Twierdzenie cosinusów

Źródło: Brett Jordan, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

W trójkącie prostokątnym możemy łatwo, posługując się tablicami wartości funkcji trygonometrycznych, obliczyć długości boków tego trójkąta lub miary jego kątów, o ile mamy tylko wystarczające dane. Wystarczy na przykład znać długość jednego boku oraz miarę jednego z kątów ostrych. Oczywiście jeden kąt – prosty – znamy, więc bez trudu możemy obliczyć trzeci kąt. Znając natomiast dwa boki trójkąta prostokątnego możemy obliczyć, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, długość trzeciego boku, a wykorzystując definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, możemy obliczyć wartości tych funkcji, co z kolei pozwala nam ustalić kąty ostre tego trójkąta. W przypadku dowolnego trójkąta również możemy podać ogólne związki między długościami jego boków oraz funkcjami trygonometrycznymi jego kątów. Jednym z takich związków jest twierdzenie cosinusów. Temu twierdzeniu poświęcony jest ten materiał.

Twoje cele

- Poznasz twierdzenie cosinusów.

- Udowodnisz twierdzenie cosinusów dwoma sposobami.
- Zastosujesz twierdzenie cosinusów do wyznaczania długości boku trójkąta.
- Zastosujesz twierdzenie cosinusów do wyznaczania miary kąta trójkąta.

Przeczytaj

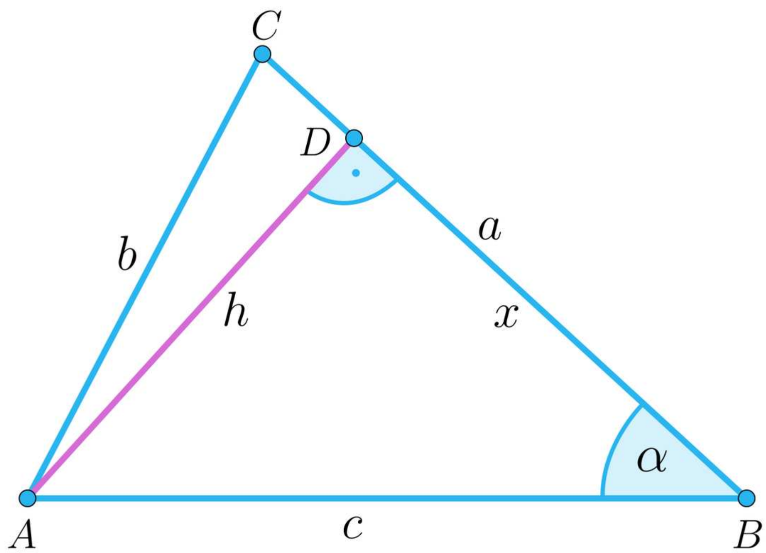
W trójkącie prostokątnym o bokach długości a, b i c, gdzie c to długość przeciwprostokątnej, zależność między długościami boków ma postać równości:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Powstaje naturalne pytanie o to, czy w trójkącie, który nie jest prostokątny, jest podobna zależność.

Weźmy na przykład trójkąt ostrokątny.

Poprowadźmy wysokość opuszczoną z wierzchołka A i oznaczmy $h = |AD|$ i $x = |BD|$.



Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ABD wynika, że $c^2 = x^2 + h^2$.

Ponieważ $a > x$ i $b > h$, więc $a^2 > x^2$ i $b^2 > h^2$.

Zatem w tym przypadku $c^2 < a^2 + b^2$.

Moglibyśmy zatem zapisać $c^2 = a^2 + b^2 - p$, gdzie p jest pewną liczbą.

Podobne rozumowanie moglibyśmy przeprowadzić dla trójkąta rozwartokątnego, dochodząc do analogicznej równości.

