



Ciąg geometryczny i arytmetyczny

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Przed nami kompletny ciągowy miszmasz, czyli pomieszanie z poplątaniem ciągu arytmetycznego z geometrycznym. A więc, żeby zabrać się do analizowania treści zawartych w tym materiale, musisz znać przynajmniej podstawowe pojęcia związane z tymi ciągami. Inaczej trudno będzie zrozumieć Ci odniesienia do wzorów, czy zależności między wyrazami tych ciągów.

Jeśli czujesz się na siłach, żeby podjąć się karkołomnej pracy polegającej na samodzielnym rozwiązaniu zadań – zapraszamy. Jeśli nie masz pewności, czy sprostasz wszystkim trudnościom – pocieszam Cię, że do wszystkich zadań są w materiale odpowiedzi, a w sekcji „Przeczytaj” – nawet szczegółowe rozwiązania.

Zatem do dzieła!

Twoje cele

- Wykorzystasz własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego do znajdowania wielkości związanych z tymi ciągami.
- Rozwiniesz umiejętności stosowania zależności między wyrazami ciągu arytmetycznego oraz wyrazami ciągu geometrycznego.
- Zastosujesz zintegrowaną wiedzę matematyczną do rozwiązywania problemów związanych z ciągami liczbowymi.

Przeczytaj

Pokażemy teraz wykorzystanie związków między ciągami arytmetycznym i geometrycznym do znajdowania wielkości związanych z tymi ciągami.

Na początek przypomnienie definicji tych ciągów i podstawowych wzorów z nimi związanych.

Będziemy przyjmować, że dany ciąg, np. (a_n) , określony jest dla $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 1$.

Definicja: Ciąg arytmetyczny

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu.

Ciąg arytmetyczny (a_n)

Wyraz ogólny ciągu	Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu	Suma n początkowych wyrazów ciągu
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Definicja: Ciąg geometryczny

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez liczbę q , zwaną ilorazem ciągu.

Ciąg geometryczny (a_n)

Wyraz ogólny ciągu	Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu	Suma n początkowych wyrazów ciągu
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$	$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Pierwszy typ zadań, którym się zajmiemy, to z wyrazów ciągu arytmetycznego budowanie wyrazów ciągu geometrycznego.

Przykład 1

Liczby a, b, c (w tej kolejności) są kolejnymi wyrazami trzywyrazowego ciągu arytmetycznego. Ich suma jest równa 15. Jeśli dodamy do pierwszej z tych liczb 1, do drugiej 4 i do trzeciej 19, to tak otrzymane liczby będą kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego (w tej samej kolejności). Znajdziemy liczby a, b, c .

Rozwiązanie:

Najpierw korzystamy z własności ciągu arytmetycznego. Oznaczmy przez r różnicę tego ciągu.

Wtedy:

a – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego,

$b = a + r$ – drugi wyraz ciągu arytmetycznego,

$c = a + 2r$ – trzeci wyraz ciągu arytmetycznego.

Z treści zadania wynika, że suma tych wyrazów jest równa 15.

$$a + a + r + a + 2r = 15$$

$$3a + 3r = 15 \quad | : 3$$

$$a + r = 5$$

$$a = 5 - r$$

Teraz zajmiemy się ciągiem geometrycznym.

$a + 1$ – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego,

$a + r + 4$ – drugi wyraz ciągu geometrycznego,

$a + 2r + 19$ – trzeci wyraz ciągu geometrycznego.

Korzystając z zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, zapisujemy odpowiednie równanie.

$$(a + r + 4)^2 = (a + 1)(a + 2r + 19)$$

Do równania podstawiamy w miejsce a wcześniej wyznaczone wyrażenie.

$$(5 - r + r + 4)^2 = (5 - r + 1)(5 - r + 2r + 19)$$

Sprowadzamy równanie do postaci ogólnej i rozwiązujemy.

$$81 = (6 - r)(r + 24)$$

$$r^2 + 18r - 63 = 0$$

$$\Delta = 324 + 252 = 576$$

$$r_1 = \frac{-18-24}{2} = -21$$

$$r_2 = \frac{-18+24}{2} = 3$$

Stąd:

$$a = 5 - (-21) = 26 \text{ lub } a = 5 - 3 = 2$$

Jeśli $a = 26$, to $b = 26 - 21 = 5$ i $c = 5 - 21 = -16$.

