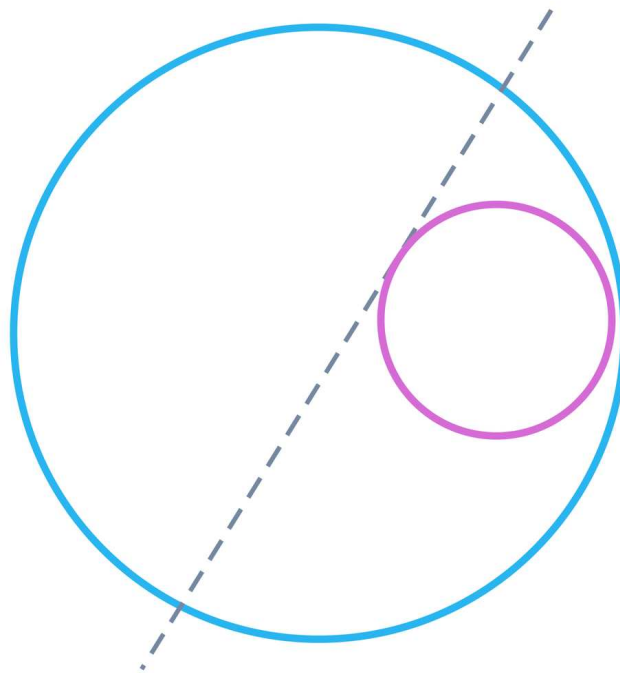
Styczna do dwóch danych okręgów

Zanim zajmiemy się konstrukcją stycznych do dwóch danych okręgów, zastanówmy się nad następującymi kwestiami:

- Czy zawsze jest możliwe poprowadzenie stycznych do dwóch danych okręgów?
- Czy liczba stycznych do dwóch danych okręgów zależy od wzajemnego ich położenia?

Przyjrzyjmy się poniższemu rysunkom.

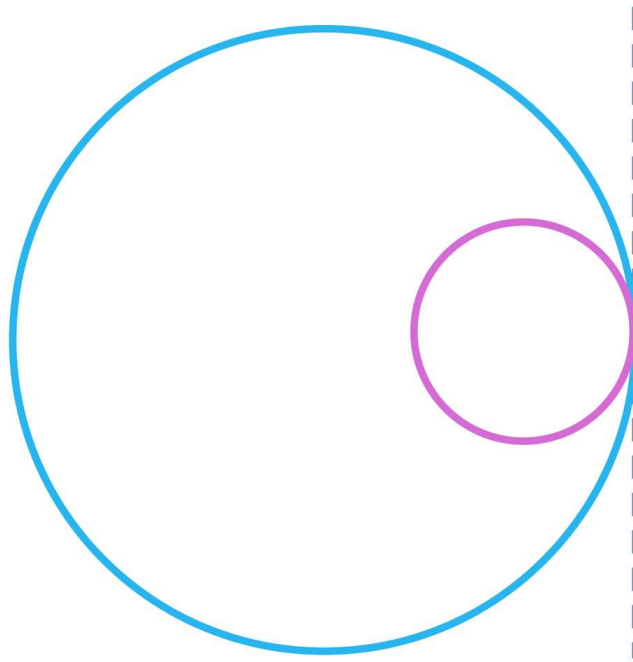
Przypadek 1



Okrąg leży wewnątrz drugiego

Zauważmy, że w sytuacji, gdy jeden okrąg leży wewnątrz drugiego okręgu, to każda styczna do okręgu wewnętrznego musi być sieczną okręgu leżącego na zewnątrz. Dlatego w takiej sytuacji nie istnieje prosta, która byłaby styczna do obu okręgów jednocześnie.

