Dziedzina funkcji

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Dziedzina funkcji

Źródło: Daniel Clay, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wyznaczanie dziedziny funkcji jest bardzo ważną umiejętnością w nauce o funkcjach. Wiemy, że funkcję możemy opisać różnymi sposobami. W jaki sposób wyznaczamy dziedzinę funkcji liczbowej? W jaki sposób możemy wyznaczyć dziedzinę funkcji opisanej za pomocą grafu, tabelki lub zbioru par uporządkowanych? Jak wyznaczamy dziedzinę funkcji, gdy znamy jej opis słowny? Czy jest specjalny sposób wyznaczania dziedziny funkcji opisanej za pomocą wykresu lub wzoru? Poszukamy odpowiedzi na te pytania w poniższym materiale.

Twoje cele

- Wyznaczysz dziedzinę funkcji opisanej za pomocą wzoru, tabelki, grafu, opisu słownego lub zbioru par uporządkowanych.
- Wyznaczysz dziedzinę funkcji liczbowej opisanej za pomocą wykresu, tabelki lub wzoru.
- Odczytasz z wykresu funkcji liczbowej dziedzinę funkcji.

Przeczytaj

Definicja funkcji

Podczas lekcji będziemy się często powoływać na definicję funkcji. Przypomnijmy ją.

> **Definicja: Funkcja**
>
> Dane są dwa niepuste zbiory X i Y.
>
> Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi x ze zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element y ze zbioru Y.

Symbolicznie oznaczamy $f: X \to Y$ i czytamy „funkcja f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y”.

- Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f, a jego elementy argumentami funkcji f.
- Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji f.

Dziedzinę funkcji oznaczamy symbolicznie D_f.

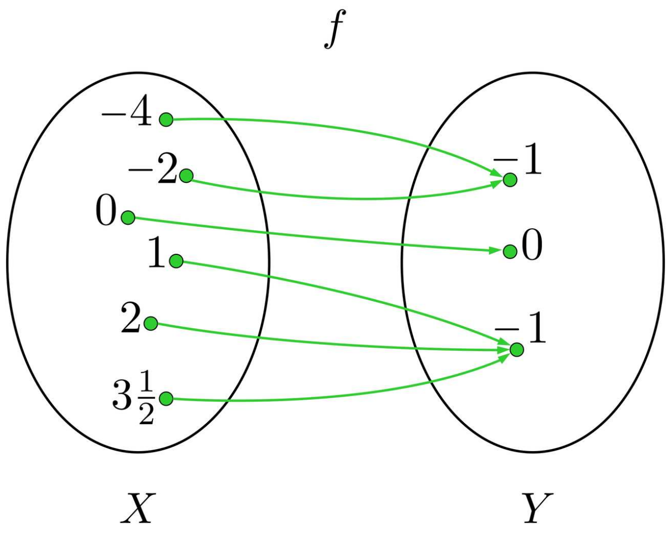
Funkcje możemy opisywać na wiele sposobów. Dla każdego z tych opisów pokażemy sposób wyznaczania dziedziny.

Funkcja opisana słownie

> **Przykład 1**
>
> Funkcja f opisana jest słownie.
>
> Funkcja f każdej liczbie naturalnej x takiej, że $x \in \langle 27,\ 39 \rangle$ przyporządkowuje jej największy dzielnik, który jest liczbą pierwszą.
>
> **Rozwiązanie:**
>
> Z opisu funkcji możemy odczytać, że dziedziną tej funkcji są liczby naturalne należące do przedziału $\langle 27,\ 39 \rangle$.
>
> Symbolicznie możemy zapisać $D_f = \{27,\ 28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36,\ 37,\ 38,\ 39\}$.

Funkcja opisana grafem

> **Przykład 2**
>
> Funkcja f opisana jest za pomocą grafu.



Rozwiązanie:

Analizując graf odczytujemy dziedzinę funkcji.