Jeśli $a = 2$, to $b = 2 + 3 = 5$ i $c = 5 + 3 = 8$.

Odpowiedź:

Szukane liczby to 26, 5, (−16) lub 2, 5, 8.

Teraz rozważymy problem odwrotny do zaprezentowanego w Przykładzie 1 – z wyrazów ciągu geometrycznego budujemy wyrazy ciągu arytmetycznego.

Przykład 2

W ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich, pierwszy wyraz jest równy 5. Pierwszy, trzeci i piąty wyraz tego ciągu to odpowiednio pierwszy, czwarty i szesnasty wyraz ciągu arytmetycznego. Znajdź różnicę tego ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie:

Rozważmy najpierw **ciąg geometryczny**, oznaczając jego iloraz przez q .

Wtedy:

5 – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego,

$5q^2$ – trzeci wyraz ciągu geometrycznego,

$5q^4$ – piąty wyraz ciągu geometrycznego.

Teraz zajmiemy się ciągiem arytmetycznym, oznaczając jego różnicę przez r .

5 – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego,

$5 + 3r$ – czwarty wyraz ciągu arytmetycznego,

$5 + 15r$ – szesnasty wyraz ciągu arytmetycznego.

Na podstawie treści zadania zapisujemy odpowiednie równości.

$$5q^2 = 5 + 3r$$

$$5q^4 = 5 + 15r$$

Z tak otrzymanego układu równań wyznaczymy najpierw iloraz ciągu geometrycznego.

W tym celu dzielimy obie strony drugiego z równań przez 5 i odejmujemy równania stronami.

$$- \begin{cases} 5q^2 = 5 + 3r \\ q^4 = 1 + 3r \end{cases}$$

$$q^4 - 5q^2 + 4 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie dwukwadratowe. Stosujemy podstawienie: $t = q^2$, $t > 0$.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$$

$$t_1 = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

Obie uzyskane liczby są dodatnie, zatem:

$q = 1$ lub $q = 2$ (pamiętamy, że wyrazy rozpatrywanego ciągu geometrycznego są dodatnie).

Jeśli $q = 1$ to $5 \cdot 1 = 5 + 3r$ i $r = 0$.

Jeśli $q = 2$ to $5 \cdot 4 = 5 + 3r$ i $r = 5$.

Odpowiedź:

Różnica ciągu arytmetycznego jest równa 0 lub 5.

Trzeci typ zadań związanych z ciągiem geometrycznym i arytmetycznym polega na znalezieniu takich liczb, z których niektóre są wyrazami ciągu arytmetycznego, a niektóre geometrycznego.

Przykład 3

Dane są liczby 4, x , y , 18. Trzy pierwsze (w podanej kolejności) tworzą **ciąg arytmetyczny**, a trzy ostatnie (w podanej kolejności) tworzą **ciąg geometryczny**. Znajdziemy liczby x , y .

Rozwiązanie:

$(4, x, y)$ – ciąg arytmetyczny

Z zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego wynika, że:

$$x = \frac{4+y}{2}$$

$(x, y, 18)$ – ciąg geometryczny

Z zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego wynika, że:

$$y^2 = 18x$$

Do ostatniego z zapisanych równań podstawiamy wyznaczone wcześniej x .

$$y^2 = 18 \cdot \frac{4+y}{2}$$

$$y^2 - 9y - 36 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

$$\Delta = 81 + 144 = 225$$

$$y = \frac{9-15}{2} = -3 \text{ lub } y = \frac{9+15}{2} = 12$$

Wyznaczamy x .

$$\text{Jeśli } y = -3 \text{ to } x = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Jeśli } y = 12 \text{ to } x = \frac{4+12}{2} = 8.$$

Odpowiedź:

Szukane liczby to $\frac{1}{2}$ i (-3) lub 8 i 12.

