Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

Źródło: Ralph Ravi Kayden, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Odlewniczy chce wykonać model żeliwnego żelazka w kształcie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego. Ile materiału zużyje na wykonanie tego modelu?

Podczas dzisiejszej lekcji dowiesz się jak łatwo i sprawnie rozwiązać tego typu problemy. Dowiesz się również czym jest i w jaki sposób obliczyć pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.

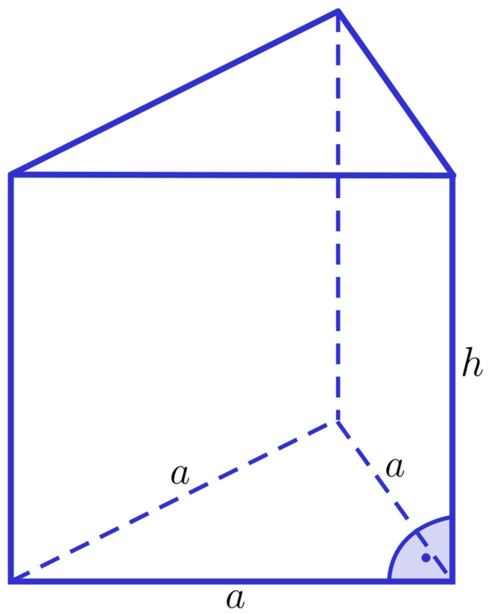
Twoje cele

- Dowiesz się co to jest pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.
- Dowiesz się jak obliczać pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego trójkątnego z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Przeczytaj

Wśród ścian graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wyróżniamy dwie podstawy i trzy ściany boczne. Sumę powierzchni ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego trójkątnego nazywamy jego powierzchnią boczną. Zatem powierzchnia boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest sumą prostokątów, a sumę pól tych prostokątów nazywamy polem powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego. Podstawami graniastosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkąty równoboczne, a sumę ich pól nazywamy polem podstaw graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.

Definicja: Pole powierzchni całkowitej



Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego definiujemy jako sumę pól jego podstaw i pola powierzchni bocznej. Wobec tego pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe polu jego siatki. Zależność tę opisuje wzór:

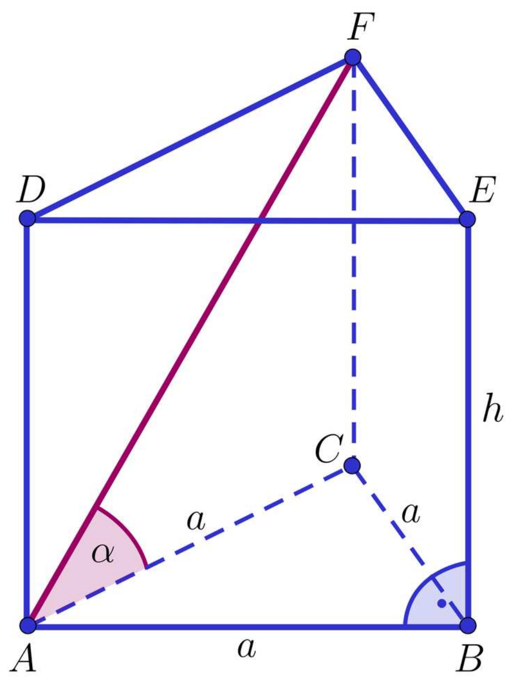
$$P_{pc} = 2P_p + P_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah$$

gdzie h jest długością wysokości graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, a jest długością krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.

Przykład 1

Obliczymy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego dla którego przekątna ściany bocznej ma długość $0,5$ i jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem, którego tangens jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie:



Niech $a > 0$ oznacza długość krawędzi podstawy oraz $h > 0$ długość wysokości rozważanego graniastosłupa.

Z warunków zadania mamy kolejno

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|FC|}{|AC|}$,

$\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ACF podstawiając jednocześnie zależność $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Otrzymujemy kolejno

