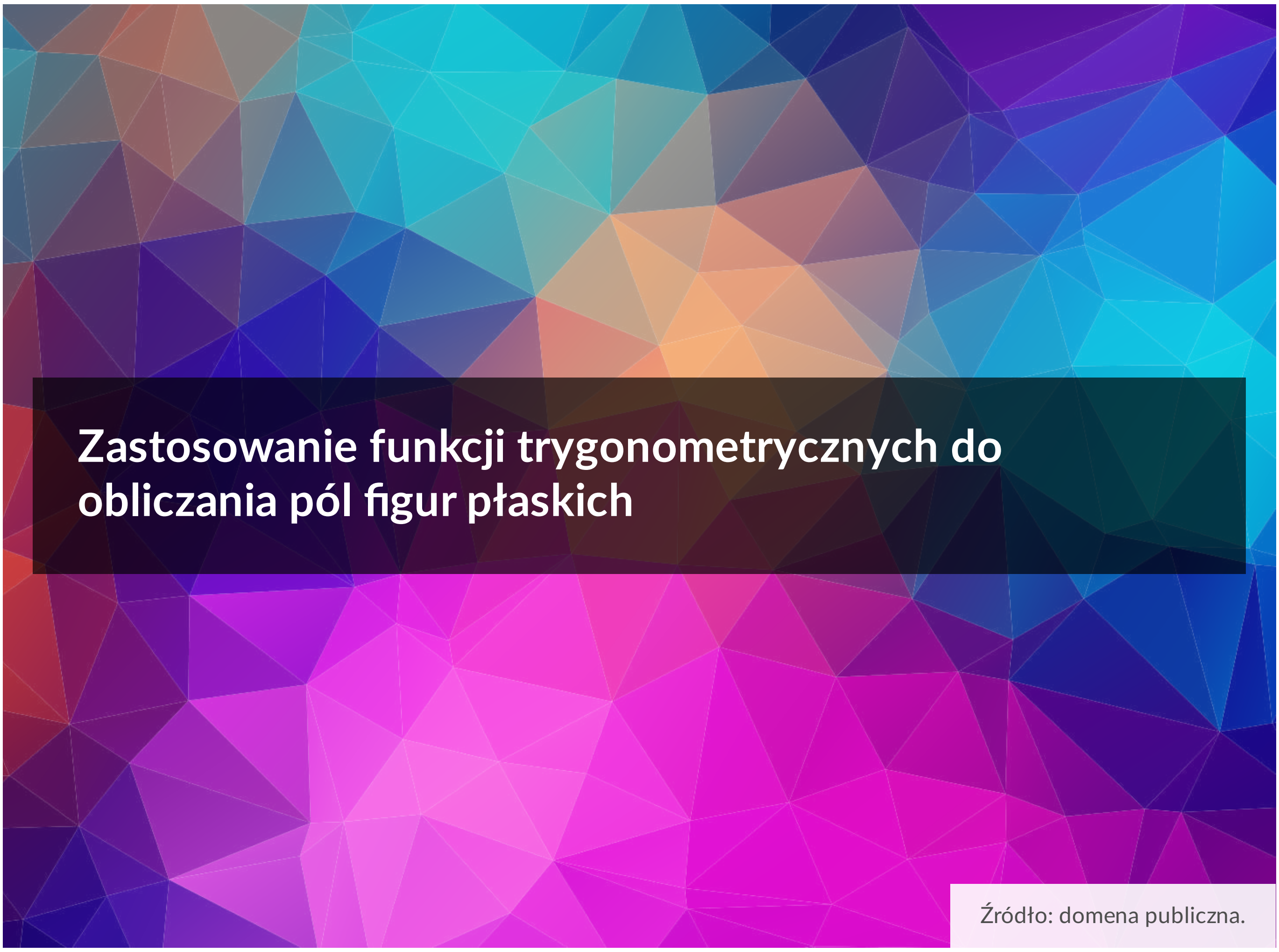
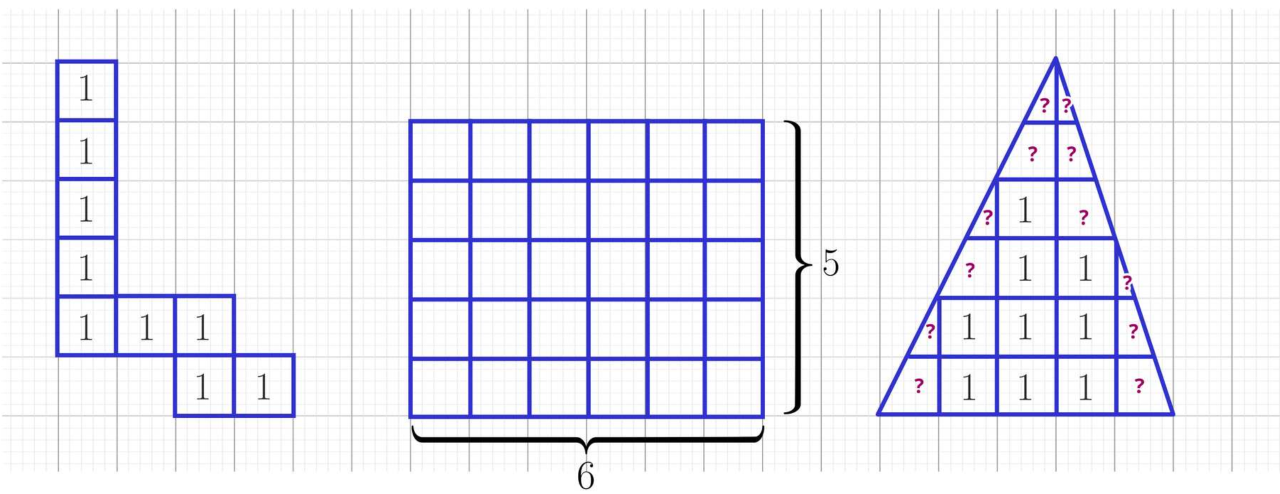
Zastosowanie funkcji trygonometrycznych do obliczania pól figur płaskich