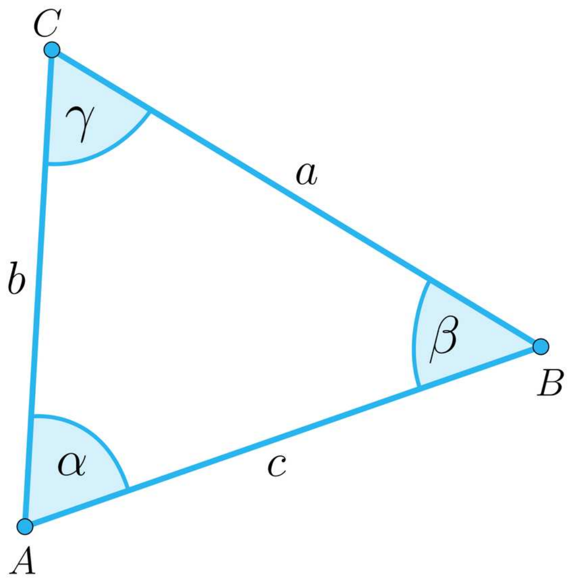
Wyznaczymy tę liczbę p w zależności od boków a i b oraz kąta między tymi bokami.

W ten sposób udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie: Twierdzenie cosinusów

W dowolnym trójkącie kwadrat długości boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków tego trójkąta pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta między tymi bokami.

Przy standardowych oznaczeniach trójkąta, takich jak na rysunku,



tezę twierdzenia możemy zapisać w postaci:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Dowód

Wystarczy wykazać prawdziwość jednej z tych równości.

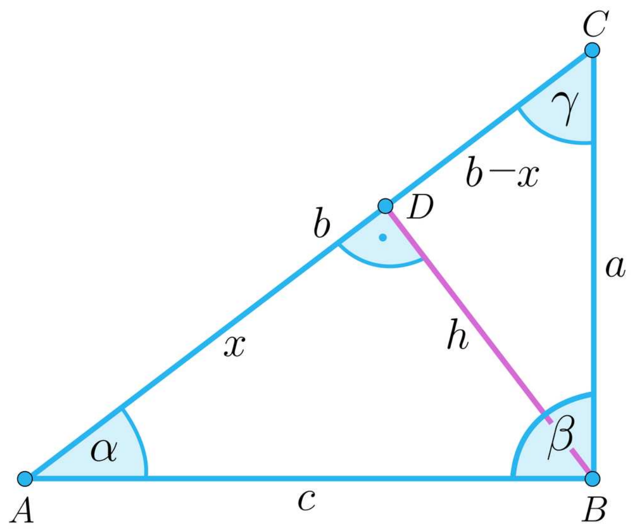
Dowód przeprowadzimy w trzech przypadkach: gdy kąt α jest ostry, gdy jest prosty oraz gdy jest rozwarty.

1. Gdy kąt α jest ostry, to co najmniej jeden z pozostałych dwóch kątów tego trójkąta też jest ostry.

   Bez straty ogólności rozumowania możemy założyć, że kąt γ jest ostry.

   Wtedy spodek D wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka B leży na boku AC.

   Niech $|AD| = x$ oraz $|BD| = h$, jak na rysunku.

   Wtedy $|CD| = b - x$.

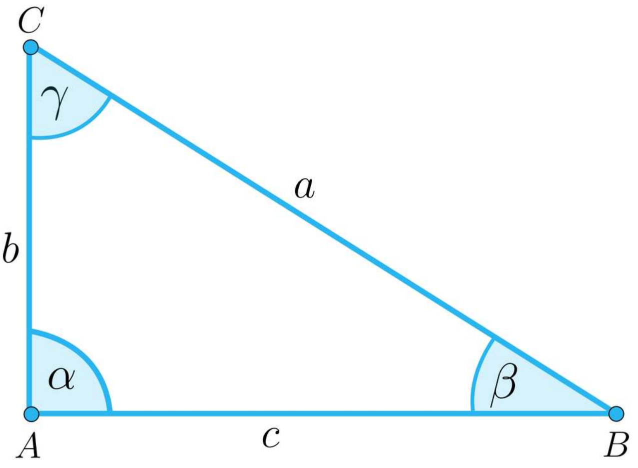
   Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów ABD i BCD otrzymujemy $c^2 = x^2 + h^2$ oraz $a^2 = (b-x)^2 + h^2$.

   Drugą z tych równości możemy zapisać w postaci $a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2$, więc stąd i z pierwszej równości otrzymujemy $a^2 = b^2 - 2bx + c^2$.