Przyszła teraz kolej na ulubiony przez wszystkich typ zadań – czyli zadanie na dowodzenie.

Przykład 4

Wykaż, że jeśli liczby x, y, z dodatnie i różne od 1 tworzą ciąg geometryczny (w podanej kolejności), to liczby

$\frac{1}{\log_x k}, \frac{1}{\log_y k}, \frac{1}{\log_z k}$ ($k > 0, k \neq 1$), również w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny.

Dowód:

Z założenia wynika, że liczby x, y, z dodatnie i różne od 1 tworzą [ciąg geometryczny](#).

Zatem

$$y^2 = xz.$$

Logarytmujemy przy podstawie k obie strony zapisanej równości.

$$2 \cdot \log_k y = \log_k(xz)$$

Korzystamy z własności logarytmu iloczynu, a następnie dzielimy obie strony równości przez 2.

$$2 \cdot \log_k y = \log_k x + \log_k z$$

$$\log_k y = \frac{\log_k x + \log_k z}{2}$$

Z zależności między trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego wynika, że liczby $\log_k x, \log_k y, \log_k z$ tworzą (w podanej kolejności) ciąg arytmetyczny.

Ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu mamy:

$$\frac{1}{\log_x k} = \frac{1}{\frac{\log_k k}{\log_k x}} = \frac{\log_k x}{1} = \log_k x$$

W podobny sposób możemy wykazać, że

$$\frac{1}{\log_y k} = \log_k y \text{ i } \frac{1}{\log_z k} = \log_k z.$$

Czyli liczby $\frac{1}{\log_x k}$, $\frac{1}{\log_y k}$, $\frac{1}{\log_z k}$ tworzą ciąg arytmetyczny, c.n.d.

Przed nami ostatnie, najtrudniejsze zadanie, którego rozwiązanie wymaga nie tylko znajomości teorii związanej z ciągami, ale dobrego posługiwania się funkcjami trygonometrycznymi.

Przykład 5

Miary kątów pewnego trójkąta tworzą **ciąg arytmetyczny**. Długości boków tego trójkąta tworzą ciąg geometryczny. Znajdziemy miary kątów tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

α , β , γ – miary kątów trójkąta (w stopniach),

δ – różnica ciągu, który tworzą miary kątów trójkąta (w stopniach).

Przyjmując, że α jest najmniejszym kątem tego trójkąta, możemy zapisać:

$$\beta = \alpha + \delta$$

$$\gamma = \alpha + 2\delta$$

Ponieważ suma miar kątów trójkąta jest równa 180° , więc:

$$\alpha + \alpha + \delta + \alpha + 2\delta = 180^\circ$$

$$3\alpha + 3\delta = 180^\circ$$

$$\alpha + \delta = 60^\circ$$

Oznaczmy:

a , b , c – długości boków trójkąta, przy czym niech a będzie najkrótszym bokiem,

q – iloraz ciągu geometrycznego, który tworzą długości boków trójkąta ($q \geq 1$).