$a^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{4}$,

$a^2 = \frac{1}{7}$,

$a = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

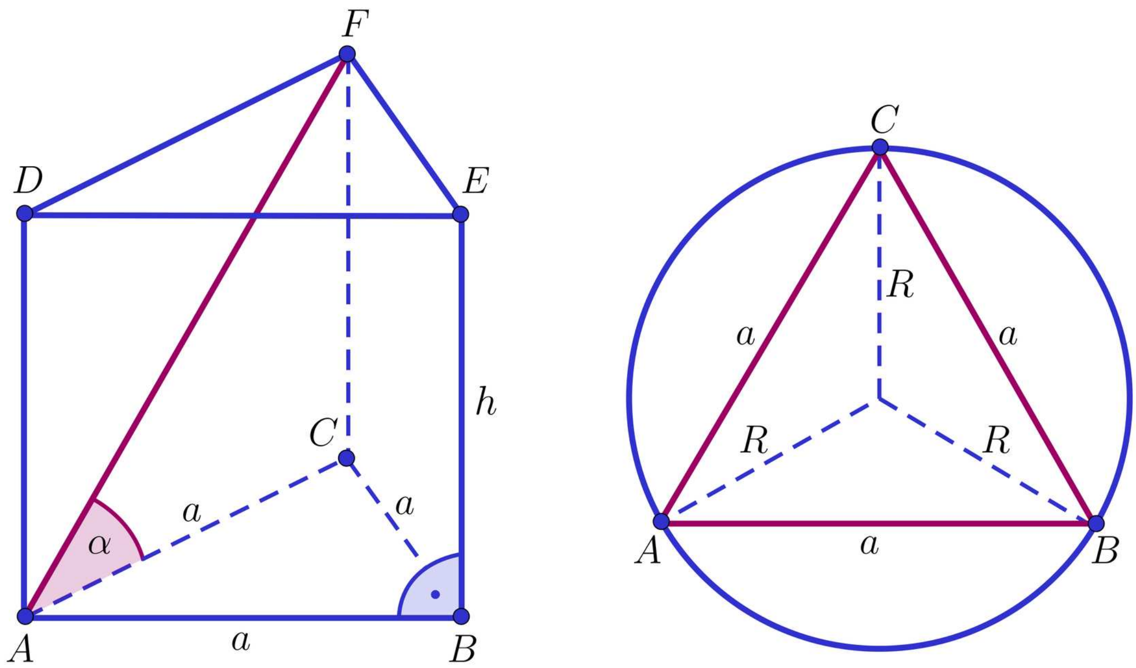
Stąd $h = \frac{\sqrt{21}}{14}$. Możemy obliczyć pole powierzchni całkowitej naszego graniastosłupa

$P_{pc} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah = \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{2\sqrt{3}}{7}$.

Przykład 2

O graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wiadomo, że kosinus kąta między przekątną ściany bocznej i krawędzią podstawy wynosi $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ oraz promień okręgu opisanego na podstawie graniastosłupa wynosi $4\sqrt{3}$. Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Rozwiązanie:



Niech $a > 0$ oznacza długość krawędzi podstawy, $h > 0$ długość wysokości oraz $d > 0$ długość przekątnej ściany bocznej rozważanego graniastosłupa. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym stanowi $\frac{2}{3}$ wysokości podstawy graniastosłupa, zatem otrzymujemy $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4\sqrt{3}$, czyli $a = 12$.

Z warunków zadania mamy

$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AF|}$,

$\frac{a}{d} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\frac{12}{d} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$d = 4\sqrt{10}$.

Wyliczymy teraz długość wysokości graniastosłupa. Zastosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ACF. Otrzymujemy kolejno

$d^2 = a^2 + h^2,$

$160 = 144 + h^2,$

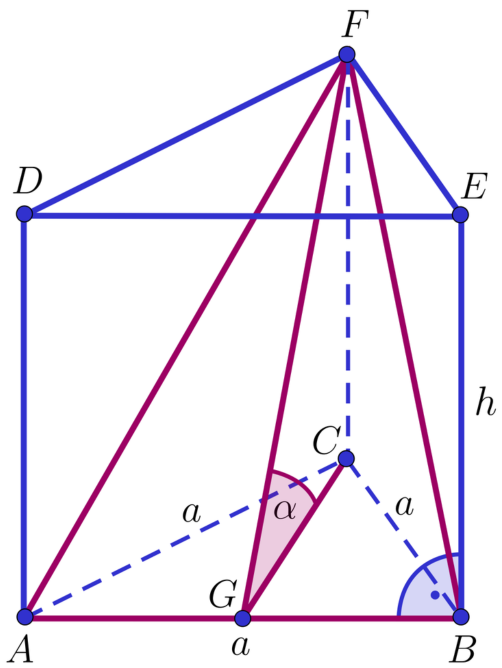
$h = 4.$

Możemy obliczyć pole powierzchni całkowitej naszego graniastosłupa

$P_{pc} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah = \frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 12 \cdot 4 = 72\sqrt{3} + 144.$

