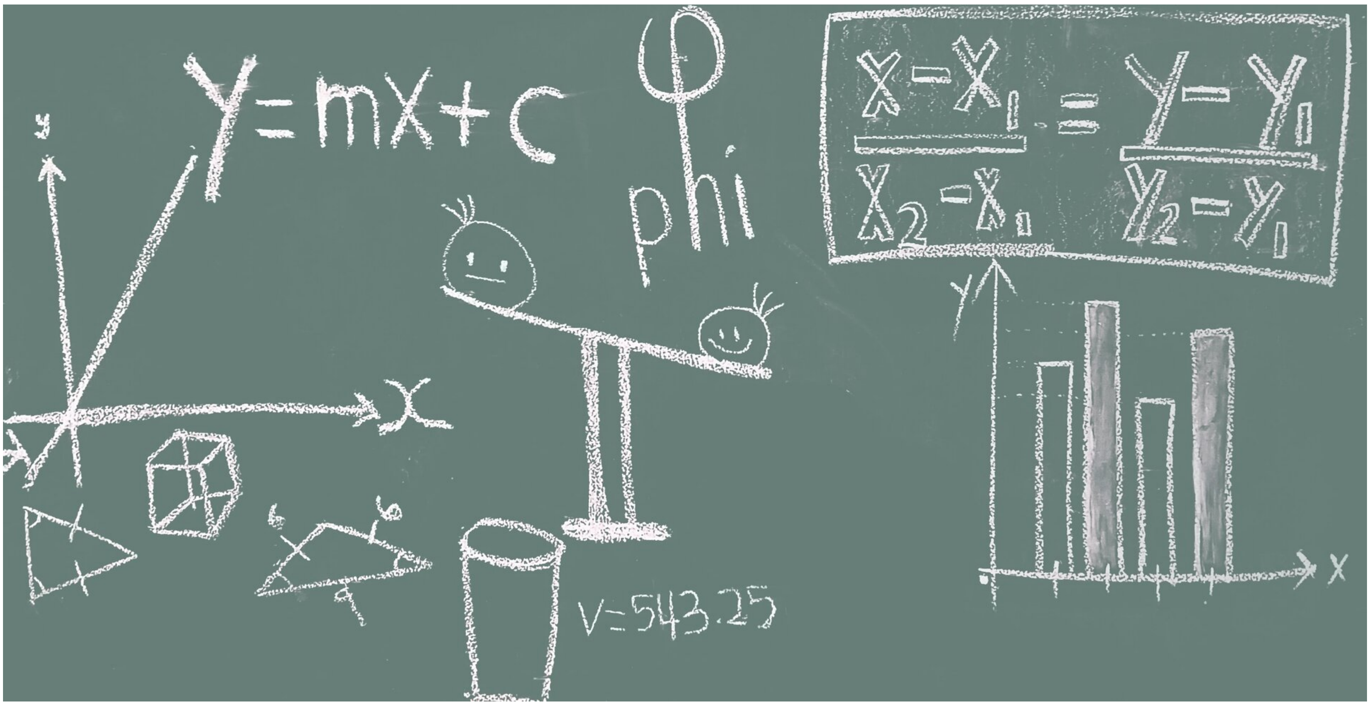