Wtedy:

$$b = aq$$

$$c = aq^2$$

Na podstawie twierdzenia sinusów (pamiętając, że naprzeciw najmniejszego kąta leży najkrótszy bok), zapisujemy:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{aq}{\sin(\alpha+\delta)} = \frac{aq^2}{\sin(\alpha+2\delta)}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{aq}{\sin 60^\circ} = \frac{aq^2}{\sin(120^\circ - \alpha)}$$

Otrzymujemy układ równań.

$$\begin{cases} q \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ q \sin(120^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} q^2 \end{cases}$$

Mnożymy stronami równania układu i dzielimy każdą ze stron przez q^2 .

$$\sin \alpha \cdot \sin(120^\circ - \alpha) = \frac{3}{4}$$

Korzystamy teraz ze wzoru: $\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$.

$$\cos(2\alpha - 120^\circ) - \cos 120^\circ = \frac{3}{2}$$

$$\cos(2\alpha - 120^\circ) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\cos(2\alpha - 120^\circ) = 1$$

$$2\alpha - 120^\circ = 0^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Ponieważ $\alpha + \delta = 60^\circ$, więc $\delta = 0^\circ$, czyli każdy z kątów trójkąta ma miarę 60° .

Odpowiedź:

Trójkąt jest równoboczny, każdy kąt ma miarę 60° .

Słownik

ciąg arytmetyczny

ciągami arytmetycznymi nazywamy ciągi liczbowe co najmniej trzywyrazowe, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu

ciąg geometryczny

ciągami geometrycznymi nazywamy ciągi liczbowe co najmniej trzywyrazowe, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego

| przez liczbę q , zwaną ilorazem ciągu

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem. Rozwiąż najpierw samodzielnie podane przykłady, a następnie porównaj z prezentowanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D5iuWrPOP>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zagadnienia ciągu geometrycznego i arytmetycznego.

Polecenie 2

Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 14. Jeśli od trzeciego wyrazu odejmiemy 2, nie zmieniając dwóch poprzednich wyrazów, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Znajdź te liczby.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Znajdź taką liczbę x , dla której ciąg $(7x - 2, 3x, x + 1)$ jest ciągiem geometrycznym i jednocześnie jest ciągiem arytmetycznym.

Ćwiczenie 8



Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli trzecią z tych liczb zwiększymy o kwadrat liczby 8, to liczby utworzą ciąg geometryczny. Jeżeli zmniejszymy drugi wyraz ciągu arytmetycznego o 8, to otrzymamy również ciąg geometryczny. Znajdź wyrazy tych ciągów.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciąg geometryczny i arytmetyczny

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego do znajdowania wielkości związanych z tymi ciągami
- rozwija umiejętności stosowania zależności między wyrazami ciągu arytmetycznego oraz wyrazami ciągu geometrycznego
- stosuje zintegrowaną wiedzę matematyczną do rozwiązywania problemów związanych z ciągami liczbowymi
- prowadzi rozumowanie kilkietapowe do dowodzenia twierdzeń

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- okienko informacyjne
- analiza przypadku

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego
- praca indywidualna

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w grupach, metodą okienek informacyjnych, przypominają wiadomości związane z ciągiem arytmetycznym i ciągiem geometrycznym – w każdym okienku powinna znaleźć się jedna informacja.
2. Grupy krótko prezentują swoje pomysły – wykonane plakaty umieszczają na ścianach klasy tak, aby można było je wielokrotnie wykorzystać.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć i i wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w 5 grupach. Metodą analizy przypadku zapoznają się materiałami zamieszczonymi w sekcji „Przeczytaj”, oraz oglądają animację. Przy czym każda grupa zapoznaje się tylko z jednym przykładem.
2. Teraz przedstawiciele grup prezentują zadania, które analizowali, tłumacząc i pokazując ich rozwiązania tak, aby pozostali uczniowie nauczyli się rozwiązywać zadania danego typu.
3. Kończącym elementem tej części lekcji jest ułożenie krótkiego planu rozwiązania zadania z ciągiem geometrycznym i arytmetycznym.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 4 z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji. Uczniowie ci również dokonują oceny koleżeńskej prac grup i samooceny.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Ciągi – własności ciągów arytmetycznych](#)
- [Ciąg geometryczny](#)

Wskazówki metodyczne:

Z filmem samouczkiem i materiałami z sekcji „Przeczytaj”, wybrani uczniowie mogą zapoznać się w domu i w czasie zajęć występować w charakterze ekspertów.