



## Wartość oczekiwana

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Wartość oczekiwana

Źródło: Micheile Henderson, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Słowo ryzyko kojarzy nam się z reguły z czymś niebezpiecznym, wręcz groźnym. A przecież często bez ryzyka nie ma szans na pozytywną zmianę i sukces. Kluczowym elementem jest więc identyfikacja nagrody za podejmowane ryzyko. Głównymi wskaźnikami są tu: wskaźnik zysk – ryzyko i wartość oczekiwana. Wskaźnik zysk – ryzyko jest bardzo prosty do wyznaczenia w operacjach finansowych. Dzielimy bowiem maksymalną kwotę, jaką możemy zarobić, przez maksymalną kwotę, jaką możemy stracić. Z reguły obliczenie tego wskaźnika nie daje nam jeszcze jednoznacznej odpowiedzi czy warto ryzykować. Określamy więc wartość oczekiwaną zysków. Jeżeli jest ona dodatnia – można zastanawiać się nad przystąpieniem do danej spółki,



Christiaan Huygens

Źródło: dostępny w internecie: [commons.wikimedia.org](https://commons.wikimedia.org/), domena publiczna.

inwestowaniem w dane przedsięwzięcie, czy podjęciem gry.

Pojęcie wartości oczekiwanej, które poznamy bliżej w tym materiale, jest wykorzystywane w teorii decyzji oraz teorii gier, jako jedno z podstawowych kryteriów dokonywania wyborów strategicznych.

Zagadnieniami związanymi z wartością oczekiwaną gry zajmował się siedemnastowieczny holenderski matematyk i fizyk Christiaan Huygens.

### Twoje cele

- Podasz przykłady zmiennych losowych.
- Określisz rozkład zmiennej losowej.
- Obliczysz wartość oczekiwaną zmiennej losowej.
- Zinterpretujesz wynik obliczeń wartości oczekiwanej.

# Przeczytaj

---

## Zmienna losowa

Bardzo często spotykamy się ze zdarzeniami, z którymi wiążą się pewne wartości liczbowe.

Na przykład:

- liczba telefonów, którą odbierzesz w przyszłą środę,
- liczba liści, które dzisiaj wiatr strąci z drzewa stojącego przed Twoim domem,
- suma liczb oczek, które wypadną w czasie rzutu czterema kostkami do gry.

Choć trudno określić konkretny wynik w rozważanych powyżej sytuacjach, jednak istnieje zakres wartości liczbowych (nie zawsze prosty do ustalenia), które dana wielkość może przyjmować. Na przykład suma liczb wyrzuconych oczek na czterech kostkach będzie zawsze nie mniejsza niż 4 i nie większa niż 24. Natomiast przyczyny, dla których każda z tych wielkości przyjmuje określoną wartość, są natury losowej.

Takie wielkości nazywamy **zmiennymi losowymi**. Zmienne losowe tradycyjnie oznaczamy dużymi literami:  $X, Y, Z$ .

Rozważmy następującą grę: rzucamy monetą. Jeśli wypadnie orzeł – płacimy 2 zł, jeśli wypadnie reszka – otrzymujemy 3 zł.

Modelem probabilistycznym opisanego doświadczenia jest para  $(\Omega, P)$ , gdzie  $\Omega = \{O, R\}$ ,  $P(O) = P(R) = 0,5$

Każdemu wynikowi tego doświadczenia  $\omega_i \in \Omega$ , gdzie  $i \in \{1, 2\}$  przyporządkowana jest pewna liczba  $x_k \in \{-2, 3\}$ , gdzie  $k \in \{1, 2\}$ .

Rozkład zmiennej losowej		
$\omega_i$	$O$	$R$
$x_k$	-2	3

W zbiorze  $\Omega$  określiliśmy więc pewną funkcję o wartościach rzeczywistych, przyjmowanych losowo. W rachunku prawdopodobieństwa funkcje określone na zbiorze  $\Omega$  (przyjmować będziemy, że jest to zbiór skończony) nazywa się zmiennymi losowymi.

### Definicja: Zmienna losowa

Każdą funkcję określoną na zbiorze skończonym  $\Omega$  o wartościach rzeczywistych nazywamy zmienną losową.