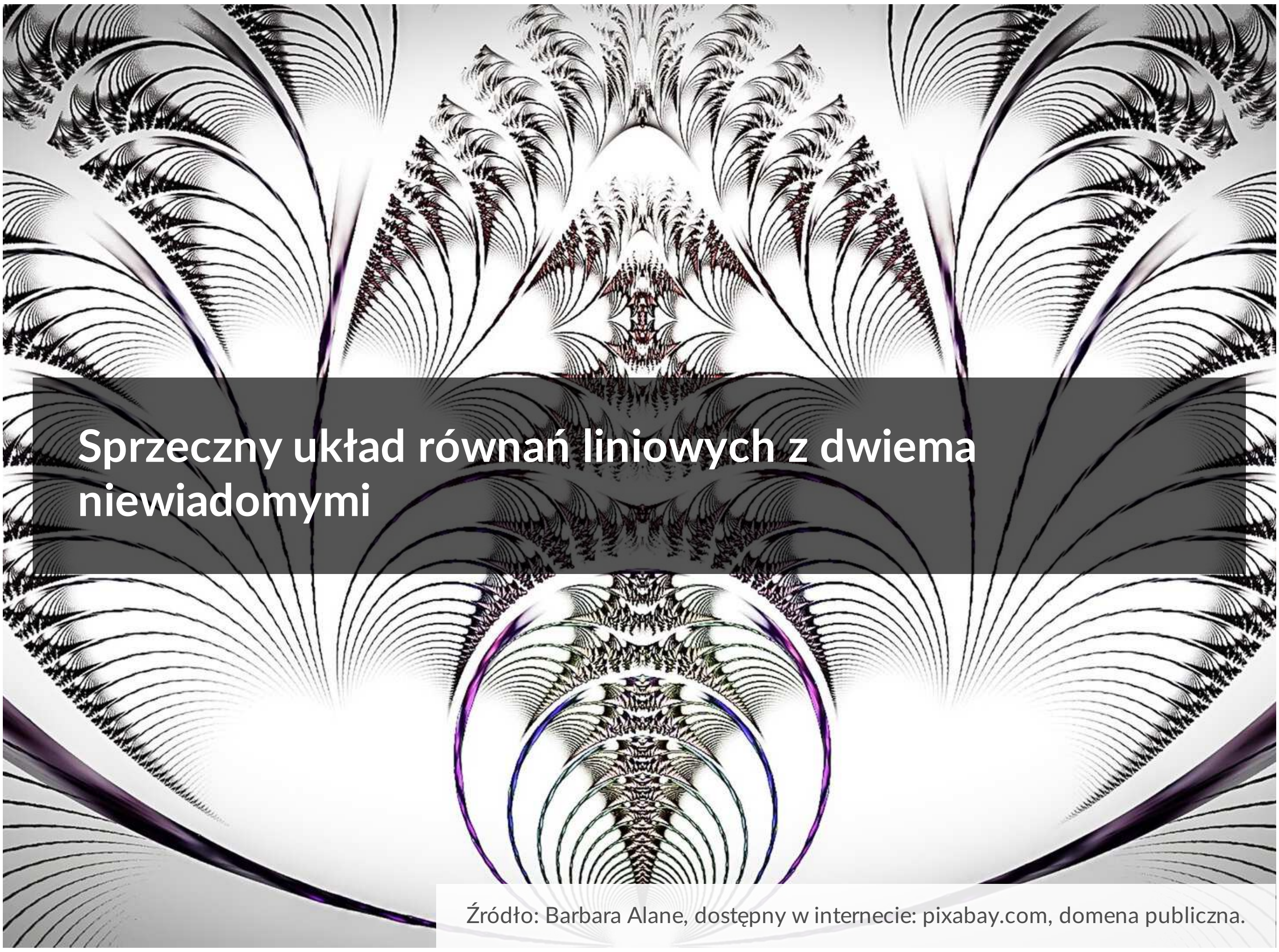