Zastosowanie funkcji trygonometrycznych do obliczania pól figur płaskich

Źródło: domena publiczna.

Z pojęciem pola figury płaskiej spotykasz się wielokrotnie już od szkoły podstawowej. Najprościej rzecz ujmując: pole powierzchni figury jest to miara przyporządkowująca danej figurze nieujemną liczbę charakteryzującą jej rozmiar, na przykład ilość kwadratów jednostkowych pokrywających tę figurę.



Pole $= 9$ Pole $= 30$ Pole $= ?$

Niełatwo jest jednak taką operację wykonywać za każdym razem, gdy musisz obliczyć pole jakiegoś wielokąta. Z pomocą przyjdzie Ci znajomość trygonometrii.

Twoje cele

- Zastosujesz wzory na pole trójkątów i czworokątów z wykorzystaniem funkcji sinus.
- Wykorzystasz twierdzenie sinusów i cosinusów w zadaniach dotyczących pól figur płaskich.
- Zastosujesz wzór na sinus sumy kątów.
- Udowodnisz wzór Brahmagupty.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy najpierw niektóre wzory na pola wielokątów z wykorzystaniem funkcji sinus:

Wzory na pola wielokątów z wykorzystaniem funkcji sinus	
Trójkąt o bokach długości a, b i kącie między nimi α.	$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$
Równoległobok o bokach długości a, b i kącie między nimi α.	$P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$
Równoległobok o przekątnych długości d_1, d_2 i kącie między nimi γ.	$P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\gamma$
Romb o boku długości a i kącie α.	$P = a^2 \cdot \sin\alpha$

Przykład 1

Pole równoległoboku o kącie ostrym 75° wynosi $4\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$. Obliczymy długości jego boków, jeśli pozostają one w stosunku $1 : 2$.

Rozwiązanie

Oznaczymy długości boków równoległoboku przez x i $2x$. Zatem:
$4\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) = x \cdot 2x \cdot \sin 75^\circ$.
Korzystając ze wzoru na sinus sumy kątów wyznaczymy $\sin 75^\circ$:
$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
Zatem:
$4\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) = 2x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
$x^2 = 8$
$x = 2\sqrt{2}$

