



Płaszczyzny prostopadłe

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Schemat interaktywny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Płaszczyzny prostopadłe

Źródło: Paweł Czerwiński, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

Płaszczyzny w przestrzeni mogą być równoległe, pokrywające się lub przecinające się. Szczególnym przypadkiem płaszczyzn przecinających się są płaszczyzny prostopadłe. W materiale określimy i wskażemy różne płaszczyzny, które przecinają się pod kątem prostym. Bazując na części teoretycznej materiału i omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

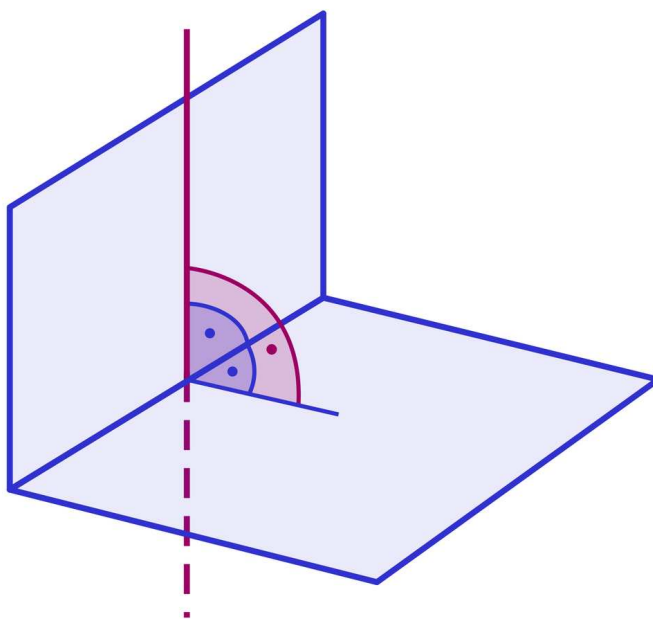
- Określisz, kiedy dwie płaszczyzny nazywamy prostopadłymi.
- Wskażesz płaszczyzny prostopadłe w bryłach geometrycznych.
- Ocenisz swoją wiedzę, rozwiązując zestaw ćwiczeń interaktywnych.
- Zastosujesz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Zdefiniujmy, kiedy dwie płaszczyzny są prostopadłe.

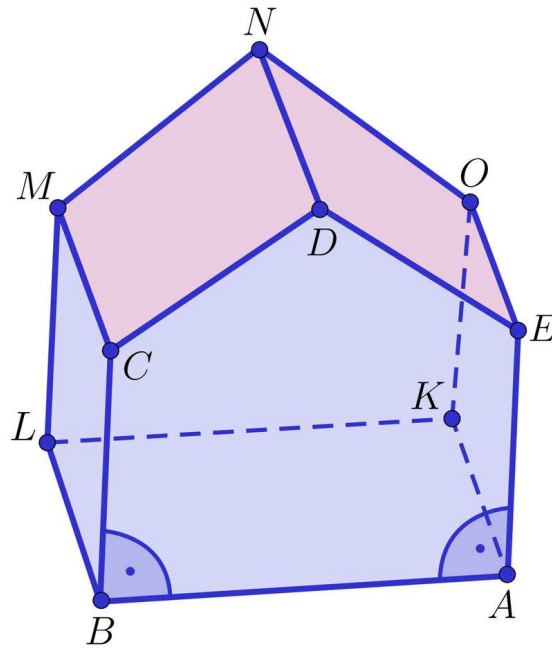
Definicja: Płaszczyzny prostopadłe

Dwie płaszczyzny nazywamy prostopadłymi, jeśli jedna przechodzi przez prostą prostopadłą do drugiej płaszczyzny.



Przykład 1

Na rysunku przedstawiono model graniastosłupa prostego pięciokątnego. Ustalimy, które płaszczyzny, zawierające ściany tego graniastosłupa są prostopadłe.



Ponieważ graniastosłup jest prosty, to każda ze ścian $ABLK$, $BCML$, $CDNM$, $DEON$, $AEOK$ jest prostopadła do podstaw $ABCDE$ i $KLMNO$.

W pięciokącie, który jest podstawą graniastosłupa dwa kąty są proste CBA i BAE .

Zatem mamy $ABLK \perp BCML$ oraz $ABLK \perp AEOK$.