   Z definicji funkcji cosinus kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym ABD wynika, że $\cos\alpha = \frac{x}{c}$, skąd $x = c\cos\alpha$.

   Zatem $a^2 = b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2$, czyli $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, co kończy dowód w tym przypadku.

2. Gdy kąt α jest prosty.



Wtedy z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $a^2 = b^2 + c^2$.

Ponieważ $\cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$, więc równość tę możemy zapisać w postaci $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

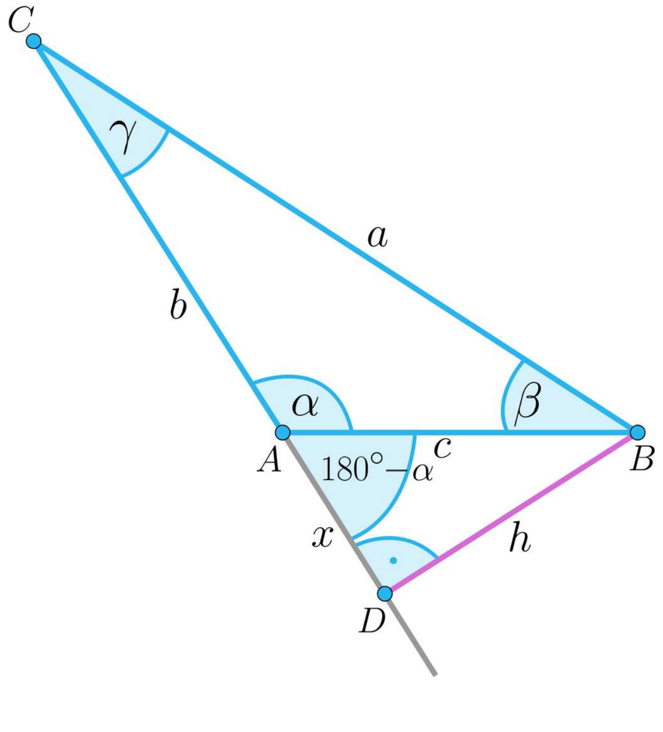
Zatem w tym przypadku również jest ona prawdziwa.

3. Gdy kąt α jest rozwarty.

   Wtedy spodek D wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka B leży na prostej AC tak, że punkt A leży między punktami C i D.

   Niech $|AD| = x$ oraz $|BD| = h$, jak na rysunku.

   Wtedy $|CD| = b + x$.



Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkątów ABD i BCD otrzymujemy $c^2 = x^2 + h^2$ oraz $a^2 = (b+x)^2 + h^2$.

Drugą z tych równości możemy zapisać w postaci $a^2 = b^2 + 2bx + x^2 + h^2$, więc stąd i z pierwszej równości otrzymujemy $a^2 = b^2 + 2bx + c^2$.

Kąty BAC i DAB są przyległe, więc $|\sphericalangle DAB| = 180^\circ - \alpha$.

Ponieważ kąt α jest rozwarty, więc kąt $180^\circ - \alpha$ jest ostry.

Z definicji funkcji cosinus kąta ostrego $180^\circ - \alpha$ w trójkącie prostokątnym ABD wynika, że $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x}{c}$, skąd $x = c\cos(180^\circ - \alpha)$.

Ze wzoru redukcyjnego wynika, że $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, więc $x = c\cos(180^\circ - \alpha) = -c\cos\alpha$.

Zatem $a^2 = b^2 + 2bx + c^2 = b^2 + 2b \cdot (-c\cos\alpha) + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, a więc w tym przypadku równość także jest prawdziwa.

To kończy dowód.

Twierdzenie cosinusów nazywamy też **twierdzeniem Carnota**. Często też zależność między długościami boków trójkąta i cosinusem jednego z kątów tego trójkąta nazywa się **wzorem cosinusów** lub **wzorem Carnota**. Twierdzenie cosinusów jest uogólnieniem twierdzenia Pitagorasa. Stosujemy je dla dowolnego trójkąta, choć w przypadku trójkąta prostokątnego sprowadza się ono do twierdzenia Pitagorasa, co zresztą pokazaliśmy w dowodzie twierdzenia cosinusów.