Do dziedziny funkcji należą elementy umieszczone w lewej części grafu.

Stąd $D_f = \left\{-4,\ -2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\frac{1}{2}\right\}$.

Przykład 3

Funkcja f opisana jest za pomocą tabelki.

x	$-3\sqrt{3}$	$-2\sqrt{2}$	-1	0	$\sqrt{2}$	3	$2\sqrt{5}$	6	$8\sqrt{2}$
$f(x)$	27	8	1	0	2	9	20	36	128

Rozwiązanie:

Do dziedziny funkcji należą liczby zapisane w pierwszym wierszu tabelki.

Stąd $D_f = \left\{-3\sqrt{3},\ -2\sqrt{2},\ -1,\ 0,\ \sqrt{2},\ 3,\ 2\sqrt{5},\ 6,\ 8\sqrt{2}\right\}$.

Przykład 4

Funkcja f opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych.

$$\left\{\left(-4\frac{2}{3},\ -2\right),\left(-3\frac{3}{7},\ -4\right),\left(-\frac{2}{9},\ -\frac{4}{11}\right),\left(-1,\ -\frac{5}{6}\right),\left(2\frac{3}{4},\ 5\right),\left(3\frac{3}{8},\ 6\frac{4}{5}\right),\left(4,\ 7\frac{3}{5}\right),\left(6\frac{1}{5},\ 8\frac{4}{7}\right)\right\}$$

Rozwiązanie:

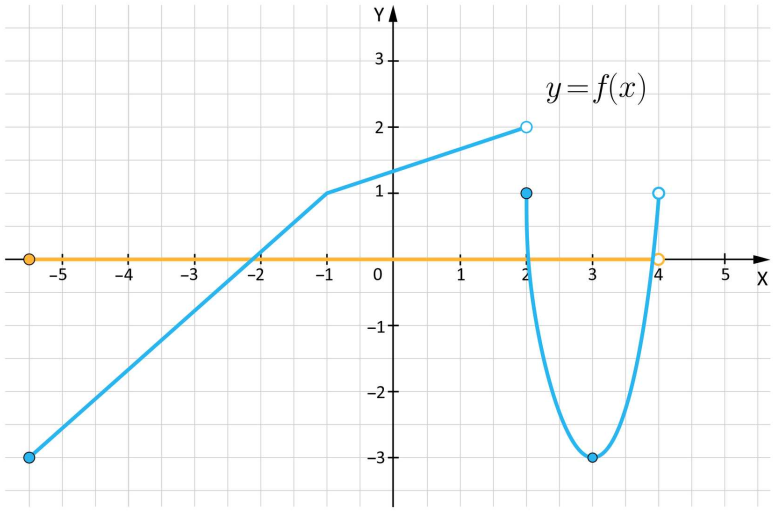
Każda para uporządkowana jest postaci $(x,\ f(x))$.

Dziedzinę funkcji tworzą wszystkie liczby, które są umieszczone na pierwszym miejscu w każdej parze.

Stąd $D_f = \left\{-4\frac{2}{3}, -3\frac{3}{7}, -\frac{2}{9}, -1, 2\frac{3}{4}, 3\frac{3}{8}, 4, 6\frac{1}{5}\right\}$.

Przykład 5

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Rozwiązanie:

Wiadomo, że wykres funkcji w prostokątnym układzie współrzędnych, to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych $(x,\ f(x))$, gdzie x jest argumentem funkcji, a $f(x)$ wartością funkcji dla argumentu x.

W celu odczytania z wykresu funkcji dziedziny tej funkcji należy odczytać wszystkie pierwsze współrzędne punktów wykresu.

Wyobraźmy sobie, że wszystkie pierwsze współrzędne punktów wykresu rzutujemy prostopadle na oś X. Na osi X tworzy nam się zbiór wszystkich argumentów funkcji f, czyli dziedzina funkcji.