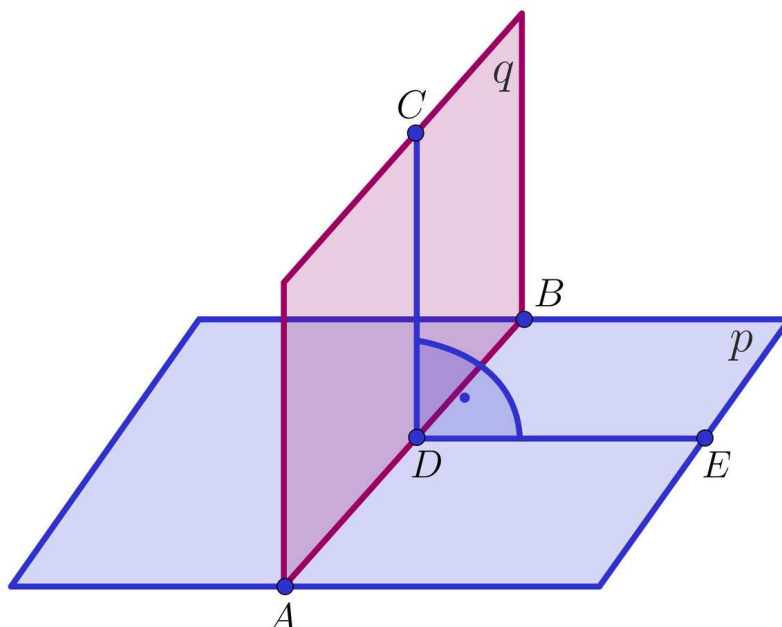
Z płaszczyznami prostopadłymi związane są ciekawe twierdzenia, które pozwalają zrozumieć zależności między tymi obiektami w przestrzeni.

Twierdzenie: Prosta leżąca na płaszczyźnie prostopadłej

Jeżeli dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe, to prosta położona na jednej z nich i prostopadła do ich krawędzi wspólnej jest prostopadła do drugiej.

Dowód

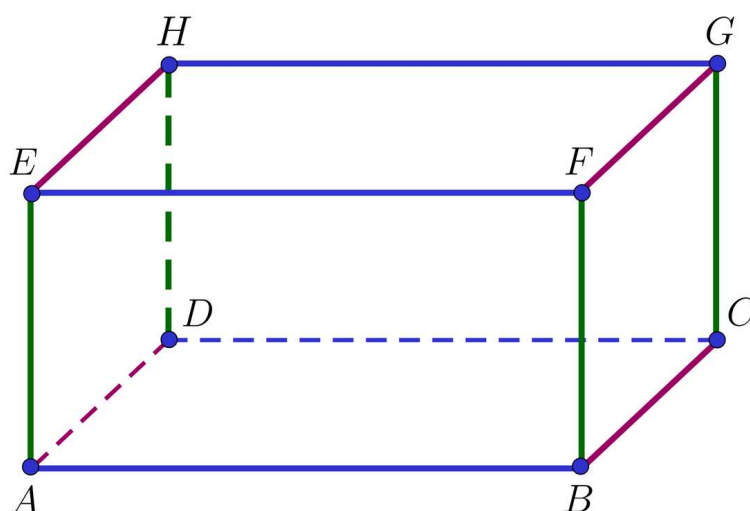
Dane są dwie płaszczyzny: p i q prostopadłe do siebie. Z dowolnego punktu D krawędzi AB poprowadźmy dwie **proste prostopadłe** do AB : DC położoną na płaszczyźnie q i DE na płaszczyźnie p .



Z założenia wynika, że **kąt dwuścienny** między płaszczyznami p i q jest prosty, a że kąt CDE jest jego kątem liniowym, więc i kąt CDE jest prosty, czyli $CD \perp DE$.
Z konstrukcji wynika, że $CD \perp AB$, zatem $CD \perp p$.

Przykład 2

Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$. Sprawdźmy, czy liczba płaszczyzn zawierających ściany tego prostopadłościanu, które są prostopadłe do płaszczyzny $EFGH$ jest większa niż liczba płaszczyzn zawierających ściany tego prostopadłościanu, które są prostopadłe do płaszczyzny $ADHE$.



