



Zadania prowadzące do rozwiązywania równań z wartością bezwzględną

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Zadania prowadzące do rozwiązywania równań z wartością bezwzględną

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Potrafisz już rozwiązywać równania z jedną lub dwoma wartościami bezwzględnymi. Znasz również graficzne metody rozwiązywania takich równań oraz podstawowe własności wartości bezwzględnej.

W tym materiale zapoznasz się ze sposobami rozwiązywania trudniejszych równań z wartością bezwzględną, w tym także typu „moduł w module” oraz równań z parametrem.

Twoje cele

- Rozwiążesz równania z wartościami bezwzględnymi, w których niewiadoma znajduje się w wartości bezwzględnej oraz występuje samodzielnie.
- Korzystając z definicji i własności modułu uprościsz wyrażenia zawierające wartość bezwzględną.
- Rozwiążesz równanie kwadratowe z wykorzystaniem własności wartości bezwzględnej.
- Ustalisz liczbę rozwiązań równania z wartością bezwzględną w zależności od parametru p .

Przeczytaj

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $||x - 1| - 6| = 2$.

Opuszczając wartość bezwzględną, otrzymujemy:

$$|x - 1| - 6 = 2 \text{ lub } |x - 1| - 6 = -2$$

$$|x - 1| = 8 \text{ lub } |x - 1| = 4$$

Oba równania posiadają rozwiązania, ponieważ wartość bezwzględna jest zawsze liczbą nieujemną.

Rozwiązując równanie $|x - 1| = 8$ otrzymujemy $x = -7$ lub $x = 9$.

Rozwiązanie równania $|x - 1| = 4$ to $x = -3$ lub $x = 5$.

Zatem rozwiązaniem równania są liczby $x \in \{-7, -3, 5, 9\}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $|4 + |x - 1|| = 2$.

$$4 + |x - 1| = 2 \text{ lub } 4 + |x - 1| = -2$$

$$|x - 1| = -2 \text{ lub } |x - 1| = -6$$

Oba otrzymane równania są sprzeczne, ponieważ wartość bezwzględna jest zawsze liczbą nieujemną.

Zatem równanie nie posiada rozwiązania.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $||x| - 2| = |x| + 1$.

$$|x| - 2 = |x| + 1 \text{ lub } |x| - 2 = -|x| - 1$$

Rozwiązując pierwsze równanie, otrzymujemy sprzeczność, ponieważ $-2 \neq 1$.

Rozwiążemy równanie $|x| - 2 = -|x| - 1$.

$$2 \cdot |x| = 1$$

$$|x| = \frac{1}{2}$$

Zatem $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$.

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru p równanie $|px| + |p| = 1$ ma rozwiązania?

$$|px| + |p| = 1$$

Najpierw skorzystamy z własności wartości bezwzględnej $|px| = |p| \cdot |x|$ dla dowolnych p i x .

$$|p| \cdot |x| + |p| = 1$$

$$|p| \cdot |x| = 1 - |p|$$

Dla $p \neq 0$ otrzymujemy:

$$|x| = \frac{1-|p|}{|p|}$$

Aby równanie miało rozwiązania, musi zachodzić warunek:

$$\frac{1-|p|}{|p|} \geq 0$$

Ponieważ $|p| > 0$

$$1 - |p| \geq 0$$

$$|p| \leq 1$$

Zatem $p \in \langle -1, 1 \rangle \setminus \{0\}$.

Przykład 5

Zbadamy, dla jakich wartości parametru m równanie $|x - 5| = m$ ma dwa dodatnie pierwiastki.

$$|x - 5| = m$$

Aby równanie miało dwa pierwiastki $m > 0$.

Wtedy

$$x - 5 = m \text{ lub } x - 5 = -m$$

$$x = m + 5 \text{ lub } x = 5 - m$$

Aby oba pierwiastki równania były dodatnie:

$$\begin{cases} m + 5 > 0 \\ 5 - m > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m > -5 \\ m < 5 \end{cases}$$

Czyli $m \in (-5, 5)$

Ale ponieważ założyliśmy, że m jest liczbą dodatnią $m \in (0, 5)$.

Słownik

pierwiastki równania

liczby spełniające równanie

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką pokazującą sposób rozwiązywania równań kwadratowych z wykorzystaniem własności wartości bezwzględnej, a następnie rozwiąż równania z Polecenia 2.

Polecenie 2

Rozwiąż poniższe równania.

a) $4x^2 - 4x - 8 = 0$

b) $4x^2 - 4x - 15 = 0$

c) $x^2 + 2x - 8 = 0$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla jakich wartości parametru p rozwiązaniem równania $|x + 8| = p^2 - 5p$ jest tylko jedna liczba rzeczywista?

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zadania prowadzące do równań z wartością bezwzględną

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2 \cdot |x + 3| + 3 \cdot |x - 1| = 13$, $|x + 2| + 2 \cdot |x - 3| < 11$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równania z wartościami bezwzględnymi, w których niewiadoma znajduje się w wartości bezwzględnej oraz występuje samodzielnie
- korzystając z definicji i własności modułu upraszcza wyrażenia zawierające wartość bezwzględną
- rozwiązuje równanie kwadratowe z wykorzystaniem własności wartości bezwzględnej
- ustala liczbę rozwiązań równania z wartością bezwzględną w zależności od parametru p
- tworzy algorytmy rozwiązywania nierówności różnych typów
- dobiera model matematyczny do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca w parach

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie w domu przypominają sobie metodę algebraiczną rozwiązywania równań liniowych z dwiema wartościami bezwzględnymi.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach nad przykładami przedstawionymi w części „Przeczytaj”.
2. Każda para próbuje samodzielnie rozwiązać przykłady.
3. Po upływie wyznaczonego czasu uczniowie łączą się w 6 osobowe grupy i dzielą się wnioskami i uwagami o sposobach rozwiązania przykładów. Porównują swoje rozwiązania.
4. Uczniowie wspólnie oglądają infografikę i weryfikują swoje spostrzeżenia.
5. Rozwiązują samodzielnie polecenie pod infografiką i konsultują rozwiązania.
6. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1–6 i omawiają wyniki z nauczycielem.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie przedstawiciele grup krótko omawiają trudności, jaki napotkali podczas rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu ćwiczenia 7–8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Wartość bezwzględna - definicja](#)

[Wartość bezwzględna liczby](#)

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być materiałem inspirującym do przygotowania przez uczniów własnego samouczka.