Sprzeczny układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Sprzeczny układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi



Źródło: Barbara Alane, dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Aby rozwiązać taki układ należy znaleźć parę liczb, która spełnia jednocześnie obydwa równania. Taka para nie zawsze istnieje. W tym materiale zajmiemy się takimi właśnie układami równań.

Twoje cele

- Sformułujesz definicję sprzecznego układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.
- Sprawdzisz, czy dany układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi jest układem sprzecznym.
- Dopiszesz drugie równanie tak, aby dany układ równań był sprzeczny.
- Przedstawisz graficzną ilustrację sprzecznego układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Przeczytaj

Definicja: Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Układ taki przyjmuje postać:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

gdzie:
x oraz y – oznaczają niewiadome,
a_1, a_2, b_1 oraz b_2 – współczynniki przy niewiadomych odpowiednio x oraz y,
c_1 i c_2 – nazywamy wyrazami wolnymi (zakładamy, że współcznniki przy niewiadomych odpowiednio x oraz y nie mogą być jednocześnie zerami).

Definicja: Rozwiązanie układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Rozwiązaniem układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy parę liczb spełniającą jednocześnie każde równanie danego układu równań.

Ważne!

Ilustracją geometryczną układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi są dwie proste.

Dwie proste na płaszczyźnie mogą mieć następujące położenie:

- proste przecinają się w jednym punkcie,
- proste pokrywają się,
- proste są równoległe i nie mają punktów wspólnych.

Przykład 1

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = -2 \end{cases}.$$

Narysujemy wykres każdego z równań.

Dla ułatwienia przekształcamy każde z równań.

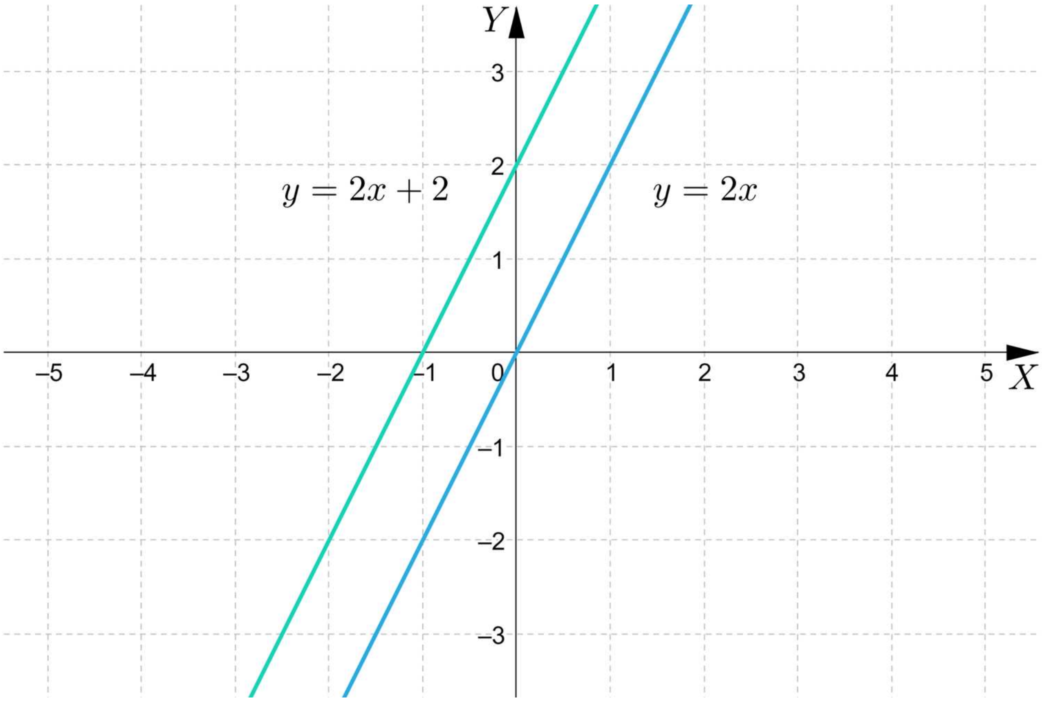
$2x - y = 0$ i $2x - y = -2$

$y = 2x$ i $y = 2x + 2$

Wybieramy dowolny $x \in \mathbb{R}$ i korzystając z odpowiedniego równania, obliczamy y.

$(0, 0)$, $(1, 2)$ i $(0, 2)$, $(1, 4)$

Zaznaczmy punkty w układzie współrzędnych, a następnie rysujemy wykresy tych równań.



Źródło: Gromar sp. z o.o, licencja: CC BY-SA 3.0.

Wykresy tych równań to proste równoległe, które nie mają wspólnych punktów.