Rozwiązanie:

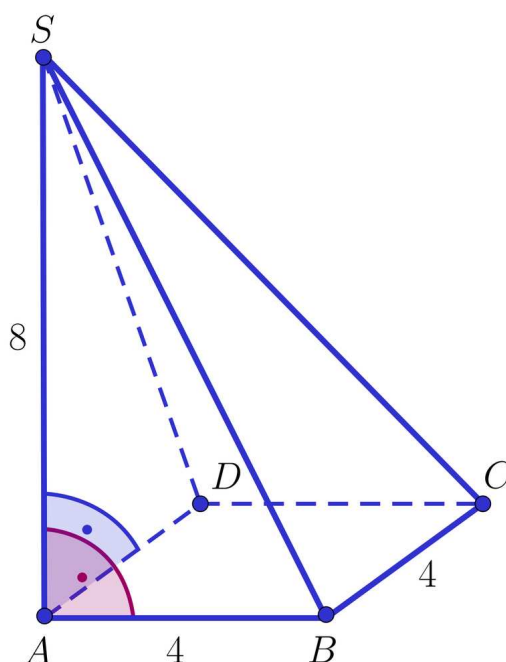
Płaszczyzny zawierające ściany tego prostopadłościanu, które są prostopadłe do płaszczyzny $EFGH$: $ABFE$, $BCGF$, $DCGH$, $ADHE$.

Płaszczyzny zawierające ściany tego prostopadłościanu, które są prostopadłe do płaszczyzny $ADHE$: $ABFE$, $ABCD$, $EFGH$, $DCGH$.

Zatem omawiana liczba płaszczyzn prostopadłych w obu przypadkach jest taka sama.

Przykład 3

Wiedząc o tym, że płaszczyzny ABS i ADS są prostopadłe do płaszczyzny $ABCD$, obliczymy sumę długości krawędzi bryły z poniższego rysunku, jeżeli jej podstawą jest kwadrat $ABCD$.



Niech T będzie szukaną sumą.

Korzystając z faktu, że płaszczyzny ABS i ADS są prostopadłe do płaszczyzny $ABCD$, obliczamy długości odpowiednich odcinków:

$$|BS| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$|AC| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$|DS| = |BS|$$

$$|CS| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 8^2} = \sqrt{32 + 64} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

Zatem szukana suma długości krawędzi bryły $ABCDS$ wynosi:

$$T = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4\sqrt{5} + 8 + 4\sqrt{6} = 16 + 8\sqrt{5} + 8 + 4\sqrt{6} = 24 + 8\sqrt{5} + 4\sqrt{6}$$

Prostopadłość płaszczyzn możemy badać również wtedy, gdy dane są ich równania np. zapisane w postaci ogólnej.

Dwie płaszczyzny zadane równaniami w postaci ogólnej:

$$Q: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \text{ gdzie } A_1, B_1, C_1 \in \mathbb{R} \text{ oraz } A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$$

$$T: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \text{ gdzie } A_2, B_2, C_2 \in \mathbb{R} \text{ oraz } A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$$

są prostopadłe, gdy zachodzi następujący warunek:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$$

Przykład 4

Wyznamy, dla jakich wartości parametru m płaszczyzny zadane równaniami $mx + 2y - z + 1 = 0$ oraz $3x + 3my + z + 5 = 0$ są prostopadłe.

Rozwiązanie:

Wypisujemy wartości współczynników w [równaniach płaszczyzn](#):

$$A_1 = m$$

$$B_1 = 2$$

$$C_1 = -1$$

$$A_2 = 3$$

$$B_2 = 3m$$

$$C_2 = 1$$

Obliczamy wartość wyrażenia:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = m \cdot 3 + 2 \cdot 3m + (-1) \cdot 1 = 3m + 6m - 1 = 9m - 1$$

Zatem do wyznaczenia wartości m rozwiązujemy równanie:

$$9m - 1 = 0$$

Wobec tego $m = \frac{1}{9}$.

Słownik

prostopadłość prostych w przestrzeni

proste są prostopadłe w przestrzeni, gdy przecinają się pod kątem prostym lub proste powstałe przez przesunięcie równoległe tych prostych przecinają się pod kątem prostym

kąt dwuścienny

każda z dwóch części przestrzeni, na jakie dzielą ją dwie półpłaszczyzny, nazywane ścianami kąta dwuściennego, mające wspólną krawędź, wraz z punktami każdej półpłaszczyzny