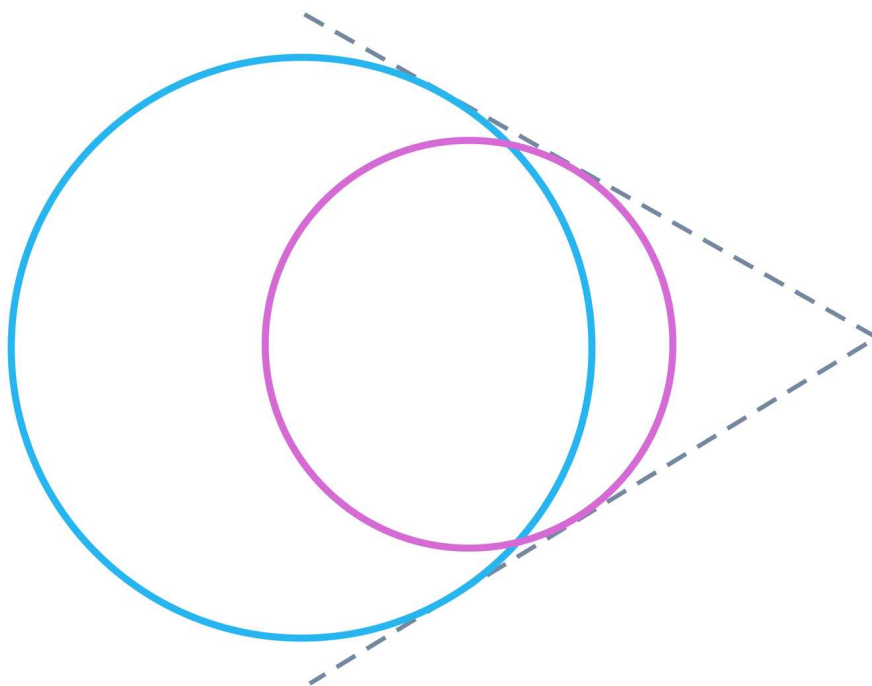
Przypadek 2



Okręgi styczne wewnętrznie

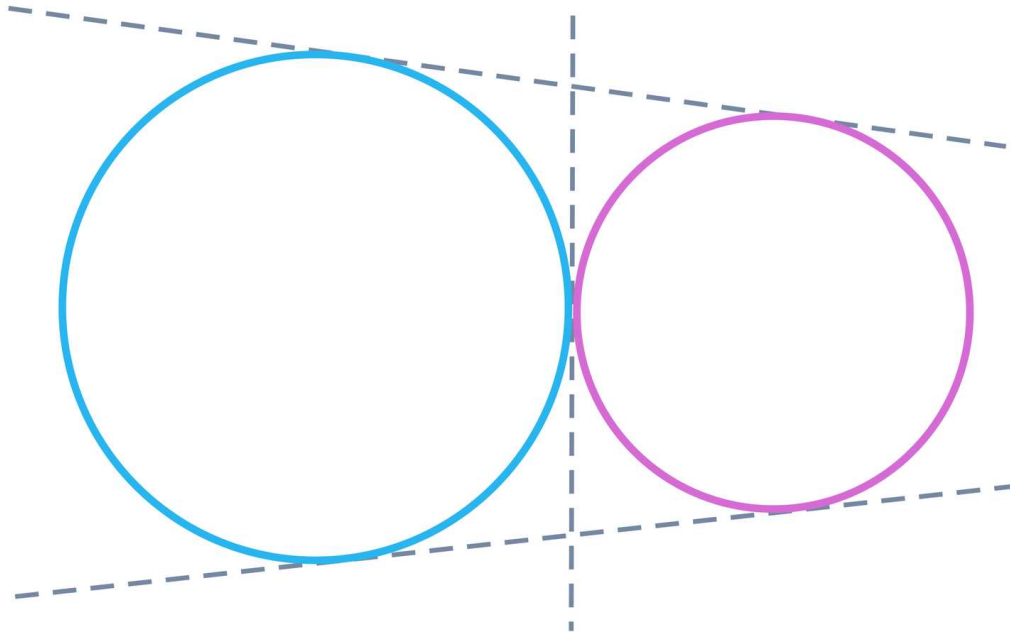
Zauważmy, że w sytuacji, gdy okręgi są styczne wewnętrznie, to jedynie prosta przechodząca przez punkt styczności obu okręgów może być styczna do obu okręgów jednocześnie. Bezpośrednio z własności stycznej wynika, że jest ona prostopadła do prostej łączącej środki obu okręgów.