A zatem układ równań $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ nie ma rozwiązań. Taki układ nazywamy układem sprzecznym.

Ważne!

Wykresy prostych $y = a_1 x + b_1$ oraz $y = a_2 x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.

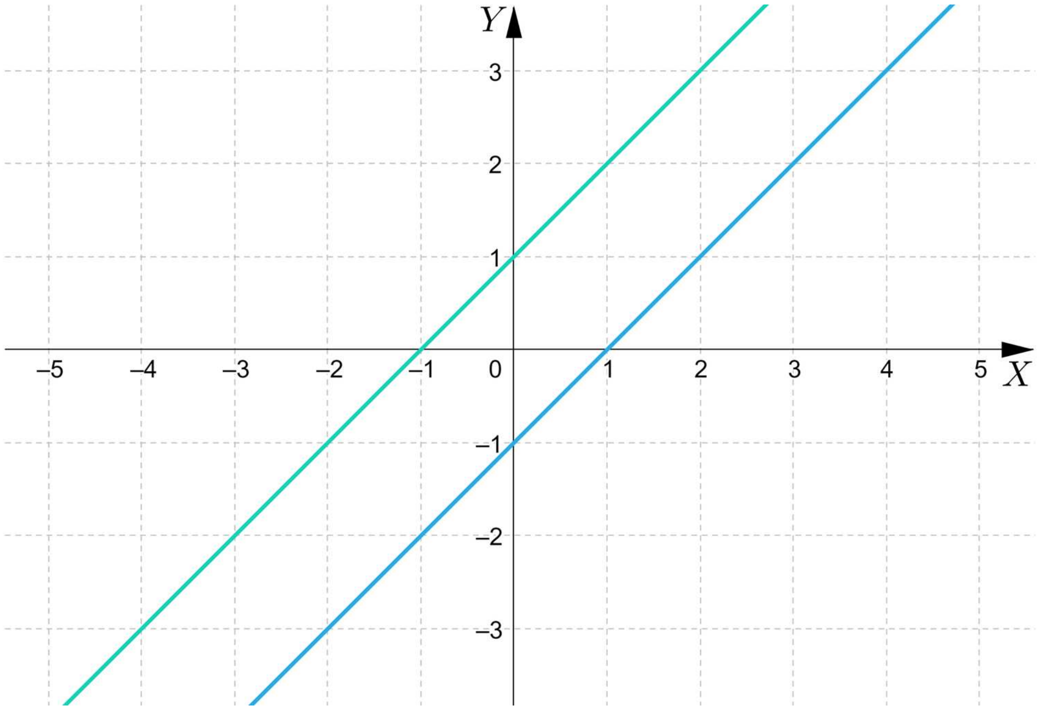
Wykresy prostych postaci $x = c_1$ oraz $x = c_2$ są równoległe dla dowolnych $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Definicja: Sprzeczny układ równań

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, który nie ma rozwiązania, nazywamy układem sprzecznym.