Przykład 3

Graniastosłup prawidłowy trójkątny o objętości $24\sqrt{3}$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i jeden z wierzchołków drugiej podstawy, tak, że tworzy ona z płaszczyzną podstawy kąt, którego $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



Rozwiązanie:

Niech $a > 0$ oznacza długość krawędzi podstawy oraz $h > 0$ długość wysokości rozważanego graniastosłupa. Z warunków zadania mamy kolejno

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|FC|}{|GC|},$

$\frac{h}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3},$

$h = \frac{3}{2}a.$

Następnie mamy

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h,$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{2}a = 24\sqrt{3},$

$\frac{3a^3\sqrt{3}}{8} = 24\sqrt{3},$

$a^3 = 64,$

$a = 4.$

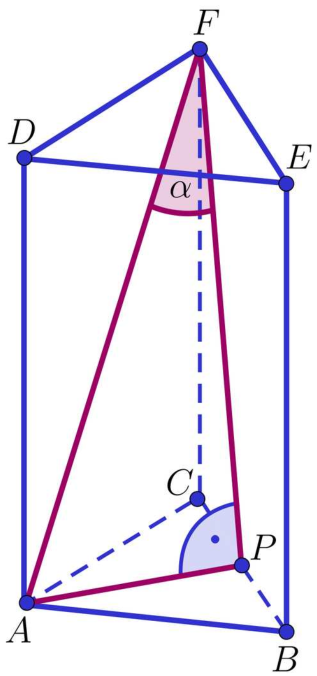
Wyliczymy teraz długość wysokości graniastosłupa $h = \frac{3}{2}a = 6$. Możemy obliczyć pole powierzchni całkowitej naszego graniastosłupa

$P_{pc} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 4 \cdot 6 = 8\sqrt{3} + 72.$

Przykład 4

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym sinus kąta jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną wynosi $\frac{1}{4}$. Objętość graniastosłupa jest równa $\frac{\sqrt{33}}{4}$. Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Rozwiązanie:



Niech $a > 0$ oznacza długość krawędzi podstawy, $h > 0$ długość wysokości oraz $d > 0$ długość przekątnej ściany bocznej rozważanego graniastosłupa. Trójkąt APF jest prostokątny. Odcinek $|CP| = \frac{1}{2}a$ oraz $|AP| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Z warunków zadania mamy kolejno

$\sin\alpha = \frac{|AP|}{|AF|}$,

$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{d} = \frac{1}{4}$,

$d = 2\sqrt{3}a$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACF mamy

$d^2 = a^2 + h^2$,

$a^2 + h^2 = 12a^2$,

$h = \sqrt{11}a$.

Możemy wyliczyć długość krawędzi podstawy. Otrzymujemy

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h$,

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{11}a = \frac{\sqrt{33}}{4}$,

$a^3 = 1$,

$a = 1$.

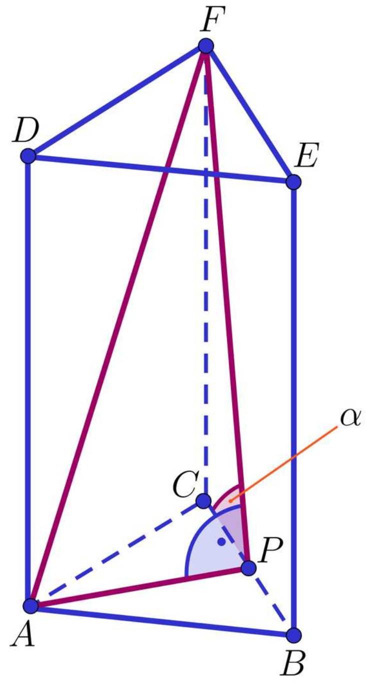
Wyliczymy teraz długość wysokości graniastosłupa $h = \sqrt{11}a = \sqrt{11}$. Możemy obliczyć pole powierzchni całkowitej naszego graniastosłupa

$P_{pc} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah = \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{11} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{11}$.

Przykład 5

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCDEF$ poprowadzono płaszczyznę π przechodzącą przez wysokość dolnej podstawy AP, gdzie P jest spodkiem wysokości i wierzchołek F górnej podstawy, tak, że płaszczyzna π tworzy z płaszczyzną podstawy kąt którego tangens jest równy $2\sqrt{3}$. Pole przekroju graniastosłupa wyznaczonego przez płaszczyznę π jest równe $8\sqrt{39}$. Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Rozwiązanie:



Niech $a > 0$ oznacza długość krawędzi podstawy, $h > 0$ długość wysokości oraz $d > 0$ długość przekątnej ściany bocznej rozważanego graniastosłupa. Trójkąt prostokątny APF jest przekrojem graniastosłupa wyznaczonym przez płaszczyznę π o przyprostokątnych $|AP| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz $|PF| = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}$. Z warunków zadania mamy

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|CF|}{|CP|}$,

$\frac{h}{\frac{a}{2}} = 2\sqrt{3}$,

$h = \sqrt{3}a$.