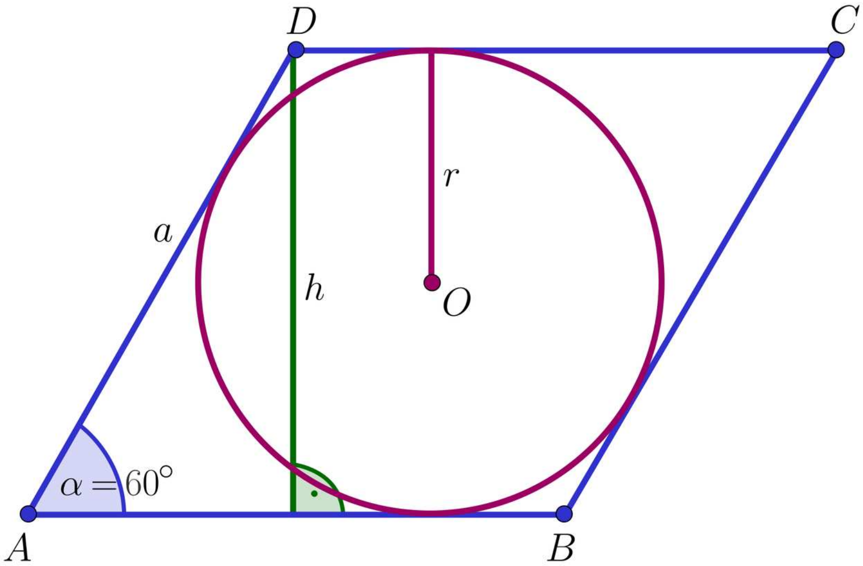
Boki równoległoboku mają długości: $2\sqrt{2}$ i $4\sqrt{2}$.

Przykład 2

Pole koła wpisanego w romb o kącie ostrym o mierze 60° wynosi 18π. Wyznaczymy pole tego rombu.

Rozwiązanie

Wysokość rombu, w którym wpisano koło o promieniu długości r, jest równa $h = 2r$:



Wyznaczymy długość promienia koła wpisanego w romb:
$18\pi = \pi \cdot r^2$
$18 = r^2$
$r = 3\sqrt{2}$
Zatem wysokość tego rombu ma długość: $h = 6\sqrt{2}$.
Wykorzystamy definicję sinusa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:

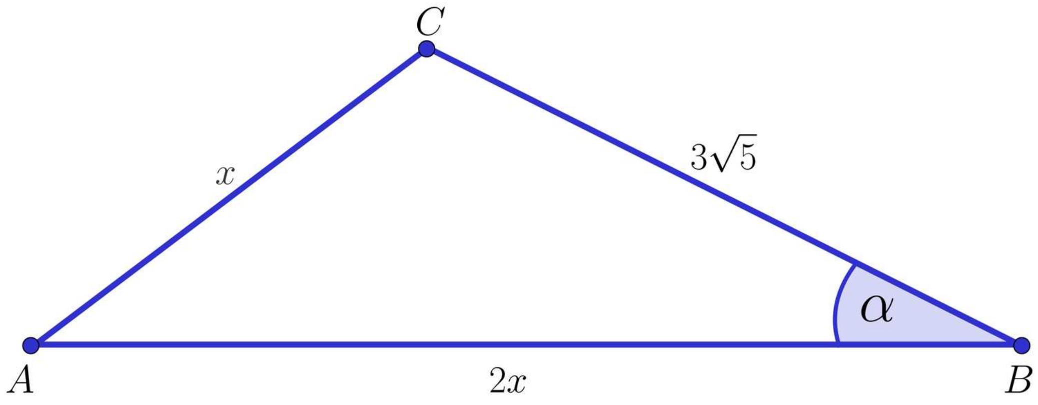
$\sin 60^\circ = \frac{h}{a}$
$a = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{6}$
Obliczamy pole rombu:
$P = \left(4\sqrt{6}\right)^2 \cdot \sin 60^\circ = 16 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$.

Przykład 3

Bok BC trójkąta ABC ma długość $3\sqrt{5}$, zaś bok AC jest dwa razy krótszy niż bok AB. Sinus kąta ostrego ABC wynosi $\frac{\sqrt{5}}{5}$. Wyznaczymy pole tego trójkąta, jeśli $|AB| > 3\sqrt{10}$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Do wyznaczenia długości boku AB zastosujemy twierdzenie cosinusów:
$x^2 = (2x)^2 + \left(3\sqrt{5}\right)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3\sqrt{5} \cdot \cos\alpha$
$x^2 = 4x^2 + 45 - 12\sqrt{5}x \cdot \cos\alpha$
Wartość $\cos\alpha$ wyznaczymy z jedynki trygonometrycznej:

$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$
$\cos^2\alpha = 1 - \frac{5}{25}$
$\cos^2\alpha = \frac{20}{25}$
$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Zatem:
$x^2 = 4x^2 + 45 - 12\sqrt{5}x \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}$
$3x^2 - 24x + 45 = 0$
$x^2 - 8x + 15 = 0$
$(x-3)(x-5) = 0$
Stąd: $x = 3$ lub $x = 5$

Tylko dla $x = 5$ długość boku AB jest większa od $3\sqrt{10}$, co daje: $|AB| = 10$.