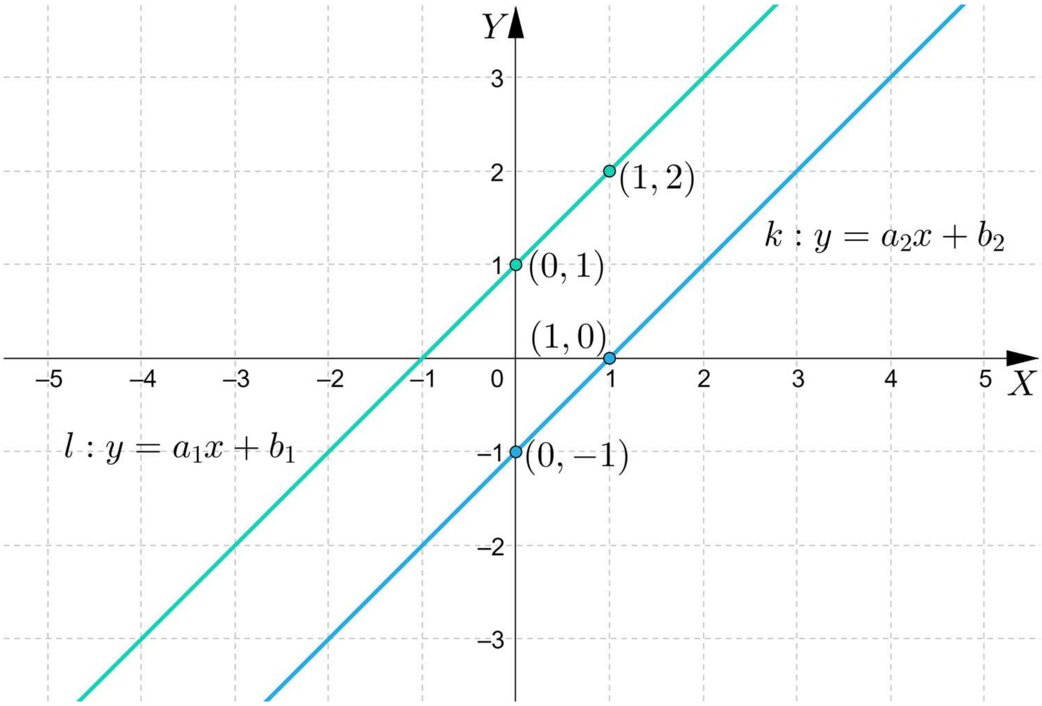
Przykład 2

Na rysunku przedstawiona jest geometryczna interpretacja układu równań liniowych.



Wykresy prostych są równoległe, a więc jest to interpretacja geometryczna sprzecznego układu równań. Znajdźmy ten układ.

Odczytujemy współrzędne dwóch punktów leżących na każdej z prostych.



Źródło: Gromar sp. z o.o, licencja: CC BY-SA 3.0.

Na prostej $y = a_1x + b_1$ leżą punkty $(0,\ 1)$ oraz $(1,\ 2)$. Postawimy ich współrzędne do wzoru i obliczmy wartości współczynników a_1 i b_1.

$1 = a_1 \cdot 0 + b_1$ i $2 = a_1 \cdot 1 + b_1$

$b_1 = 1$ i $a_1 + 1 = 2$

$b_1 = 1$ i $a_1 = 1$

Równanie prostej ma więc postać $y = x + 1$.

Na prostej $y = a_2x + b_2$ leżą punkty $(0,\ -1)$ oraz $(1,\ 0)$. Postawimy ich współrzędne do wzoru i obliczmy wartości współczynników a_2 i b_2.

$-1 = a_2 \cdot 0 + b_2$ i $0 = a_2 \cdot 1 + b_2$

$b_2 = -1$ i $a_2 - 1 = 0$

$b_2 = -1$ i $a_2 = 1$

Równanie prostej ma więc postać $y = x - 1$.

Rysunek przedstawia więc ilustrację geometryczną sprzecznego układu równań

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x - 1 \end{cases}.$$

Twierdzenie: Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

jest układem sprzecznym wtedy i tylko wtedy gdy współczynniki przy niewiadomych spełniają warunek

$$a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0 \ \ (1)$$

i gdy zachodzi co najmniej jeden z warunków:

$$c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1 \neq 0 \ (2)$$

lub

$$a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \neq 0 \ (3)$$

Przykład 3

Dany jest układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ -3x - 6y = 2 \end{cases}.$

Sprawdzimy, czy jest to układ sprzeczny.

Odczytujemy wartości współczynników przy niewiadomych x oraz y i wyrazów wolnych.

$a_1 = 1$

$b_1 = 2$

$c_1 = 10$

$a_2 = -3$

$b_2 = -6$

$c_2 = 2$

Sprawdzamy czy zachodzi warunek (1) $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0$.

$a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 1 \cdot (-6) - 2 \cdot (-3) = -6 + 6 = 0$

Warunek (1) jest spełniony, sprawdzamy więc, czy zachodzi warunek (2) $c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1 \neq 0$.