równanie płaszczyzny

równanie postaci

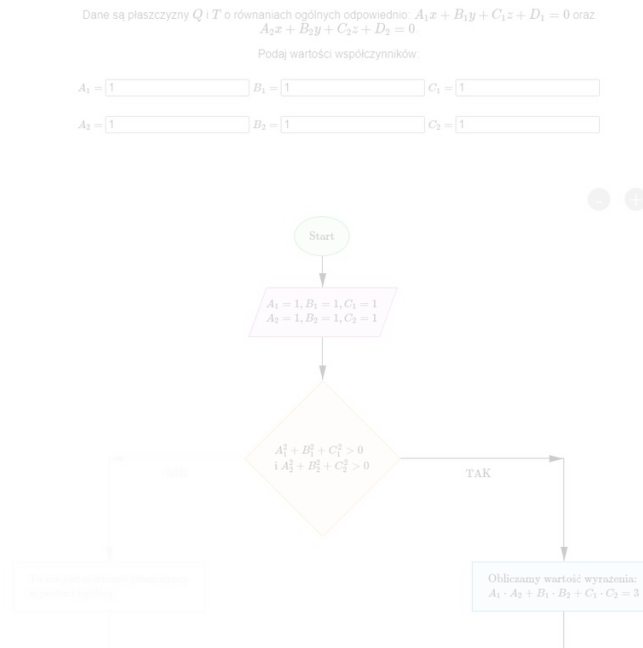
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ oraz $A^2 + B^2 + C^2 > 0$

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Przeanalizuj działanie schematu interaktywnego, a następnie wykonaj poniższe polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1GtxkpoC>

Polecenie 2

Sprawdź, czy płaszczyzny Q i T są prostopadłe, jeżeli są określone równaniami:

a. $Q : 3x - 2y + z - 2 = 0$ oraz $T : 6x + 9y - z + 2 = 0$

b. $Q : -4x - y + 2z - 3 = 0$ oraz $T : 2x + 6y + 7z + 1 = 0$

c. $Q : 2\sqrt{2}x + 3y + z - 1 = 0$ oraz $T : \sqrt{2}x + 2y - 10z = 0$

Polecenie 3

Zbuduj algorytm sprawdzający, czy płaszczyzny Q i T o równaniach ogólnych odpowiednio: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ są prostopadłe.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



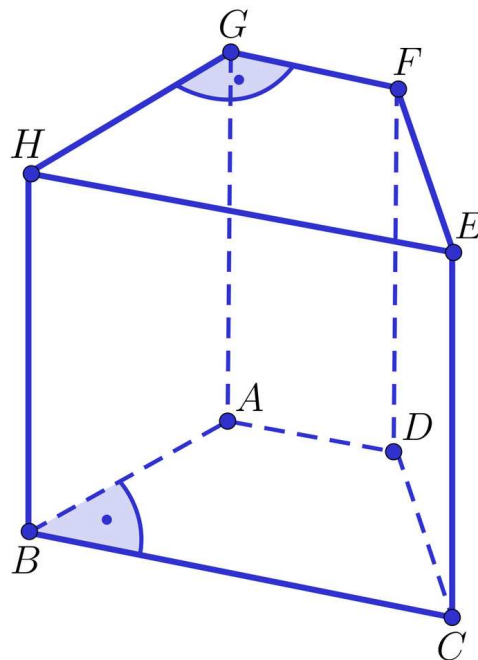
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

Zdanie	Prawda	Fałsz
W graniastosłupie prostym jedną parą ścian prostopadłych są podstawy.	☐	☐
Sąsiednie ściany boczne prostopadłościanów są do siebie prostopadłe.	☐	☐
W graniastosłupie prostym o podstawie rombu do każdej podstawy istnieją dokładnie cztery różne ściany, które są do nich prostopadłe.	☐	☐

Ćwiczenie 2



Dany jest graniastosłup prosty o podstawie trapezu prostokątnego jak na rysunku.



Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Płaszczyzna zawierająca ścianę $BCEH$ jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej ścianę $ADFG$.

☐

Wszystkie płaszczyzny zawierające ściany boczne graniastosłupa są prostopadłe do płaszczyzn zawierających jego podstawy.

☐

Płaszczyzna zawierająca ścianę $BCEH$ jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej ścianę $ABHG$.

☐

Płaszczyzna zawierająca ścianę $ABHG$ jest równoległa do płaszczyzny zawierającej ścianę $CDFE$.