Wiemy ponadto, że

$\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2} = 8\sqrt{39}$.

Otrzymujemy kolejno

$\frac{a\sqrt{3}}{4}\sqrt{3a^2 + \frac{1}{4}a^2} = 8\sqrt{39}$

$\frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{2} = 8\sqrt{39}$,

$\frac{a^2\sqrt{39}}{8} = 8\sqrt{39}$,

$a = 8$.

Wyliczymy teraz długość wysokości graniastosłupa $h = \sqrt{3}a = 8\sqrt{3}$. Możemy obliczyć pole powierzchni całkowitej naszego graniastosłupa

$P_{pc} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 8 \cdot 8\sqrt{3} = 224\sqrt{3}.$

Słownik

graniastosłup prawidłowy trójkątny

graniastosłup prosty, którego podstawą jest trójkąt równoboczny

siatka graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

przedstawienie graniastosłupa na płaszczyźnie, powstające poprzez “rozcięcie” niektórych jego krawędzi tak, aby dało się rozłożyć ściany na płaszczyźnie

twierdzenie Pitagorasa

w dowolnym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej tego trójkąta

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją 3D, a następnie wykonaj polecenia zamieszczone pod nią.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DVpTahv5t

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej pola powierzchni graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.

Polecenie 2

Polecenie 3

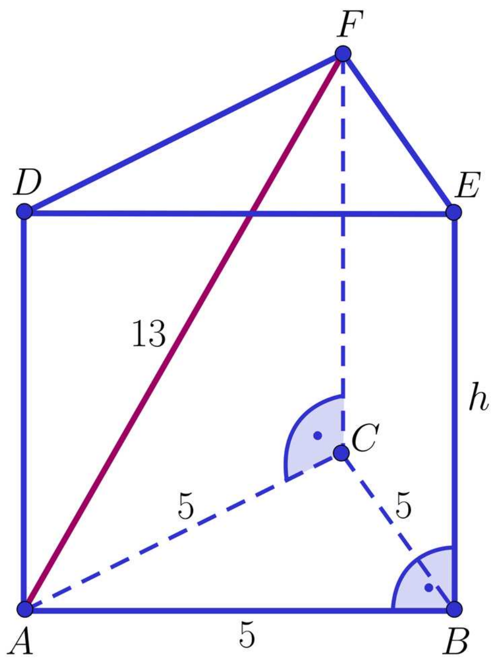
W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątna ściany bocznej o długości $2\sqrt{2}$ tworzy z wysokością graniastosłupa kąt 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

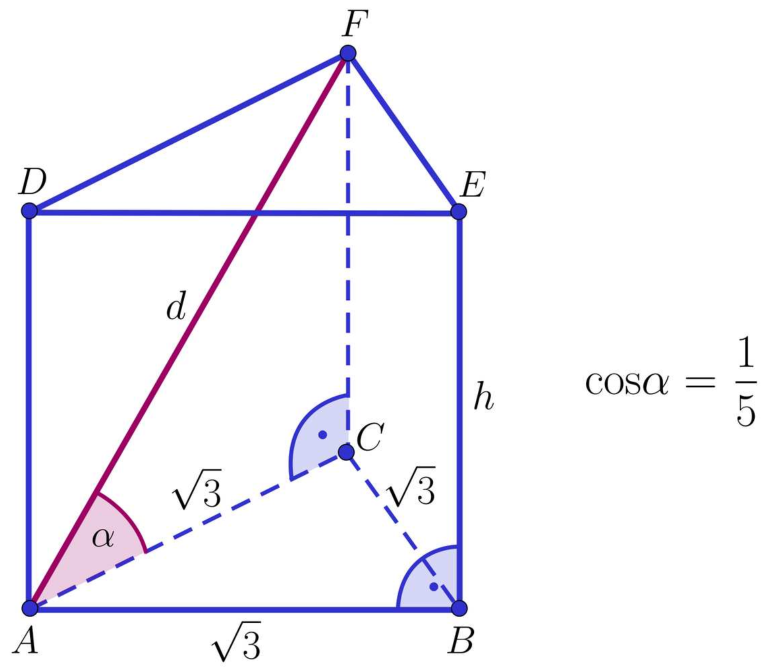
Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy trójkątny.