$c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1 = 10 \cdot (-6) - 2 \cdot 2 = -60 - 4 \neq 0$

Warunek (2) jest spełniony, a zatem ten układ jest układem sprzecznym.

Przykład 4

Sprawdzimy, czy sprzeczny jest układ równań

$$\begin{cases} 10x - 5y = -25 \\ -2x + 3y = 12 \end{cases}.$$

Odczytujemy wartości współczynników przy niewiadomych x oraz y oraz wyrazów wolnych.

$a_1 = 10$

$b_1 = -5$

$c_1 = -25$

$a_2 = -2$

$b_2 = 3$

$c_2 = 12$

Sprawdzamy, czy zachodzi warunek (1) $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0$.

$a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 10 \cdot 3 - (-5) \cdot (-2) = 30 - 10 \neq 0$

Warunek (1) nie jest spełniony, a więc układ równań $\begin{cases} 10x - 5y = -25 \\ -2x + 3y = 12 \end{cases}$ nie jest układem sprzecznym.

(Jest to układ oznaczony – posiada dokładnie jedno rozwiązanie.)

Przykład 5

Ustalimy, jaką liczbę należy wpisać w miejsce a, aby układ

$$\begin{cases} (a-1)x + 12y = 25 \\ -4x + 3y = 15 \end{cases}$$

był układem sprzecznym.

Z twierdzenia zamieszczonego w materiale wiemy, że układ będzie sprzeczny, gdy współczynniki przy niewiadomych spełniają warunek $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0$ (1) i gdy zachodzi co najmniej jeden z warunków:

$c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1 \neq 0$ (2) lub $a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1 \neq 0$ (3).

W tym układzie równań mamy:

$a_1 = a - 1$

$b_1 = 12$

$c_1 = 25$

$a_2 = -4$

$b_2 = 3$

$c_2 = 15$

Z warunku (1) możemy zapisać równanie:

$3 \cdot (a - 1) + 12 \cdot 4 = 0$

$3a - 3 + 48 = 0$

$3a = -45 \mid : 3$

$a = -15$

Sprawdzamy jeszcze czy zachodzi warunek (2).

$25 \cdot 3 - 12 \cdot 15 = 75 - 180 \neq 0$

Warunek (2) jest spełniony, a zatem układ równań jest sprzeczny dla $a = -15$.

Przykład 6

Do równania $-3x + 5y = 10$ dopiszmy drugie, tak aby tworzyły razem sprzeczny układ równań.

Oczywiście zadanie takie posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Najprostszym z nich jest dopisanie oczywistej sprzeczności, np.: $-3x + 5y = 2$, czy $-3x + 5y = -6$.

Wtedy układy równań spełniające warunki zadania mają postać:

$$\begin{cases} -3x + 5y = 10 \\ -3x + 5y = 2 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} -3x + 5y = 10 \\ -3x + 5y = -6 \end{cases}.$$

Możemy też pomnożyć prawą stronę równania $-3x + 5y = 10$ przez liczbę inną, niż lewą stronę tego równania. Otrzymamy wtedy np.: $-6x + 10y = -10$ lub $3x - 5y = 20$.

Wtedy układy równań spełniające warunki zadania mają postać:

$$\begin{cases} -3x+5y=10 \\ -6x+10y=-10 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} -3x+5y=10 \\ 3x-5y=20 \end{cases}.$$

(Sprawdź, czy układy są sprzeczne.)

Słownik

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

układ równań postaci

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

sprzeczny układ równań

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, który nie ma rozwiązania

Aplet

Polecenie 1

Przeanalizuj metodę graficznego rozwiązywania sprzecznych układów równań liniowych.

Wykonaj samodzielnie Polecenie 2.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DFo6Gi9hG

Polecenie 2

Rozwiąż graficznie układ równań

$$\begin{cases} 6 \cdot (x+y) - 5 = x + 7 \cdot (y-1) \\ 10x + 4 = 2 \cdot (3+y) \end{cases}.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Źródło: Gromar sp. z o.o, licencja: CC BY-SA 3.0.