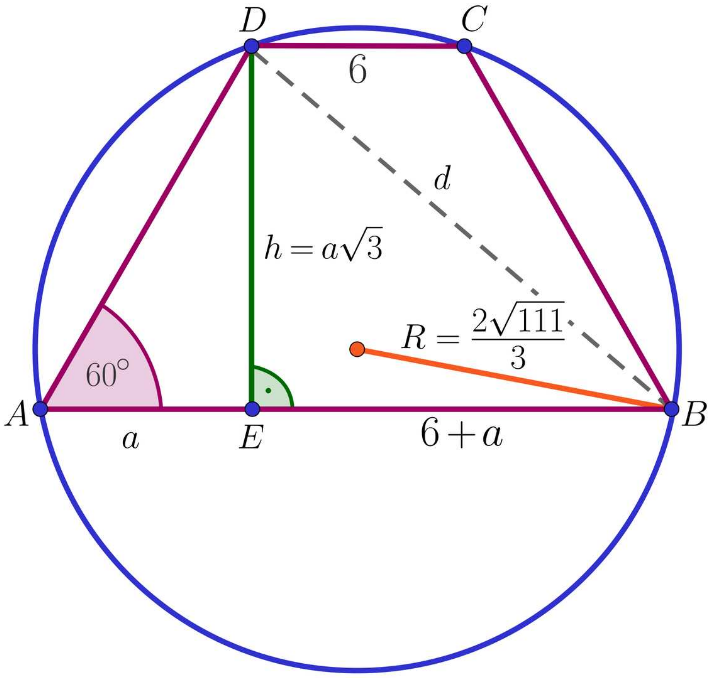
Pole trójkąta ABC jest równe:
$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 15$.

Przykład 4

Obliczymy pole trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa ma długość 6 a miara kąta ostrego wynosi 60°, jeśli promień okręgu opisanego na tym trapezie ma długość $\frac{2\sqrt{111}}{3}$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Zauważmy, że okrąg opisany na trapezie $ABCD$ jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ABD. Zastosujemy zatem twierdzenie sinusów:

$\frac{d}{\sin 60^\circ} = 2R$

$d = 2 \cdot \frac{2\sqrt{111}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{37}$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DEB:

$\left(a\sqrt{3}\right)^2 + (6+a)^2 = \left(2\sqrt{37}\right)^2$

$3a^2 + 36 + 12a + a^2 = 148$

$4a^2 + 12a - 112 = 0$

$a^2 + 3a - 28 = 0$

$(a-4)(a+7) = 0$

$a = 4$ lub $a = -7 < 0$

Zatem: $|AB| = 14$.

Stąd: $P = \frac{6+14}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$

Przykład 5

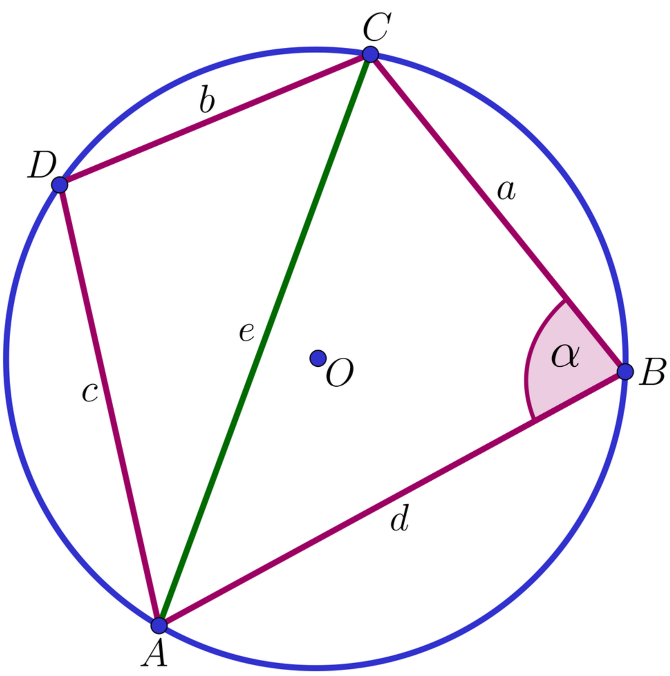
Udowodnimy, że dla dowolnego czworokąta o bokach długości a, b, c, d, który można wpisać w okrąg, jego pole wyraża się wzorem:

$P = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$

gdzie p oznacza połowę obwodu czworokąta.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Czworokąt $ABCD$ jest sumą trójkątów ABC i ACD, zatem:
$P = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}ad \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot (ad + bc) \cdot \sin\alpha$

Ponieważ na czworokącie $ABCD$ da się opisać okrąg, to $|\sphericalangle ABC| = \alpha$ i $|\sphericalangle ADC| = 180^\circ - \alpha$.

Stosując dwukrotnie twierdzenie cosinusów otrzymujemy:
$e^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha$
$e^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$

Zatem:
$a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha$, co daje:
$2bc \cdot \cos\alpha + 2ad \cdot \cos\alpha = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$ i stąd: $\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(bc+ad)}$

Zastosujemy następnie jedynkę trygonometryczną:
$\sin^2\alpha + \left(\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(bc+ad)}\right)^2 = 1$
$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(bc+ad)}\right)^2$ $\sin^2\alpha = 1 - \frac{\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2}{4(bc+ad)^2}$

Zauważmy, że:
$p^2 = \frac{1}{4} \cdot (ad + bc)^2 \cdot \sin^2\alpha$

Zatem:
$p^2 = \frac{(ad+bc)^2}{4} \cdot \left[1 - \frac{\left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2}{4(bc+ad)^2}\right]$

$p^2 = \frac{(ad+bc)^2}{4} \cdot \left[\frac{4(bc+ad)^2 - \left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2}{4(bc+ad)^2}\right]$
$p^2 = \frac{1}{16} \cdot \left[4(bc+ad)^2 - \left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2\right]$
$p^2 = \frac{1}{16} \cdot \left[[2(bc+ad)]^2 - \left(a^2+d^2-b^2-c^2\right)^2\right]$
$p^2 = \frac{1}{16} \cdot \left[2(bc+ad) + b^2 + c^2 - a^2 - d^2\right]\left[2(bc+ad) + a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right]$
$p^2 = \frac{1}{16} \cdot \left[b^2 + c^2 + 2bc - \left(a^2 - 2ad + d^2\right)\right]\left[a^2 + 2ad + d^2 - \left(c^2 - 2bc + b^2\right)\right]$
$p^2 = \frac{1}{16} \cdot \left[(b+c)^2 - (a-d)^2\right]\left[(a+d)^2 - (b-c)^2\right]$
$p^2 = \frac{1}{16} \cdot (b+c-a+d)(b+c+a-d)(a+d-b+c)(a+d+b-c)$

Oznaczmy przez $2p$ obwód czworokąta: $2p = a+b+c+d$.

Mamy zatem:
$2p - 2a = a+b+c+d-2a = b+c+d-a$
$2p - 2b = a+b+c+d-2b = a+c+d-b$
$2p - 2c = a+b+c+d-2c = a+b+d-c$
$2p - 2d = a+b+c+d-2d = a+b+c-d$
$p^2 = \frac{1}{2} \cdot (2p-2a) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2p-2d) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2p-2b) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2p-2c)$
$p^2 = \frac{1}{2} \cdot 2(p-a) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2(p-d) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2(p-b) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2(p-c)$
$p^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$
$p^2 = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

Słownik

sinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta do długości przeciwprostokątnej

twierdzenie cosinusów

w dowolnym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków minus podwojony iloczyn długości tych boków przez cosinus kąta leżącego między nimi

jedynka trygonometryczna

dla dowolnego kąta α suma kwadratów wartości sinusa i cosinusa tego kąta jest równa 1

twierdzenie sinusów

w dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa dowolnego kąta jest stały i równy średnicy okręgu opisanego na trójkącie

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami zastosowań trygonometrii w wyznaczaniu pól trójkątów i czworokątów.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1EhE999G

Film nawiązujący do treści materiału zastosowania funkcji trygonometrycznych do obliczania pól figur płaskich.