Przypadek 3



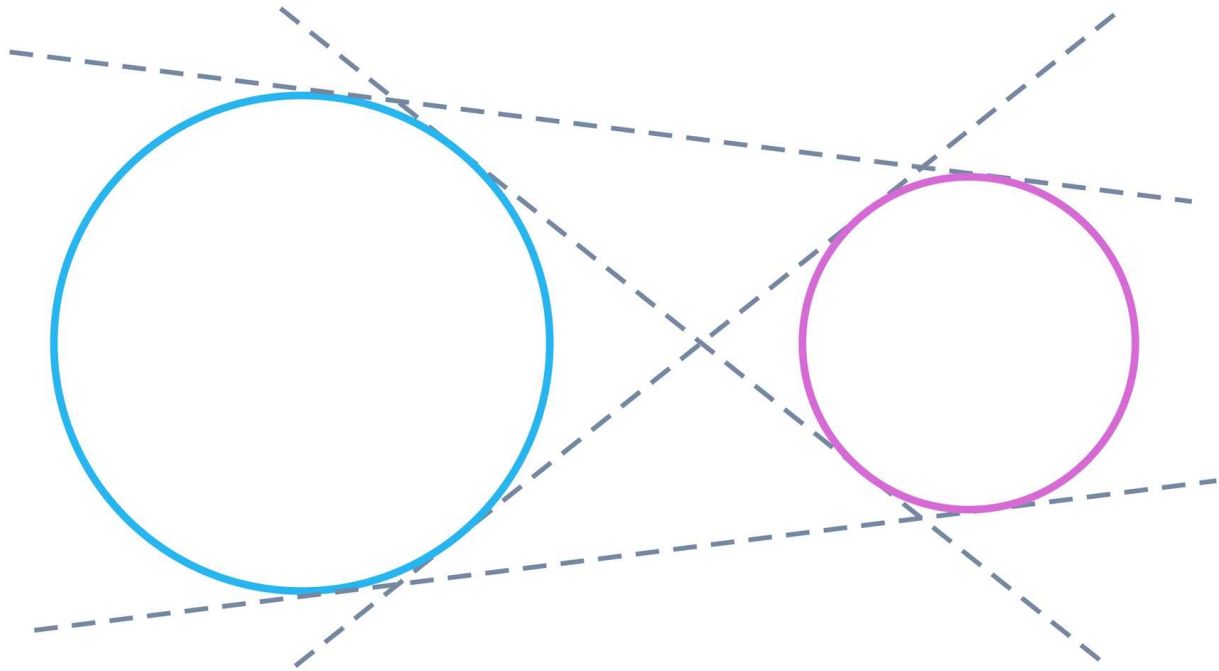
Jeśli okręgi przecinają się w dwóch różnych punktach, to istnieją dwie proste, które byłyby styczne do obu okręgów jednocześnie. Pozostaje zauważyć, że są one symetryczne względem prostej łączącej środki obu okręgów.

Przypadek 4



Zauważmy, że w sytuacji, gdy okręgi są styczne zewnętrznie, to zarówno prosta przechodząca przez punkt styczności obu okręgów może być styczna do obu okręgów jednocześnie, jak również dwie proste poprowadzone analogicznie, jak w przypadku okręgów przecinających się w dwóch różnych punktach. Istnieją zatem trzy różne proste, które są jednocześnie styczne do obu okręgów, przy czym jedna z nich jest prostopadła do prostej łączącej środki obu okręgów, a dwie pozostałe są symetryczne względem prostej łączącej środki obu okręgów.