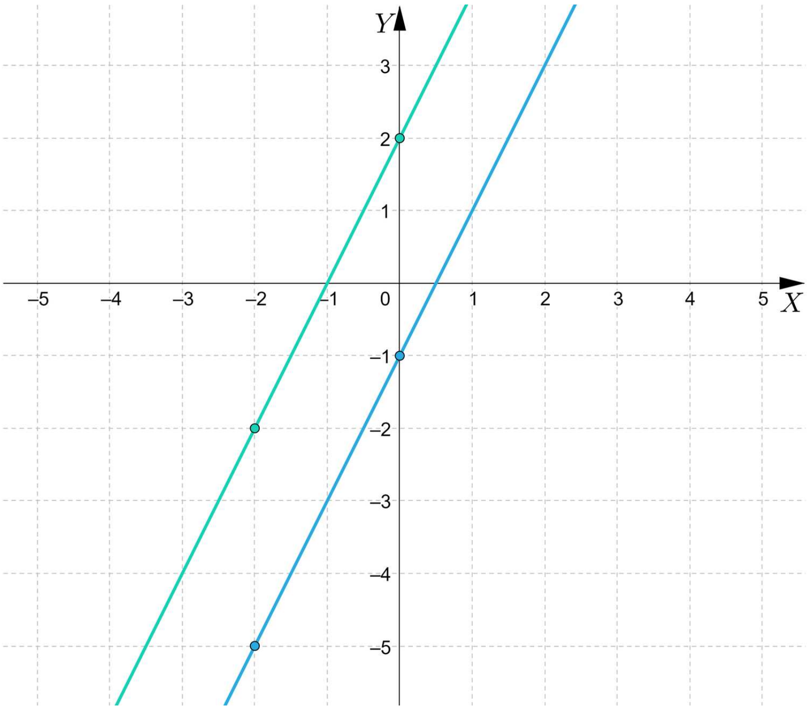
Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Źródło: Gromar sp. z o.o, licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 6

Zapisz układ równań, którego interpretacja jest przedstawiona na rysunku.



Źródło: Gromar sp. z o.o, licencja: CC BY-SA 3.0.

Ćwiczenie 7

Rozwiąż graficznie układ równań

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x+y}{3} = 1 \\ 5x + 4y = 4 \cdot (1+x) + 3y \end{cases}.$$

Ćwiczenie 8

Oblicz dla jakiego parametru m, układ równań $\begin{cases} 6x + (2m-5)y = 5 \\ -3x + 4y = 10 \end{cases}$ jest sprzeczny.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Sprzeczny układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.

IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;

2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- formułuje definicję sprzecznego układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi
- przedstawia graficzną ilustrację sprzecznego układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- dopisuje drugie równanie tak, aby dana para liczb spełniała układ równań

- zapisuje podane informacje w postaci układu równań

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- dyskusja
- stoliki zadaniowe

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie, metodą burzy mózgów, przypominają informacje o równaniach pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi oraz ich interpretacji graficznej. Dzielą się również wiedzą o układach równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie, pracując w parach, analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” i aplecie.
2. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów, wyjaśnia wątpliwości.
3. Wspólnie starają się podsumować informacje zawarte w przykładach.
4. Uczniowie pracują metodą stolików zadaniowych (na każdym stoliku po dwa, wybrane przez nauczyciela, ćwiczenia interaktywne). Rozwiązują ćwiczenia interaktywne, pracując w grupach wyznaczonych przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- Liczba rozwiązań układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- Układ dwóch równań liniowych

Wskazówki metodyczne:

Aplet może być wykorzystany przez uczniów jako pomoc przy rozwiązywaniu pracy domowej oraz jako utrwalenie sposobu rozwiązywania układów równań metodą graficzną.