Rozpatrując zmienną losową, najczęściej interesuje nas jakie przyjmuje wartości i z jakim prawdopodobieństwem. Te informacje można przedstawić w postaci tabelki. W pierwszym wierszu tabelki wpisujemy wszystkie możliwe wartości przyjmowane przez zmienną, a w drugim – prawdopodobieństwa odpowiadające tym wartościom. Takie dane o zmiennej losowej nazywamy jej **rozkładem**.

### Przykład 1

W urnie są trzy kule białe i cztery zielone. Gracz wyciąga losowo jedną kulę. Jeśli wyciągnie kulę białą, to płaci 5 zł, jeśli zieloną to otrzymuje 4 zł.

W tabelce przedstawiamy rozkład zmiennej losowej modelu probabilistycznego tego doświadczenia.

Rozkład zmiennej losowej		
$x_i$	-5	4
$p_i$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

### Definicja: Rozkład zmiennej losowej

Rozkładem zmiennej losowej  $X$  nazywamy zbiór:

$$\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n)\},$$

gdzie:

$p_i$  – jest prawdopodobieństwem, z jakim **zmienna losowa**  $X$  przyjmuje wartość  $x_i$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, n$ .

W rozkładzie zmiennej losowej suma wszystkich prawdopodobieństw jest równa 1.

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Rozkład zmiennej losowej  $X$  zapisujemy też w postaci:

$$X \sim \{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n)\}$$

### Przykład 2

Rzucamy dwiema monetami. Podamy rozkład zmiennej losowej, która każdemu wynikowi przypisuje liczbę orłów, które mogą wypaść.

Rozkład zmiennej losowej			
$x_i$	0	1	2
$p_i$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

## Wartość oczekiwana

**Wartość oczekiwana** w prawdopodobieństwie (wartość średnia, przeciętna, nadzieja matematyczna) to wartość określająca spodziewany wynik doświadczenia losowego, przy założonym prawdopodobieństwie jego występowania. Na przykład w rzucie 100 razy monetą, oczekujemy, że 50 razy wypadnie orzeł i 50 reszka.

W statystyce, w populacji estymatorem wartości oczekiwanej w próbie jest z reguły średnia arytmetyczna, ale niekiedy też mediana czy moda.

#### Definicja: Wartość oczekiwana

Niech  $X$  będzie zmienną losową taką, że  $X \sim \{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n)\}$ .

Liczbę

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$$

nazywamy wartością oczekiwaną zmiennej losowej  $X$ .

Litera  $E$  w nazwie wartości oczekiwanej jest pierwszą literą francuskiego słowa *esperance* – nadzieja.

#### Przykład 3

Rzucamy dwiema kostkami w kształcie czworościanów foremnych, na ściankach których zapisane są liczby 1, 2, 3, 4. Jeżeli wypadnie suma oczek podzielna przez 6 wygrywamy 80 zł, w przeciwnym wypadku płacimy 16 zł. Obliczymy wartość oczekiwaną wygranej w tej grze.

Mamy zmienną losową  $X$ , której wartościami są liczby, będące kwotami wygranej.

Rozkład zmiennej losowej		
$x_i$	-16	80
$p_i$	$\frac{13}{16}$	$\frac{3}{16}$

Wartość oczekiwana w tej grze wynosi:

$$EX = -16 \cdot \frac{13}{16} + 80 \cdot \frac{3}{16} = -13 + 15 = 2$$

W tej grze „średnio” możemy oczekiwać wygranej w jednej grze w wysokości 2 zł.

Grę nazywamy **sprawiedliwą**, jeżeli jej **wartość oczekiwana** jest równa 0.

#### Przykład 4

Rzucamy kostką do gry. Jeżeli wypadnie liczba oczek mniejsza od 5 wygrywamy 10 zł, w przeciwnym razie płacimy  $a$  zł. Znajdziemy liczbę  $a$  wiedząc, że gra jest sprawiedliwa.

