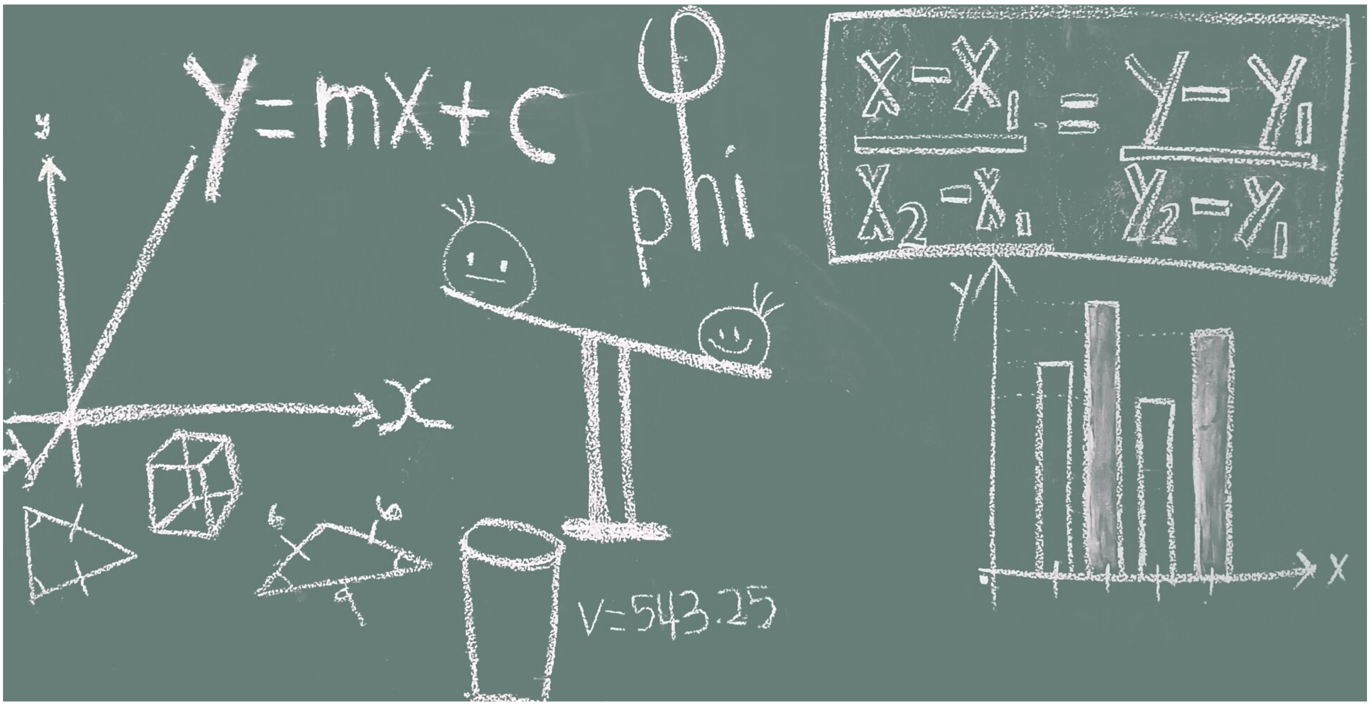
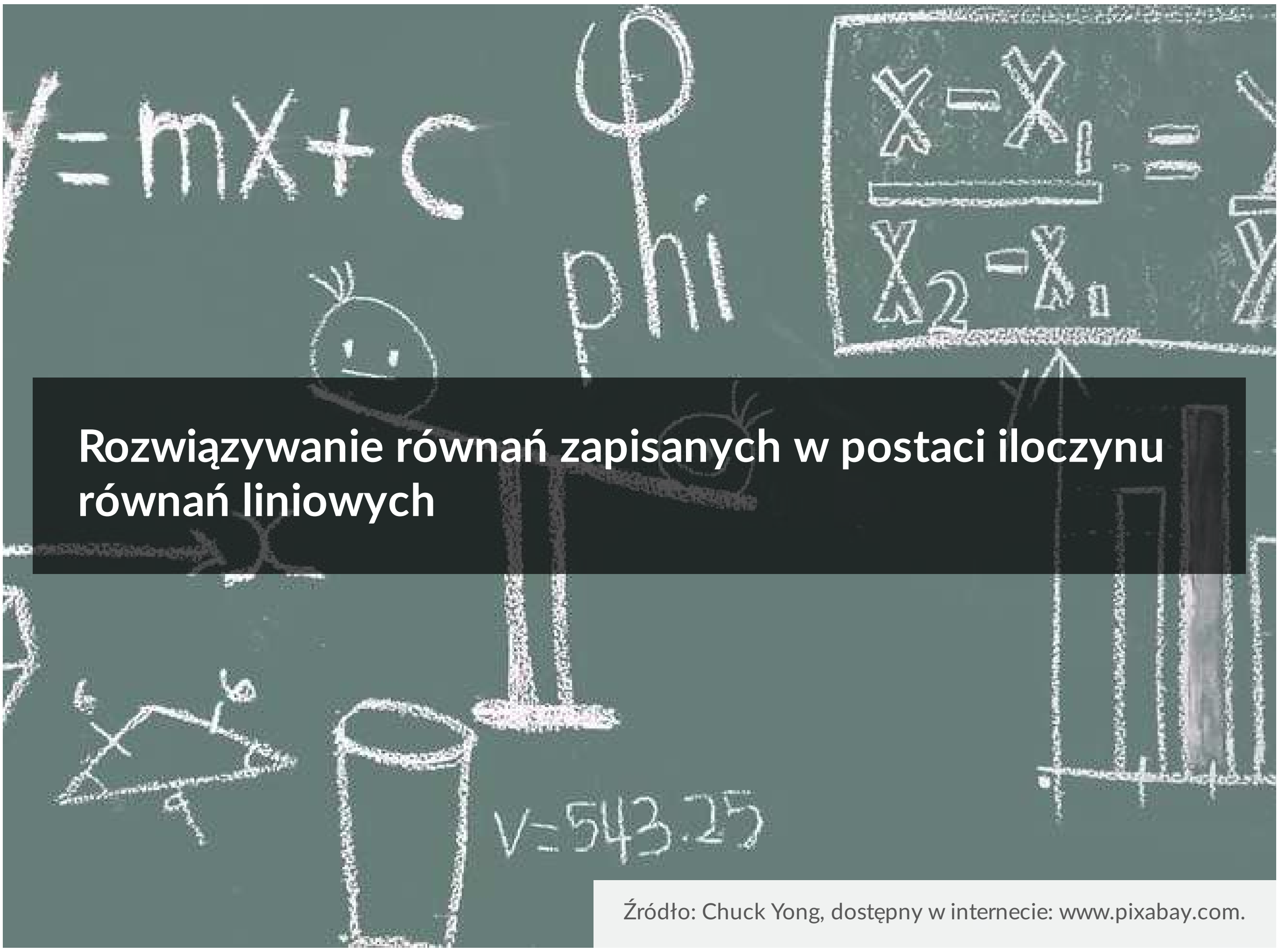