W przypadku narysowanego wykresu otrzymujemy $D_f = \langle -5{,}5;\ 4)$.

Funkcję możemy opisać za pomocą wzoru. Bardzo często podawany jest tylko wzór funkcji. W jaki sposób możemy wyznaczyć dziedzinę tak określonej funkcji?

Przez dziedzinę funkcji opisanej wzorem rozumiemy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których są wykonalne wszystkie działania zapisane we wzorze funkcji. Oznacza to, że dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których można obliczyć wartość funkcji.

Przykład 6

Rozpatrzymy następujące funkcje opisane wzorami. Określimy dziedzinę każdej z tych funkcji.

a) $f(x) = -2x + 5$

b) $f(x) = \sqrt{x+3}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x-4}$

d) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x-6}}$

Rozwiązanie:

Ad. a)

W zbiorze liczb rzeczywistych wykonalne jest mnożenie i dodawanie, tzn., każdą liczbę rzeczywistą możemy pomnożyć przez (-2) oraz do wyniku dodać liczbę pięć. Wynik tego działania też będzie liczbą rzeczywistą. Stąd wnioskujemy, że dziedziną funkcji $(x) = -2x + 5$ jest zbiór liczb rzeczywistych i zapisujemy $D_f = \mathbb{R}$.

Ad. b)

Pierwiastek kwadratowy możemy obliczyć tylko wtedy, gdy liczba podpierwiastkowa jest liczbą rzeczywistą nieujemną. Wynika z tego, że wartość funkcji f możemy obliczyć wtedy, gdy spełniona jest nierówność

$x+3 \geq 0$, czyli wtedy, gdy $x \geq -3$.

Dziedziną funkcji $f(x)=\sqrt{x+3}$ jest przedział $\langle -3,\ \infty)$.

Zapisujemy, że $D_f = \langle -3,\ \infty)$.

Ad. c)

Dowolną liczbę rzeczywistą można podnieść do sześcianu, od każdej liczby rzeczywistej można odjąć liczbę cztery, dzielenie sześcianu liczby rzeczywistej przez $x-4$ jest możliwe tylko wtedy, gdy $x-4 \neq 0$. W zbiorze liczb rzeczywistych dzielenie przez 0 jest niewykonalne.

Otrzymujemy: $x \neq 4$.

Dziedziną funkcji $(x)=\frac{x^3}{x-4}$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, czyli $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Ad. d)

Określając dziedzinę tej funkcji należy uwzględnić objaśnienia z poprzednich podpunktów, tzn. $x-6 \geq 0$ i $x-6 \neq 0$.

Warunki te można zastąpić jedną nierównością: $x-6>0$.

Stąd wynika, że $x>6$, czyli $D_f=(6,\ \infty)$.

Ważne!

Określając dziedzinę funkcji opisanej za pomocą wzoru musimy pamiętać, że:

- pierwiastki stopnie parzystego można obliczać tylko z liczb rzeczywistych nieujemnych.
- mianownik ułamka musi być zawsze liczbą różną od 0.

Słownik

funkcja

funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi x ze zbioru X odpowiada dokładnie jeden element y ze zbioru Y