Rozkład zmiennej losowej

Rozkład zmiennej losowej		
$x_i$	$-a$	10
$p_i$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$

$$EX = -a \cdot \frac{2}{6} + 10 \cdot \frac{4}{6} = -\frac{2a}{6} + \frac{40}{6}$$

Gra ma być sprawiedliwa, zatem  $EX = 0$ .

$$-\frac{2a}{6} + \frac{40}{6} = 0$$

$$-2a = -40$$

$$a = 20$$

Odpowiedź:

Aby gra była sprawiedliwa, musielibyśmy płacić 20 zł w przypadku wyrzucenia liczby oczek większej od 4.

#### Przykład 5

Pudło zawiera 3 kule czerwone i 5 brązowych. Gra polega na jednoczesnym losowaniu trzech kul z pudła. Za każdą wylosowaną kulę brązową gracz otrzymuje  $y$  zł, a za każdą wylosowaną kulę czerwoną płaci  $z$  zł. Oznaczmy przez  $X$  zmienną losową, opisującą wygraną gracza. Określmy związki między liczbami  $y, z$  przy których gra będzie sprawiedliwa, korzystna, niekorzystna dla gracza.

Przy jednoczesnym losowaniu trzech kul z danego pudła, liczba wszystkich zdarzeń elementarnych to:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$$

Losując trzy kule można wylosować:

- 0 kul brązowych (same czerwone) z prawdopodobieństwem  $\frac{\binom{3}{3}}{56} = \frac{1}{56}$ ,
- jedną kulę brązową (i dwie czerwone) z prawdopodobieństwem  $\frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{2}}{56} = \frac{15}{56}$ ,
- dwie kule brązowe (i jedną czerwoną) z prawdopodobieństwem  $\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1}}{56} = \frac{30}{56}$ ,
- trzy kule brązowe z prawdopodobieństwem  $\frac{\binom{5}{3}}{56} = \frac{10}{56}$ .

Zapisujemy rozkład zmiennej  $X$ .

Rozkład zmiennej losowej				
$x_i$	$-3z$	$y + (-2z)$	$2y + (-z)$	$3y$
$p_i$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

Obliczamy wartość oczekiwaną zmiennej  $X$ .

$$EX = -3z \cdot \frac{1}{56} + [y + (-2z)] \cdot \frac{15}{56} + [2y + (-z)] \cdot \frac{30}{56} + 3y \cdot \frac{10}{56}$$

$$EX = \frac{105y - 63z}{56} = \frac{15y - 9z}{8}$$

Gra będzie sprawiedliwa, jeżeli  $EX = 0$ , czyli  $\frac{15y - 9z}{8} = 0$ .

$$\frac{15y - 9z}{8} = 0$$

$$15y - 9z = 0$$

$$z = \frac{15}{9}y = \frac{5}{3}y$$

Gra będzie korzystna dla gracza, jeżeli  $EX > 0$ , czyli gdy  $z < \frac{5}{3}y$ .

Gra będzie niekorzystna dla gracza, jeżeli  $EX < 0$ , czyli gdy  $z > \frac{5}{3}y$ .

Odpowiedź:

Gra będzie sprawiedliwa, gdy  $z = \frac{5}{3}y$ , korzystna dla gracza, gdy  $z < \frac{5}{3}y$ , niekorzystna dla gracza, gdy  $z > \frac{5}{3}y$ .

## Słownik

### zmienna losowa

każdą funkcję określoną na zbiorze skończonym  $\Omega$  o wartościach rzeczywistych nazywamy zmienną losową

### wartość oczekiwana

niech  $X$  będzie zmienną losową taką, że  $X \sim \{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n)\}$ ; liczbę

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$$

nazywamy wartością oczekiwaną zmiennej losowej  $X$

# Prezentacja multimedialna

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, która przybliży Ci zagadnienia związane z wartością oczekiwaną. Postaraj się najpierw samodzielnie rozwiązać prezentowane tam problemy, a następnie porównaj z zamieszczonymi w prezentacji.

## Polecenie 2

Cena pewnego towaru waha się. Przyjmuje raz w tygodniu (6 dni) wartość 12 zł, trzy razy w tygodniu wartość 24 zł i dwa razy 6 zł. Oblicz oczekiwaną cenę tego towaru.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Rzucamy cztery razy monetą. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe liczbie reszek, które wypadły w tych rzutach. W tabelce przedstawiono jej rozkład.