Przypadek 5



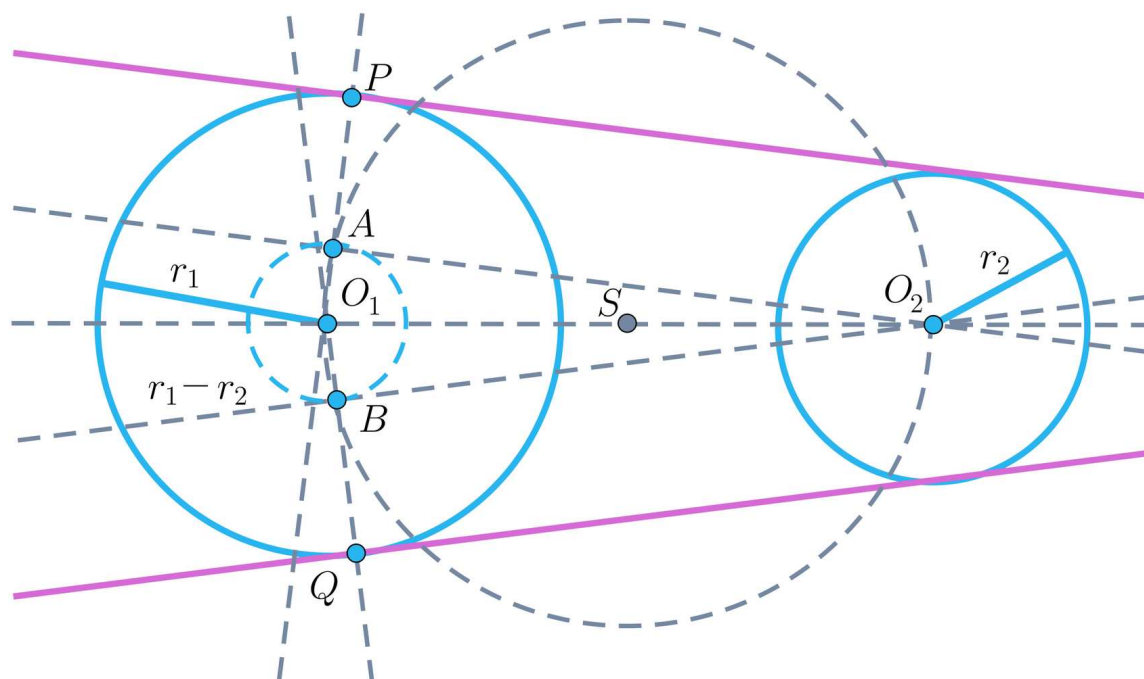
Zauważmy, że w sytuacji, gdy okręgi są wzajemnie zewnętrzne, to istnieją cztery różne styczne, parami symetryczne względem prostej łączącej środki obu tych okręgów. Dwie z tych stycznych, te których punkt przecięcia leży na odcinku łączącym środki obu okręgów, noszą nazwę stycznych wewnętrznych, a dwie pozostałe to styczne zewnętrzne.

Konstrukcja stycznych do danych, wzajemnie stycznych, okręgów, poprowadzonych w punkcie ich styczności, sprowadza się do wykreślenia odcinków prostopadłych przechodzących przez dany punkt. Dlatego pominiemy ich opis i zaproponujemy ich samodzielne wykonanie w ramach ćwiczeń.

Przykład 3

Styczna zewnętrzna do dwóch okręgów

My w tym miejscu zajmiemy się konstrukcją stycznych zewnętrznych do okręgów, gdy okręgi nie mają punktów wspólnych i są wzajemnie zewnętrzne, a ich promienie są różne.



Opis konstrukcji:

- Przez punkty O_1, O_2 prowadzimy prostą.
- Ze środka O_1 kreślimy okrąg pomocniczy o promieniu $r_1 - r_2$, gdzie $r_1 > r_2$.
- Wyznaczamy środek odcinka O_1O_2 - oznaczamy go przez S .
- Z punktu S kreślimy drugi okrąg pomocniczy o promieniu równym połowie odległości $|O_1O_2|$ - oznaczamy przez A i B punkty wspólne obu dorysowanych pomocniczych okręgów.
- Przez punkty odpowiednio A i O_2 oraz B i O_2 kreślimy proste - otrzymujemy styczne do okręgu o promieniu $r_1 - r_2$.
- Prowadzimy odpowiednio proste O_1A oraz O_1B , które przecinają okrąg o promieniu r_1 odpowiednio w punktach P i Q .
- Kreślimy proste równoległe odpowiednio do prostych AO_2 i BO_2 oraz przechodzące przez punkty odpowiednio P, Q .

Dla dowodu poprawności konstrukcji należy zauważyć, że trójkąt O_1AO_2 jest wpisany w okrąg, dla którego odcinek O_1O_2 jest średnicą - oznacza to, że kąt O_1AO_2 jest prosty. Prosta równoległa do AO_2 jest prostopadła do promienia O_1P - stąd punkt P jest punktem styczności. Pozostaje teraz skorzystać z faktu, że odległość prostej poprowadzonej przez punkt P , od środka O_2 jest równa r_2 , co oznacza, że jest ona styczna do tego okręgu.

Słownik

konstrukcje klasyczne

konstrukcje klasyczne lub platońskie, to wyznaczanie pewnych obiektów (figur) geometrycznych na płaszczyźnie przy użyciu cyrkla i liniału, czyli linijki bez podziałki

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet i przeanalizuj konstrukcję wspólnych stycznych do dwóch danych okręgów.

Polecenie 2

Dane są okręgi o promieniach $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, których odległość środków jest równa 9. Wykreśl styczne wewnętrzne do tych okręgów.

Polecenie 3

Dane są okręgi o promieniach $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, których odległość środków jest równa 9. Wyznacz odległość punktu przecięcia się stycznych wewnętrznych do tych okręgów od punktu O_2 .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Skonstruuj styczne zewnętrzne do dwóch okręgów o równych promieniach, gdy okręgi nie mają punktów wspólnych i są wzajemnie zewnętrzne.

Ćwiczenie 2



Skonstruuj styczne zewnętrzne do dwóch okręgów o promieniach $r_1 = 7$, $r_2 = 2$, których środki są odległe o 13.

Ćwiczenie 3



Dane są dwa okręgi o promieniach odpowiednio $r_1 = 7$, $r_2 = 2$, których środki są odległe o 13. Wyznacz długości odcinka stycznej zewnętrznej do tych okręgów, którego końcami są punkty styczności.

Ćwiczenie 4



Dana jest prosta l i punkty: P położony na tej prostej oraz punkt Q leżący poza tą prostą. Przeprowadź konstrukcję okręgu stycznego do prostej l w punkcie P i przechodzącego przez punkt Q .

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jacek Człapiński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Styczna do okręgu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony, klasa I lub II

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych

12) przeprowadza dowody geometryczne

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa wzajemne położenie prostej i dwóch okręgów
- stosuje kryteria pozwalające określić liczbę wspólnych stycznych do dwóch danych okręgów
- przeprowadza podstawowe konstrukcje geometryczne, w tym styczne do okręgu i styczne do dwóch okręgów
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie i metody nauczania:

- konstruktywizm
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel zadaje pytanie dotyczące konstrukcji platońskich – czym one są, z jakimi narzędziami są związane i prosi o podanie przykładów konstrukcji, z którymi uczniowie spotykali się wcześniej.
2. 2. Podaje przygotowany wcześniej opis (rzut ekranu) konstrukcji przeprowadzonej tylko samą linijką lub cyrklem.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o podanie twierdzenia o wzajemnym położeniu promienia i stycznej.
2. Nauczyciel prosi, by zgłosił się uczeń, który przeprowadzi konstrukcję stycznej przez punkt na okręgu (ew. wskazuje ucznia i wspólnie wykonują konstrukcję). Po wykonaniu konstrukcji omawiają jej poprawność.
3. Następnie nauczyciel prosi uczniów o przeanalizowanie sytuacji, gdy mamy poprowadzić styczną przez punkt leżący na zewnątrz okręgu – tak prowadzi dyskusję, by wskazać, na istnienie okręgu, którego średnicą jest odciek łączący punkt i środek okręgu.
4. Zadaniem uczniów jest zaproponowanie opisu konstrukcji, którą potem na tablicy przeprowadzi jeden z nich.
5. Uczniowie uruchamiają aplet GeoGebry i wykonują zawarte w nim polecenia.
6. Nauczyciel formułuje pytanie dotyczące istnienia stycznych do dwóch danych okręgów, w kontekście ich wzajemnego położenia i ich promieni. Uczniowie pod kierunkiem nauczyciela analizują różne przypadki.
7. Nauczyciel prosi, by zgłosił się uczeń, który przeprowadzi konstrukcję wspólnej stycznej zewnętrznej do dwóch danych okręgów wzajemnie zewnętrznych (ew. wskazuje ucznia i wspólnie wykonują konstrukcję). Po wykonaniu konstrukcji omawiają jej poprawność.

8. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

[Styczna do okręgu](#)

Wskazówki metodyczne:

Materiał można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem lub wykorzystać do ćwiczeń związanych z doskonaleniem umiejętności rozwiązywania zadań konstrukcyjnych.