Polecenie 2

Pole trójkąta o bokach 4 i 12 oraz kącie rozwartym między nimi α wynosi $12\sqrt{3}$. Oblicz pole koła wpisanego w ten trójkąt.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

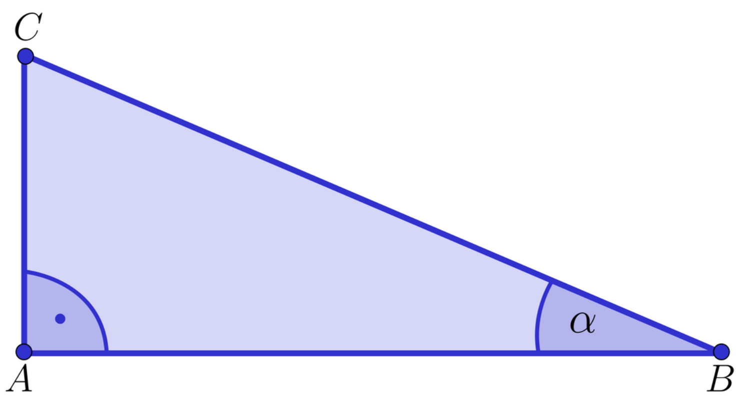
Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Oblicz pole trójkąta prostokątnego ABC wiedząc, że $\cos\alpha = 0,9$ i $|BC| = 9$.



Ćwiczenie 6

Krótsza podstawa trapezu prostokątnego ma długość 12, a tangens kąta ostrego jest równy $2\sqrt{2}$. Oblicz pole trapezu, jeśli dłuższe ramię ma długość 6.

Ćwiczenie 7

Różnica miar kątów równoległoboku wynosi 120°. Oblicz jego pole, jeśli krótsza przekątna ma długość $2\sqrt{21}$, zaś krótszy bok ma długość 6.

Ćwiczenie 8

W czworokącie wypukłym $ABCD$: $|AB| = 9$; $|CD| = 6$; $|AD| = 3$; $|\sphericalangle CDA| = 60^\circ$; $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$. Wyznacz pole tego czworokąta.

Dla nauczyciela

Autorzy: Aneta Rogalska, Tomasz Paszek

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie funkcji trygonometrycznych do obliczania pól figur płaskich

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

11) Stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.

Zakres rozszerzony. Uczeń:

stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

VII. Trygonometria.

Zakres rozszerzony. Uczeń:

5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wzory na pole trójkątów i czworokątów z wykorzystaniem funkcji sinus;
- wykorzystuje twierdzenie sinusów i cosinusów w zadaniach dotyczących pól figur płaskich;
- stosuje wzór na sinus sumy kątów;
- korzysta ze zdobytej wiedzy do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli;
- praca z tekstem;
- technika zdań niedokończonych.

Formy pracy:

- praca indywidualna;

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Uczniowie przypominają wszystkie znane wzory na pola figur płaskich i porządkują je w formie mapy myśli.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli klasę na grupy i w każdej wyznacza lidera. Uczniowie w grupach zapoznają się z tekstem zapisanym w sekcji „Przeczytaj”. Pracują w ten sposób, że starają się samodzielnie rozwiązać zadania zapisane w Przykładach, a następnie porównać z zapisami. Lider grupy odpowiedzialny jest za to, aby każdy z członków grupy zrozumiał rozwiązanie i potrafił samodzielnie rozwiązać podobny przykład.
2. Nauczyciel wyświetla animację. Wybrany uczeń rozwiązuje Polecenie 2.
3. Uczniowie w parach rozwiązują ćwiczenia 1, 4, 5 i 7 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel nie pomaga uczniom w pracy, ale w razie potrzeby zadaje pytania naprowadzające.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel prosi uczniów o podsumowanie lekcji w kontekście nowych umiejętności, które nabyli na lekcji, wykorzystując technikę zdań niedokończonych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia 2, 3, 6 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Twierdzenie cosinusów
- Zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczania pola trójkąta

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana podczas realizacji tematu: „Zastosowanie funkcji trygonometrycznych do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich”.