Animacja

Polecenie 1

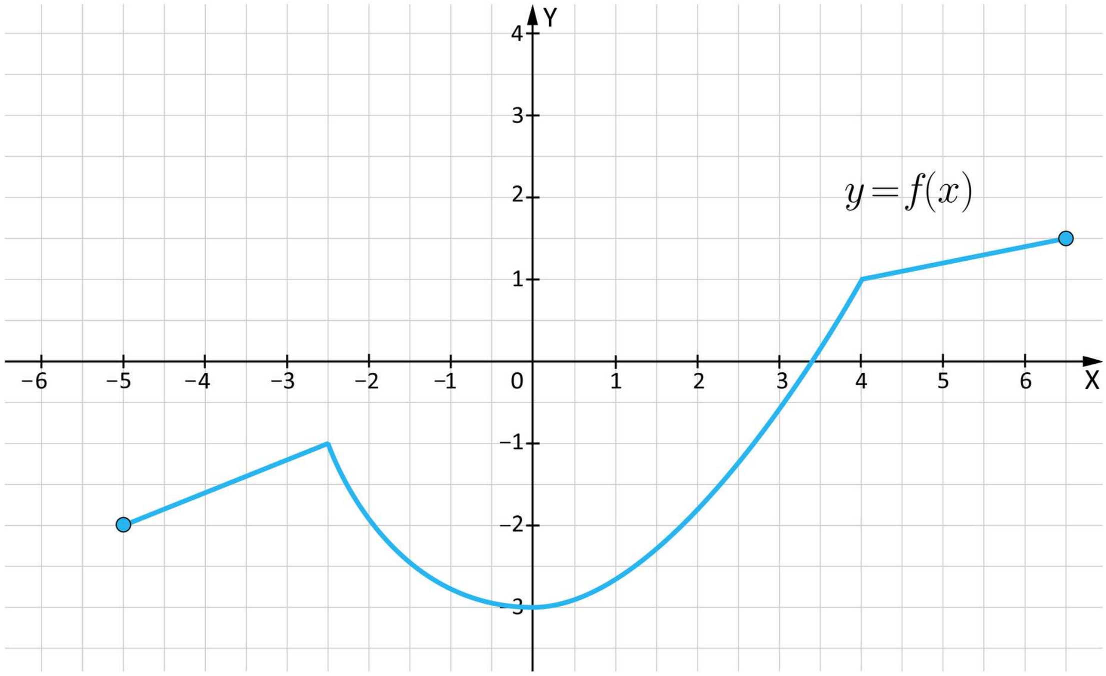
Przeanalizuj uważnie animację. Zastanów się w jaki sposób wyznaczamy dziedzinę funkcji opisanej różnymi sposobami. Po obejrzeniu animacji wykonaj samodzielnie wskazane polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DLNbJH9ZB

Film nawiązujący do treści materiału o dziedzinie funkcji.

Polecenie 2

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Odczytaj z wykresu dziedzinę tej funkcji.

Polecenie 3

Wyznacz dziedzinę funkcji f opisanej za pomocą wzoru.