W kolejnych dwóch przykładach zapoznasz się z podstawowymi zastosowaniami twierdzenia cosinusów.

Przykład 1

Dwa boki trójkąta mają długości 4 i 5, a kąt między tymi bokami jest równy 35°. Obliczymy długość trzeciego boku. Wynik zaokrąglimy do części setnych.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy $a^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 35^\circ = 41 - 40 \cdot \cos 35^\circ$, gdzie a oznacza długość trzeciego boku trójkąta.

Zatem $a = \sqrt{41 - 40 \cdot \cos 35^{\circ}}$.

Z tablic wartości funkcji trygonometrycznych odczytujemy przybliżoną wartość $\cos 35^{\circ} \approx 0,8192$.

Zatem $a \approx 2,87$.

Przykład 2

Boki trójkąta mają długości 7, 8 i 9. Obliczymy marę największego kąta tego trójkąta. Wynik zaokrąglimy do 1°.

Rozwiązanie:

Największy kąt trójkąta, oznaczmy go przez α, leży naprzeciw najdłuższego boku.

Z twierdzenia cosinusów możemy zapisać $9^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$.

Stąd $\cos \alpha = \frac{7^2+8^2-9^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{2}{7} \approx 0,2857$.

Z tablic wartości funkcji trygonometrycznych odczytujemy przybliżoną wartość kąta $\alpha \approx 73^{\circ}$.

Słownik

trójkąt ostrokątny

to trójkąt, którego każdy kąt wewnętrzny jest ostry, a więc większy od 0° i mniejszy od 90°

trójkąt rozwartokątny

to trójkąt, którego jeden kąt wewnętrzny jest rozwarty, a więc większy od 90° i mniejszy od 180° (dwa pozostałe kąty tego trójkąta są ostre)

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Odtwórz pierwszy fragment prezentacji i zapoznaj się z treścią lematu 1. dotyczącego długości rzutu prostokątnego odcinka na prostą. Po zapoznaniu się z tym lematem spróbuj przeprowadzić samodzielnie jego dowód. Po tym porównaj swój dowód z przedstawionym w kolejnym fragmencie prezentacji.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DSPDUdkXc

Polecenie 2

Po zapoznaniu się z lematem 1. i jego dowodem, odtwórz kolejny fragment prezentacji i przeanalizuj lemat 2., w którym podana jest zależność między długością boku trójkąta, długościami dwóch pozostałych boków i cosinusami kątów przy tym boku i, podobnie jak poprzednio, spróbuj samodzielnie przeprowadzić jego dowód. Zwróć uwagę, że spodek wysokości trójkąta może leżeć na boku trójkąta, ale może też leżeć na prostej zawierającej ten bok i nie leżeć na tym boku. Porównaj swój dowód z dowodem przedstawionym w następnych dwóch slajdach prezentacji.

Polecenie 3

Po zapoznaniu się z lematem 2. i jego dowodem odtwórz kolejny fragment prezentacji, w którym sformułowane zostało twierdzenie cosinusów. Tu również, spróbuj przeprowadzić dowód tego twierdzenia, wykorzystując w nim lemat 1. Porównaj swój dowód z dowodem przedstawionym w dalszej części filmu. Ta część została podzielona na fragmenty, w których pokazane są kolejne kroki dowodu. Gdyby nawet nie udało Ci się samodzielnie przeprowadzić dowodu, to odtwórz najpierw pierwszy fragment dowodu, spróbuj poprowadzić dowód dalej samodzielnie, jeśli to też Ci się nie uda, to postępuj tak z kolejnymi fragmentami prezentacji.

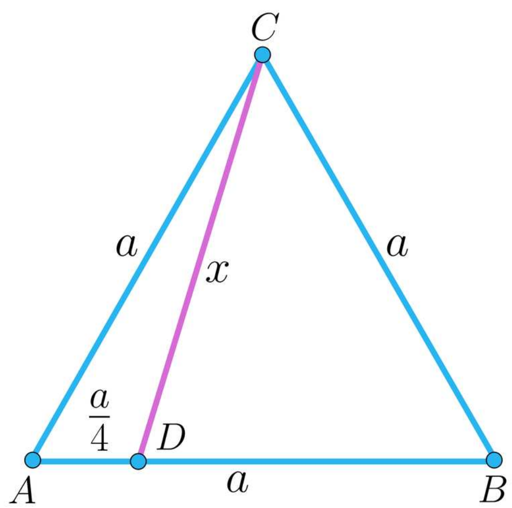
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

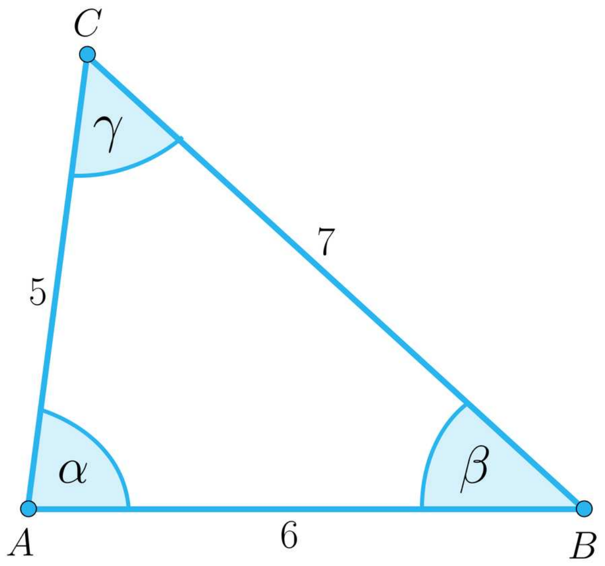
Bok trójkąta równobocznego ABC ma długość a. Punkt D leży na boku AB tego trójkąta tak, że $|AD| = \frac{a}{4}$, jak na rysunku poniżej.



Ćwiczenie 3

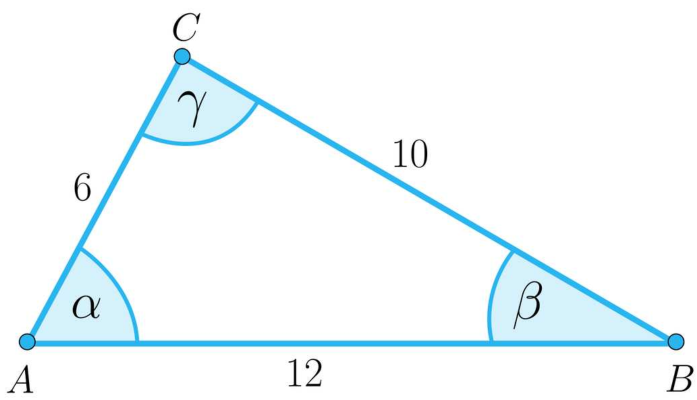
Ćwiczenie 4

Długości boków trójkąta ABC oraz kąty zostały zaznaczone na rysunku.



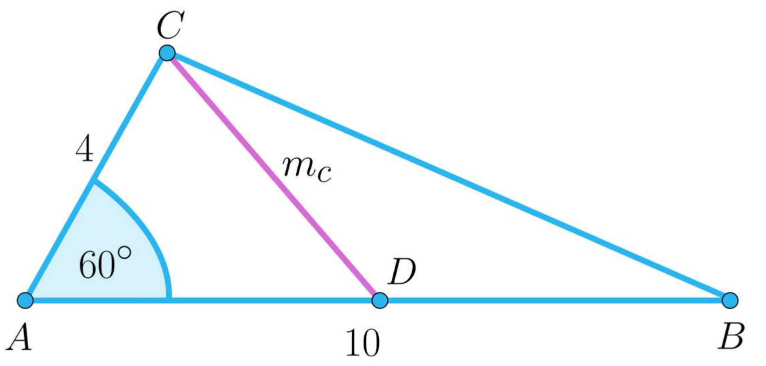
Ćwiczenie 5

Długości boków trójkąta ABC oraz kąty zostały zaznaczone na rysunku.



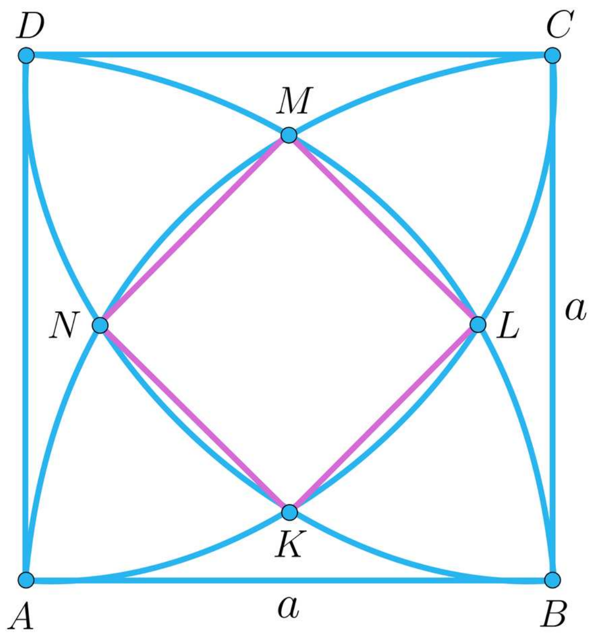
Ćwiczenie 6

W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 10$, $|AC| = 4$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$.



Ćwiczenie 7

Z wierzchołków kwadratu $ABCD$ o boku długości a zatoczono cztery łuki okręgów, każdy o promieniu a. Punkty przecięcia tych okręgów są wierzchołkami kwadratu $KLMN$, jak na rysunku. Oblicz długość boku kwadratu $KLMN$,



Ćwiczenie 8

Długości boków trójkąta ABC są równe a, b i c. Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ca$.

Dla nauczyciela

Autor: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie cosinusów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna pojęcie i stosuje twierdzenie cosinusów
- przeprowadza dowód twierdzenia cosinusów
- oblicza długości boków trójkąta na podstawie twierdzenia cosinusów
- oblicza miary kątów trójkąta, wykorzystując twierdzenie cosinusów
- przeprowadza dowody geometryczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie twierdzenie Pitagorasa oraz definicji funkcji cosinus oraz jej własności.
2. Nauczyciel prosi uczniów o narysowanie trójkąta ostrokątnego i rozstrzygnięcie, czy długości a, b i c boków tego trójkąta spełniają równość $c^2 = a^2 + b^2$. Po otrzymaniu negatywnej odpowiedzi prosi uczniów o uzasadnienie swojego wyniku. Podobne ćwiczenie uczniowie wykonują w przypadku trójkąta rozwartokątnego.
3. Po wykonaniu ćwiczeń wprowadzających nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel formułuje twierdzenia cosinusów.
2. Nauczyciel prosi uczniów o udowodnienie twierdzenia cosinusów, zwracając szczególną uwagę na konieczność rozpatrzenia wszystkich przypadków.
3. Uczniowie w grupach, przy jak najmniejszej pomocy nauczyciela, dowodzą twierdzenia cosinusów.
4. O ile czas na to pozwala, nauczyciel poleca uczniom zapoznanie się z innym dowodem twierdzenia cosinusów zawartym w prezentacji multimedialnej. Jeśli nie, to poleca zapoznanie się tylko z lematem 1.
5. Następnie nauczyciel omawia przykłady zastosowania twierdzenia cosinusów, informując, że zastosowaniom tego twierdzeniem poświęcone są jeszcze inne części e–podręcznika.
6. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć oraz przeprowadzili dowód zależności omawianej we wstępie.

Materiały pomocnicze:

Wzór na sumę i różnicę cosinusów

Wskazówki metodyczne:

Realizację tego tematu można przeprowadzić inaczej, a mianowicie zacząć od prezentacji multimedialnej, a zamieszczony w temacie dowód twierdzenia cosinusów, polecić jako ćwiczenie. Fragmenty omawianego tematu, takie jak twierdzenie o rzucie prostokątnym odcinka na prostą można wykorzystać w trakcie realizacji innych tematów, np. obliczając pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego o danym polu podstawy i kącie nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.