Rozwiązywanie równań zapisanych w postaci iloczynu równań liniowych

Rozwiązywanie równań zapisanych w postaci iloczynu równań liniowych



Źródło: Chuck Yong, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Często zdarza się, że skomplikowane równanie wyższego stopnia daje się sprowadzić do iloczynu równań liniowych. Jest to bardzo wygodna postać, ponieważ aby iloczyn kilku wyrażeń równał się zero wystarczy, aby jeden z tych czynników równał się zero.

W tym materiale przypomnimy, utrwalimy i rozwiniemy umiejętności dotyczące rozwiązywania równań zapisanych w postaci iloczynu równań liniowych oraz sprowadzania równań wyższych stopni do postaci iloczynowej.

Twoje cele

- Rozwiążesz równania zapisane w postaci iloczynu równań liniowych.
- Wybierzesz równania, które mają określoną liczbę rozwiązań.
- Określisz krotność pierwiastka równania.
- Sprowadzisz równania wyższych stopni do postaci iloczynu równań liniowych i podasz ich rozwiązania (jeżeli istnieją).

Przeczytaj

Poszukiwanie miejsc zerowych funkcji W sprowadza się najczęściej do rozwiązania równania

$$W(x) = 0.$$

Najprostszym przypadkiem są takie równania, w których wielomian $W(x)$ jest stopnia pierwszego – otrzymujemy wówczas równanie liniowe. Jeżeli $W(x)$ jest wielomianem stopnia drugiego, otrzymujemy równanie kwadratowe. Natomiast jeśli wielomian jest wyższego stopnia, niż dwa, otrzymujemy równanie, którego rozwiązanie nie zawsze jest łatwe.

Prześledzimy metody rozwiązywania niektórych równań, w których występuje wielomian stopnia wyższego niż dwa. Dla dowolnych wielomianów stopnia piątego lub wyższego uniwersalne metody rozwiązywania nie istnieją.

Zobaczmy, jak sobie poradzić w pewnych szczególnych przypadkach, gdy możemy przedstawić równanie stopnia wyższego jako iloczyn równań liniowych.

Przykład 1

Znajdziemy rozwiązanie równania $x(x+5)(x-1) = 0$.

Rozwiązanie

Lewa strona równania jest iloczynem trzech czynników. Jeżeli iloczyn ten równa się zero, to co najmniej jeden z czynników jest równy zero.

Otrzymujemy:

$$x = 0 \text{ lub } x + 5 = 0 \text{ lub } x - 1 = 0.$$

Stąd wynika, że równanie ma trzy rozwiązania:

$$x = 0 \text{ lub } x = -5 \text{ lub } x = 1.$$

Przykład 2

Znajdziemy rozwiązania równania $4x^3 + 12x^2 + 9x = 0$.

Rozwiązanie

Zacznijmy od wyłączenia x przed nawias.

$$x\left(4x^2 + 12x + 9\right) = 0$$

Otrzymujemy równanie, w którym lewa strona jest iloczynem dwóch czynników.

$$x\left(4x^2 + 12x + 9\right) = 0$$

Przyjrzyjmy się wielomianowi w nawiasie. Korzystając ze wzoru na kwadrat sumy dwóch wyrażeń

$$\left(a + b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

łatwo możemy go zapisać w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego:

$$x(2x + 3)(2x + 3) = 0.$$

Przyrównujemy czynniki iloczynu po lewej strony do zera.

$$x = 0 \text{ lub } 2x + 3 = 0$$

Stąd wynika, że równanie ma dwa rozwiązania (trzy pierwiastki), mianowicie $x = 0$ oraz $x = -\frac{3}{2}$, przy czym $x = -\frac{3}{2}$ jest podwójnym pierwiastkiem równania.

Ważne!

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń:
$\left(a + b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń:
$\left(a - b\right)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń:
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Sześcian sumy dwóch wyrażeń:
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Sześcian różnicy dwóch wyrażeń:
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Suma sześcianów dwóch wyrażeń:
$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

Różnica sześcianów dwóch wyrażeń:
$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $(x-3)^2\left(x^3-27\right)\left(4-x^2\right)(x-2)=0$ i określimy krotność pierwiastków.

Lewa strona jest iloczynem czterech czynników. Jeżeli iloczyn ten równa się zero, to co najmniej jeden z nich jest równy zero.

Otrzymujemy:

$$(x-3)^2 = 0 \text{ lub } \left(x^3-27\right) = 0 \text{ lub } \left(4-x^2\right) = 0 \text{ lub } (x-2) = 0$$

Zatem:

$$x = 3 \text{ lub } x = 3 \text{ lub } x = 3 \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = 2$$

Stąd wynika, że nasze równanie ma trzy rozwiązania:

$$x = -2 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = 3,$$

przy czym liczba -2 jest pierwiastkiem pojedynczym, liczba 2 jest pierwiastkiem podwójnym, a liczba 3 potrójnym.

Przykład 4

Ile pierwiastków rzeczywistych ma równanie $(x+3)(x-4)\left(x^2+5\right)=0$?

Lewa strona jest iloczynem trzech czynników. Jeżeli iloczyn ten równa się zero, to co najmniej jeden z nich jest równy zero.

Otrzymujemy:

$$(x+3)=0 \text{ lub } (x-4)=0 \text{ lub } \left(x^2+5\right)=0,$$

a więc

$$x=-3 \text{ lub } x=4 \text{ lub } x^2=-5.$$

Ostatnie równanie jest równaniem sprzecznym. Nie posiada rozwiązania.

Zatem równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $4(x+3)=x(x+3)$.

Najpierw przeniesiemy wszystkie wyrażenia na jedną stronę.

$$4(x+3)-x(x+3)=0$$

Zauważmy, że nawias $(x+3)$ powtarza się w obydwu wyrażeniach algebraicznych.

$$4(x+3)-x(x+3)=0$$

Wyciągniemy wyrażenie $(x+3)$ przed nawias.

$$(x+3)(4-x)=0$$

W ten sposób zapisaliśmy równanie w postaci iloczynowej. Dalej już łatwo rozwiążemy równanie, przyrównując każdy z czynników do zera.

$$x+3=0 \text{ lub } 4-x=0$$

Równanie ma dwa rozwiązania:

$$x = -3 \text{ lub } x = 4.$$

Słownik

postać iloczynowa równania

zapisanie równania za pomocą iloczynu wyrażeń, w których niewiadoma jest jak najniższego stopnia

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać przykłady, a następnie sprawdź poprawność rozwiązania analizując poszczególne zdjęcia.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $2x^3 - 18x^2 + 54x - 54 = 0$. Określ krotność pierwiastków równania.

Polecenie 3

Podaj przykład równania stopnia czwartego, którego jedynymi pierwiastkami pojedynczymi są liczby -3 i 4.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Przeciągnij równanie do odpowiedniego okienka.

<math><mfenced separators="|"><mrow><mn>2</mn><msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup><mo>+</mo><mfrac><mn>3</mn><mn>2</mn></mfrac></mrow></mfenced><mo>=</mo><mn>0</mn></math>, <math><mi>x</mi><mfenced separators="|"><mrow><msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup><mo>+</mo><mn>4</mn></mrow></mfenced><mo>=</mo><mn>0</mn></math>, <math><mfenced separators="|"><mrow><mi>x</mi><mo>-</mo><mn>4</mn></mrow></mfenced><mfenced separators="|"><mrow><msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup><mo>+</mo><mn>121</mn></mrow></mfenced><mo>=</mo><mn>0</mn></math>, <math><mfenced separators="|"><mrow><mi>x</mi><mo>-</mo><mn>4</mn></mrow></mfenced><mfenced separators="|"><mrow><msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup><mo>-</mo><mn>121</mn></mrow></mfenced><mo>=</mo><mn>0</mn></math>, <math><mfenced><mrow><msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup><mo>+</mo><mn>1</mn></mrow></mfenced><mfenced><mrow><msup><mi>x</mi><mn>4</mn></msup><mo>+</mo><mn>4</mn></mrow></mfenced><mo>=</mo><mn>0</mn></math>, <math><mi>x</mi><mfenced><mrow><msup><mi>x</mi><mn>2</mn></msup><mo>-</mo><mn>4</mn></mrow></mfenced><mo>=</mo><mn>0</mn></math>, <math><mfenced><mrow><msup>

<mi>x</mi><mn>2</mn></msup><mo>+</mo><mn>1</mn></mrow></mfenced>
<mfenced><mrow><msup><mi>x</mi><mn>4</mn></msup><mo>-</mo>
<mn>4</mn></mrow></mfenced><mo>=</mo><mn>0</mn></math>

równania sprzeczne	
równania, które mają jedno rozwiązanie	
równania, które mają więcej niż jedno rozwiązanie	

Ćwiczenie 7

Wybierz, liczby, które są rozwiązaniem równania: $3(x+1) = x(x+1)$.

-3 i 1, -1 i 3

....

Ćwiczenie 8

$x+2$, $x+1$, $2(x+2)$, $2(x+1)$

Które wyrażenie algebraiczne należy wpisać w puste miejsce, aby rozwiązaniem równania $4(x+2)=x(x+2)+$ .... były liczby -2 i 3?

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie równań zapisanych w postaci iloczynu równań liniowych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równania zapisane w postaci iloczynu równań liniowych
- wybiera równania, które mają określoną liczbę rozwiązań
- określa krotność pierwiastka równania
- sprowadza równania wyższych stopni do postaci iloczynu równań liniowych i podaje ich rozwiązania (jeżeli istnieją)
- tworzy algorytmy rozwiązywania równań różnych typów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- stoliki zadaniowe
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady prostych równań zapisanych w postaci iloczynu dwóch równań liniowych. Uczniowie podają rozwiązania tych równań.

Faza realizacyjna:

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów prostych równań zapisanych w postaci iloczynu równań liniowych lub kwadratowych typu: $x + 7 = 0, x^2 - 1 = 0, x^2 + 2 = 0$.
   Następnie stara się podzielić równania na grupy, według własnych kryteriów.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Wskazują liczbę rozwiązań równania.
3. Przykłady rozwiązań równań znajdujące się w części przeczytaj uczniowie analizują w parach. Wspólne z nauczycielem wyjaśniają wątpliwości.
4. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i omawiają ją wraz z nauczycielem.
5. Uczniowie w parach rozwiązują zadania metodą stolików zadaniowych. Każdy stolik zawiera 2 zadania interaktywne. Warunkiem przejścia do następnego stolika jest poprawne rozwiązanie danych zadań. Para, która najszybciej rozwiąże wszystkie zadania otrzymuje bardzo dobrą ocenę.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące metod sprowadzania równań do postaci iloczynowej.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie, którym nie udało się zakończyć konkursu rozwiązują pozostałe zadania w domu.

Materiały pomocnicze:

Pierwiastki równań

Wskazówki metodyczne:

Przykłady 2 i 3 dotyczące galerii interaktywnej mogą być pracą domową dla uczniów.