$f(x) = \frac{x+3}{|x-4|-6}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

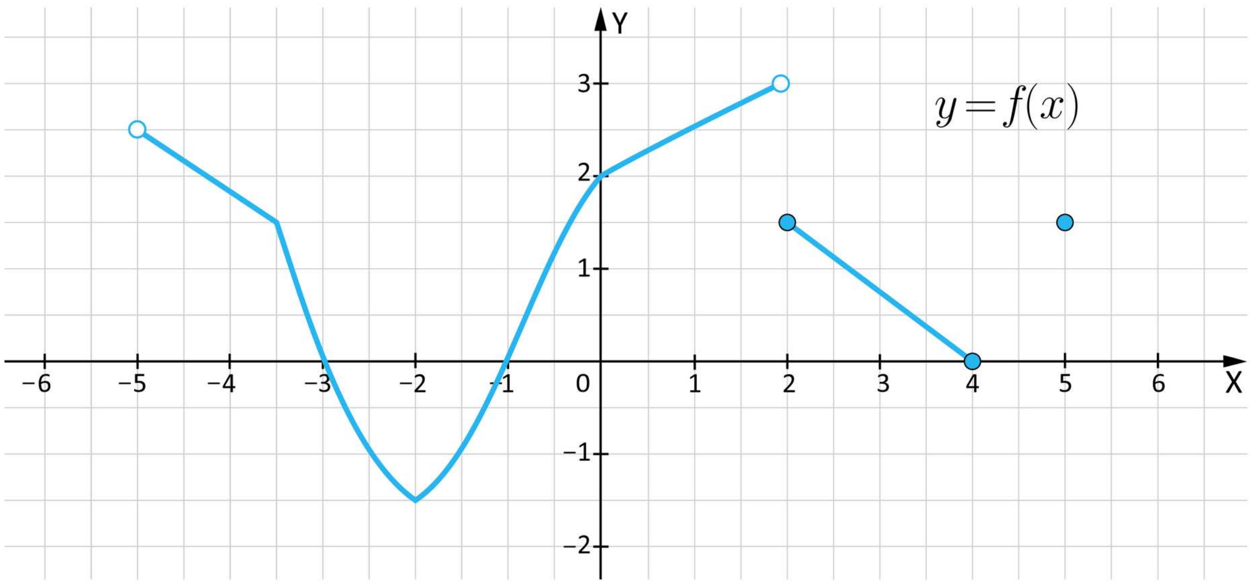
Ćwiczenie 2

Funkcja f opisana jest za pomocą tabelki. Wskaż dziedzinę funkcji f.

x	$-3\sqrt{3}$	-2	-1	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{8}$	2	$3\frac{2}{3}$
$f(x)$	$-\frac{\sqrt{3}}{9}$	$-\frac{1}{2}$	-1	5	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{11}$

Ćwiczenie 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu jak na rysunku poniżej.



Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Funkcja f opisana jest za pomocą tabelki.

x	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(x)$	3	4	6	8	12	14	18	20	24

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dziedzina funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odczytuje z wykresu dziedzinę funkcji
- oblicza dziedzinę funkcji opisanej wzorem
- podaje dziedzinę funkcji opisanej za pomocą grafu, tabelki lub zbioru par uporządkowanych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula
- konkurs zadaniowy

- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria sukcesu.
2. Uczniowie biorą udział w mini konkursie zadaniowym.
   Przykładowe zadania do rozwiązania.

Ćwiczenie 1.
Narysuj graf funkcji opisanej słownie.
Funkcja f każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej ze zbioru $\langle 11,\ 22\rangle$ przyporządkowuje sumę jej cyfr.

Ćwiczenie 2.
Narysuj wykres funkcji opisanej za pomocą tabelki.

x	-2	$-\frac{3}{4}$	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	2	$3\frac{4}{5}$	4
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 3.
Funkcja f opisana jest wzorem $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Podaj współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią Y.

Po zakończeniu konkursu nauczyciel omawia rozwiązania zadań i ocenia pracę uczniów. Trzej uczniowie, którzy rozwiązali zadania najszybciej i uzyskali prawidłowe wyniki otrzymują stopień bardzo dobry.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, pracując w parach, analizują materiał przedstawiony w sekcji Przeczytaj i próbują usystematyzować informacje na temat sposobów wyznaczania dziedziny

funkcji.
2. Po upływie wyznaczonego czasu tworzą większe grupy, wspólnie uzgadniają wnioski i odpowiedzi.
3. Porównują swoje spostrzeżenia z pozostałymi uczniami.
4. Wspólne wnioski przedstawiają na forum klasy.
5. Uczniowie oglądają animację, samodzielnie rozwiązują podane w niej przykłady, a następnie porównują uzyskane wyniki z podanymi rozwiązaniami. Weryfikują pomysły i formułują wnioski.
6. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności takie, jak sposoby wyznaczania dziedziny funkcji w zależności od tego, w jaki sposób została opisana funkcja.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wyjaśnia wszelkie wątpliwości oraz ocenia pracę uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.
2. Praca domowa dla chętnych:
   Wyznacz dziedzinę funkcji opisanej wzorem $f(x) = \sqrt{5 - |x+5|} + \frac{x+6}{x^2-7}$.

Materiały pomocnicze:

Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać do pracy metodą odwróconej klasy.

Uczniowie mogą obejrzeć animację w domu i na jej podstawie przygotować własną prezentację i przedstawić ją na forum klasy.