Ćwiczenie 3



W podstawie graniastopuła jest sześciokąt foremny. Ile jest płaszczyzn prostopadłych do obu podstaw, które zawierają ściany boczne tego graniastopuła? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 2

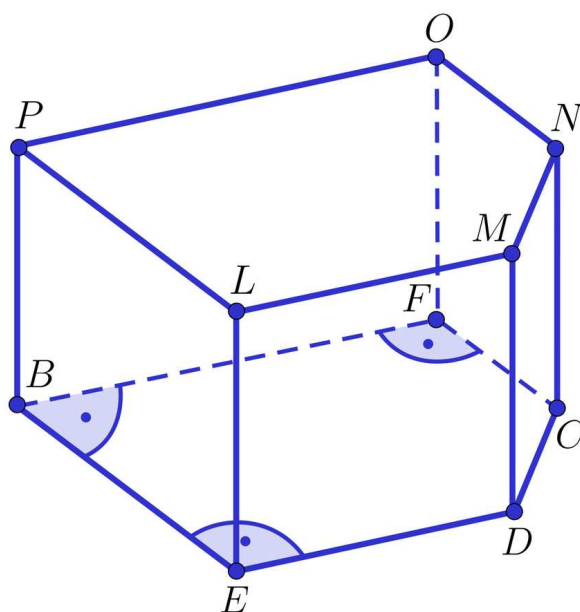
☐ 6

☐ 8

Ćwiczenie 4



Dany jest graniastosłup prosty pięciokątny jak na rysunku.



Ile jest płaszczyzn zawierających ściany tego graniastosłupa prostopadłych do płaszczyzny zawierającej ścianę $BFOP$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 2

☐ 5

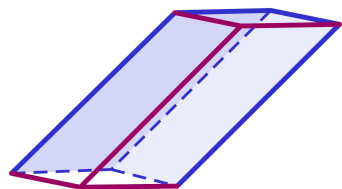
☐ 4

☐ 3

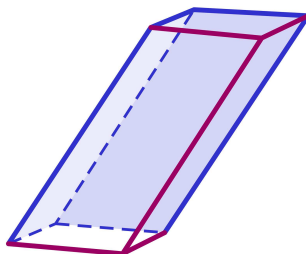
Ćwiczenie 5



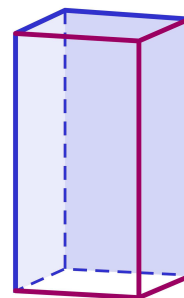
W którym graniastosłupie na rysunku płaszczyzny zawierające zaznaczone ściany są prostopadłe? Zaznacz poprawną odpowiedź.



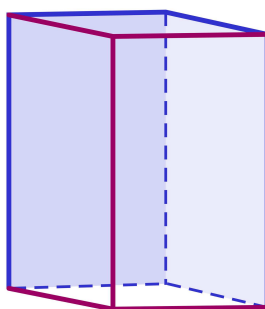
Graniastosłup pochyły
o podstawie rombu ☐



Graniastosłup pochyły
o podstawie kwadratu ☐



Graniastosłup prawidłowy
czworokątny ☐



Graniastosłup prosty
o podstawie rombu ☐

Ćwiczenie 6



Połącz w pary określenie wzajemnego położenia płaszczyzn z odpowiadającym mu opisem.

płaszczyzny prostopadłe

ich częścią wspólną jest prosta

płaszczyzny nierównoległe

nie mają punktów wspólnych

płaszczyzny równoległe

przecinają się pod kątem, którego miara
jest połową kąta pełnego

Ćwiczenie 7



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem. Przeciągnij każdy element do odpowiedniej grupy.

Dwie płaszczyzny mogą:

mieć części wspólnej będącej odcinkiem

pokrywać się

Dwie płaszczyzny **nie** mogą:

mieć dokładnie trzech punktów wspólnych

mieć część wspólną, która jest prostą

przecinać się pod kątem prostym

być równocześnie równoległe i prostopadłe

Ćwiczenie 8



Wyznacz, dla jakich wartości parametru m płaszczyzny zadane równaniami $mx + 2my - z + 4 = 0$ oraz $mx - 6y - 3z + 2 = 0$ są prostopadłe.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Płaszczyzny prostopadłe

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
- 2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje prostopadłość dwóch płaszczyzn;
- wskazuje płaszczyzny prostopadłe w bryłach geometrycznych;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa;
- praca z ekspertem;

- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Płaszczyzny prostopadłe” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań z sekcji „Przeczytaj”. W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Schemat interaktywny”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1–2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3–5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6–8 z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Płaszczyzny prostopadłe”).

Materiały pomocnicze:

- [Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Schemat interaktywny” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach tak, aby samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące płaszczyzn prostopadłych.