Rozkład zmiennej losowej					
$x_i$	0	1	2	3	4
$p_i$	$\frac{1}{16}$	$a$	$b$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Ćwiczenie 6



Na niesymetrycznej monecie orzeł pojawia się średnio w 60% rzutów. Grasz w następującą grę. Rzucasz raz tą monetą. Jeżeli wypadnie orzeł – płacisz 2 zł. Jeżeli wypadnie reszka – otrzymujesz 3 zł.

Wskaż prawidłowe odpowiedzi.

### Ćwiczenie 7



Niech  $X$  będzie zmienną losową przyjmującą wartości równe liczbie sukcesów w jednej próbie Bernoulliego. Oznaczmy przez  $p$  prawdopodobieństwo sukcesu w tej próbie. Znajdź wartość oczekiwaną zmiennej  $X$ .

### Ćwiczenie 8



W koszyku znajduje się nie mniej niż sześć kul, w tym trzy białe. Z koszyka wyciągamy od razu trzy kule. Niech  $X$  oznacza liczbę wyciągniętych kul białych. Oblicz, ile jest wszystkich kul w koszyku, jeśli wartość oczekiwana zmiennej losowej  $X$  jest równa  $\frac{3}{2}$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Wartość oczekiwana**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;

5) oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- podaje przykłady zmiennych losowych
- określa rozkład zmiennej losowej
- oblicza wartość oczekiwaną zmiennej losowej
- interpretuje wynik obliczeń wartości oczekiwanej

- dobiera odpowiedni model matematyczny do rozwiązania problemu probabilistycznego z kontekstem realistycznym

### **Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

### **Metody i techniki nauczania:**

- zgaduj – zgadula
- gra dydaktyczna

### **Formy pracy:**

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- monety, kostki do gry

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Dwóch uczniów w domu przygotowało zagadki, których rozwiązaniami są podstawowe pojęcia, definicje, twierdzenia, własności prawdopodobieństwa poznane do tej pory przez uczniów.
2. Wstępną część zajęć prowadzą więc ci uczniowie. Pod ich kierunkiem, w formie zgaduj – zgaduli uczniowie powtarzają i przypominają sobie wiadomości i umiejętności probabilistyczne.
3. Warto, aby dla najaktywniejszych uczniów przygotowane były nagrody – niekoniecznie w formie dobrych ocen.
4. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie pracują w grupach. Zadaniem każdej grupy jest wymyślenie gry – z użyciem monet lub kostek do gry – która w ich przekonaniu będzie sprawiedliwa i takiej, która w ich przekonaniu będzie niesprawiedliwa.
2. Grupy prezentują swoje dokonania. Dyskusja – jaką grę można uznać za sprawiedliwą, a jaką nie. Jak to sprawdzić.
3. Swoje przypuszczenia uczniowie sprawdzają, zapoznając się z materiałem zapisanym w sekcji „Przeczytaj” i prezentowanym w prezentacji multimedialnej.

4. Teraz każda z grup dokonuje ewentualnych modyfikacji wymyślonych przez siebie wcześniej gier. Grupy wymieniają się grami. Każda grupa oblicza wartość oczekiwaną wygranej w otrzymanych grach. Następnie co najmniej 10 razy gra w każdą z otrzymanych gier (jeśli to będzie możliwe), zapisuje wyniki i porównuje z obliczeniami.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Przedstawiciele grup omawiają wyniki prac swoich grup. Dyskusja – czy i dlaczego obliczenia teoretyczne nie zawsze pokrywają się z rzeczywistymi wynikami gry.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i osób, które przygotowały i prowadziły zgaduj – zgadulę.

#### **Praca domowa:**

Uczniowie wykonują w domu ćwiczenia interaktywne.

#### **Materiały pomocnicze:**

[Własności prawdopodobieństwa](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

Prezentację multimedialną można wykorzystać w czasie zajęć ze statystyki, omawiając zagadnienia związane ze średnimi.