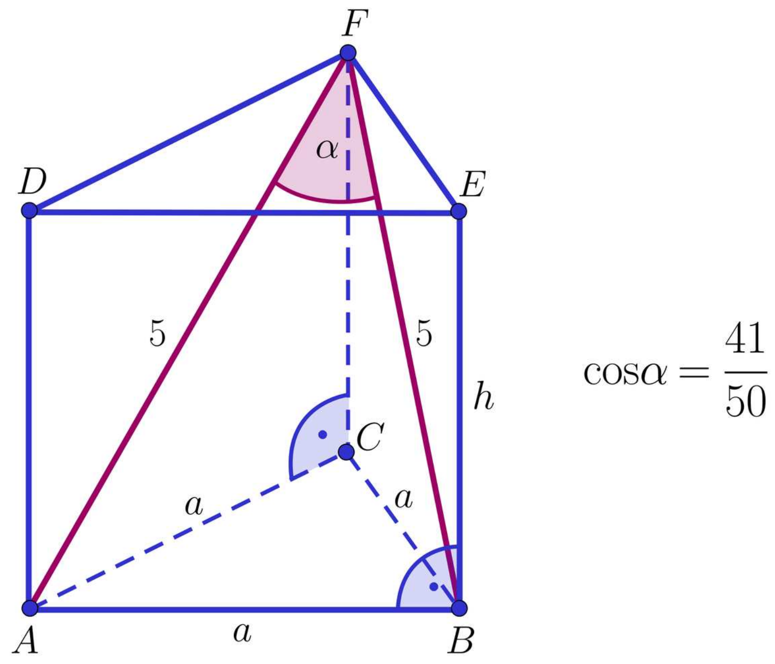
Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy trójkątny.



Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy trójkątny.

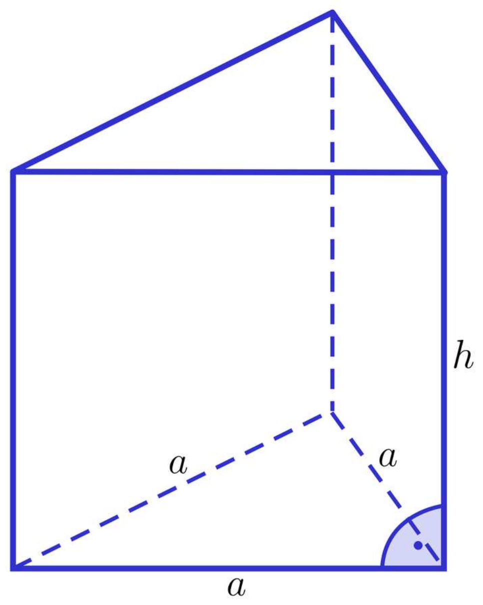


Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Na rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy trójkątny.



Ćwiczenie 7

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość d, a kąt jej nachylenia do krawędzi podstawy wynosi α. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 8

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątna ściany bocznej ma długość p, a wysokość podstawy ma długość d. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 9

Jaka powinna być długość krawędzi podstawy i wysokości graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego objętość jest równa $4\sqrt{3}$, a pole powierzchni całkowitej $2\sqrt{3} + 24$? Krawędź podstawy i wysokość są liczbami całkowitymi.

Ćwiczenie 10

Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $40,5$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Niemczynowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

zakres rozszerzony

VII. Trygonometria

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;

X. Stereometria

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;

- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna pojęcie graniastosłupa, graniastosłupa prostego, graniastosłupa prawidłowego,
- zna pojęcie pola powierzchni bocznej, pola powierzchni podstaw oraz pola powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego,
- opisuje podstawowe własności graniastosłupa prawidłowego trójkątnego,
- wykorzystuje podstawowe własności graniastosłupów prostych i prawidłowych do nieskomplikowanych obliczeń dotyczących obliczania jego pola powierzchni całkowitej,
- stosuje funkcje trygonometryczne oraz własności trójkątów prostokątnych do obliczania długości odpowiednich odcinków w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa
- dyskusja panelowa
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg zajęć:

Przed lekcją

- Uczniowie zapoznają się z treściami z poprzednich lekcji dotyczącymi graniastosłupów prawidłowych.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji o temacie: “Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego trójkątnego”.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3–4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z działu „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji “Animacja 3D”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1–2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
4. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 1–5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6–7 z działu „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa

Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Pole powierzchni graniastosłupa

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek można wykorzystać na lekcji o kątach i odcinkach w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym.