



Jedzie pociąg z A do B

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jednym z najwszechstronniejszych osiemnastowiecznych uczonych, był szwajcarski matematyk i fizyk Leonhard Euler.

Podobno Eulerowi zadano kiedyś zagadkę, której wersja współczesna jest następująca:

“ Dwa pociągi, znajdujące się w odległości 60 km, jadą z prędkością 60 km /h naprzeciw siebie po tym samym torze. Między nimi lata mucha. Zaczyna od środka, dolatuje do pierwszego pociągu, zawraca, leci do drugiego itd. Mucha lata z prędkością $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką długość będzie miała droga, którą pokona mucha, zanim pociągi się spotkają?



Leonhard Euler
1707 - 1783 r.

Euler od razu odpowiedział, że 10 km.

Na to rozmówca powiedział z podziwem:

- No, od razu wpadłeś na prosty sposób. Większość ludzi próbuje zsumować nieskończony ciąg geometryczny.

Na to Euler odpowiedział:

- Ale ja właśnie to zrobiłem!

Przeczytaj uważnie treści zawarte w tym materiale i spróbuj rozwiązać powyższe zadanie, nie uciekając się do narzędzi matematyki wyższej.

W tym materiale bowiem pokażemy jak razić sobie z zadaniami na prędkość – drogę – czas, które można zakwalifikować do grupy „naprzeciw siebie”.

Twoje cele

- Przeanalizujesz i rozwiążesz zadania tekstowe.
- Wykorzystasz umiejętności z różnych obszarów wiedzy matematycznej do określenia ich przydatności w najefektywniejszym rozwiązaniu zadań na prędkość – drogę – czas.

Przeczytaj

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DI87iX9QY>

Film przedstawiający ewolucję w podróżowaniu.

Wyobraź sobie dwa punkty materialne poruszające się z prędkościami odpowiednio $\nu_1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i $\nu_2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, które wyruszają jednocześnie naprzeciw siebie z miejsc A oraz B oddległych o s km. Jeśli te ciała spotkają się po upływie czasu t , to można zapisać, korzystając ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnym, że:

$$\nu_1 \cdot t + \nu_2 \cdot t = s$$



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Suma długości dróg przebytych przez oba punkty materialne jest równa odległości między punktami A i B .

Analizując zadanie na prędkość – drogę – czas, staramy się wybierać jak najkrótszy sposób znalezienia odpowiedzi na zadane pytania. Układamy więc, jeśli jest to możliwe, jak najprostsze równanie do rozwiązania.

Przykład 1

O godzinie 16 : 10 z miejscowości *A* wyruszył pociąg osobowy i podąża do stacji *B*.
O godzinie 17 : 40 ze stacji *B*, położonej w odległości 68,5 km od stacji *A* wyruszył pociąg towarowy poruszający się z prędkością $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Pociąg osobowy jechał początkowo z prędkością $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a po 30 min jazdy zwiększył prędkość o $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Maszynista pociągu osobowego dowiedział się, że po tym samym torze podąża pociąg towarowy i skierował pociąg na boczny tor, dopiero, gdy pociągi były w odległości 1 km od siebie. O której to było godzinie?

Rozwiązanie:

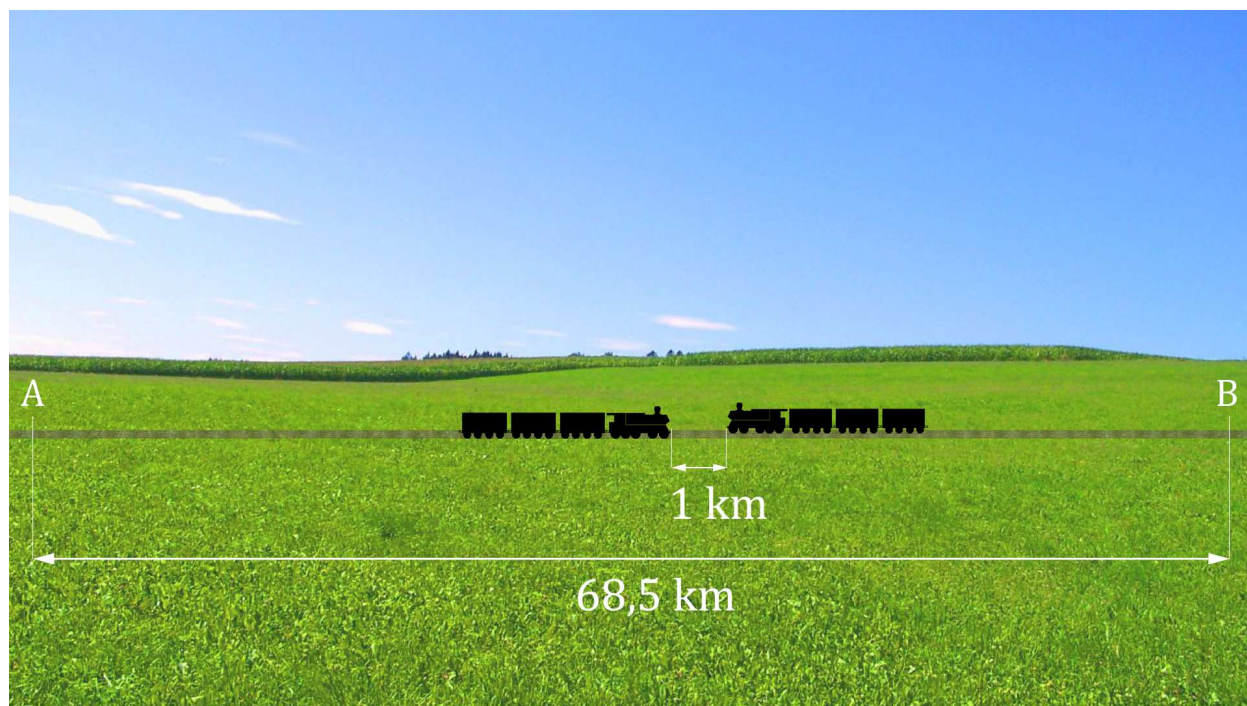
Oznaczmy:

x – czas (w h), w ciągu którego jechał pociąg osobowy do momentu, gdy maszynista dowiedział się, że po tym samym torze podąża pociąg towarowy.

Zauważmy, że początkowo pociąg osobowy jechał z prędkością $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a po 30 minutach, czyli po 0,5 godziny jechał z prędkością $(25 + 5) \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Zatem przejechał w tym czasie drogę długości $[25 \cdot 0,5 + 30 \cdot (x - 0,5)]$ km.

Pociąg towarowy jechał z prędkością $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i wyjechał o godzinie 17 : 40, czyli do momentu, gdy maszynista pociągu osobowego dowiedział się, że po tym samym torze podąża pociąg towarowy, jechał o 1,5 h, czyli $(17,40 - 16,10 = 1,30)$ krócej niż pociąg osobowy. Przejechał więc drogę długości $(x - 1,5) \cdot 20$ km.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., rancor2k, licencja: CC BY-SA 3.0.

Układamy i rozwiązujemy równanie, wynikające z powyższych rozważań.

$$[25 \cdot 0,5 + 30 \cdot (x - 0,5)] + 1 + (x - 1,5) \cdot 20 = 68,5$$

$$12,5 + 30x - 15 + 1 + 20x - 30 = 68,5$$

$$50x = 68,5 + 31,5$$

$$x = 2$$

Pociąg osobowy jechał 2 godziny, zatem do godziny 18 : 10.

Odpowiedź:

O godzinie 18 : 10 maszynista pociągu osobowego dowiedział się, że po tym samym torze podąża pociąg towarowy.

Przykład 2

Z Sydney wylatuje samolot *A* i leci do Los Angeles z prędkością $900 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W tym samym momencie z Los Angeles startuje samolot *B* i leci do Sydney z prędkością $2100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W jakiej odległości od miejsca startu samolot *A* minie samolot *B*, jeżeli odległość między Sydney a Los Angeles wynosi 18000 km?

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

s km – długość drogi przebytej przez samolot *A* do chwili spotkania z samolotem *B*,

$\frac{s}{900}$ h – czas, w ciągu którego samolot *A* przebył drogę długości s km,

$(18000 - s)$ km – długość drogi przebytej przez samolot *B* do chwili spotkania z samolotem *A*,

$\frac{18000-s}{2100}$ h – czas, w ciągu którego samolot *B* przebył drogę długości s km.

Samoloty wystartowały równocześnie, więc do momentu spotkania leciały tak samo długo. Stąd:

$$\frac{s}{900} = \frac{18000-s}{2100}$$

Mnożymy równanie „na krzyż” i wyznaczamy x .

$$2100 s = 16200000 - 900 s$$

$$3000 s = 16200000$$

$$s = 5400$$

Odpowiedź:

Samolot *A* minie samolot *B* w odległości 5400 km od miejsca startu.

W niektórych przypadkach rozwiązanie zadania na prędkość – drogę – czas prowadzi do zbudowania układu równań, a nawet do rozważenia równania kwadratowego.

Przykład 3

Z Zielonej Polany i Czarnej Polany wyszli naprzeciw siebie dwaj turyści – Jurek i Bogdan. Panowie minęli się po upływie 72 minut. Pan Jurek przybył do Zielonej Polany godzinę wcześniej niż pan Bogdan przyszedł do Czarnej Polany. Z jaką prędkością poruszał się pan Bogdan, jeżeli odległość między miejscowościami wynosiła 12 km?

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

$x \frac{\text{km}}{\text{h}}$ – prędkość, z jaką poruszał się pan Jurek,

$y \frac{\text{km}}{\text{h}}$ – prędkość, z jaką poruszał się pan Bogdan.

Panowie minęli się po 72 minutach, czyli po upływie $\frac{72}{60}$ godziny.

Układamy pierwsze równanie:

$$\frac{72}{60}x + \frac{72}{60}y = 12$$

Drugie równanie układamy wiedząc, że pan Jurek przybył do Zielonej Polany godzinę wcześniej niż pan Bogdan przyszedł do Czarnej Polany.

$$\frac{12}{y} - \frac{12}{x} = 1$$

Zapisujemy i upraszczamy otrzymany układ równań:

$$\begin{cases} \frac{72}{60}x + \frac{72}{60}y = 12 \\ \frac{12}{y} - \frac{12}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{72}{60}x + \frac{72}{60}y = 12 \mid \cdot 60 \\ \frac{12}{y} - \frac{12}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 72x + 72y = 720 \mid : 72 \\ \frac{12}{y} - \frac{12}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{12}{y} - \frac{12}{x} = 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ \frac{12}{10-x} - \frac{12}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ 12x - 12 \cdot (10 - x) = x \cdot (10 - x) \end{cases}$$

Drugie równanie jest równaniem kwadratowym – rozwiązujemy je.

$$12x - 120 + 12x = 10x - x^2$$

$$x^2 + 14x - 120 = 0$$

$$\Delta = 14^2 + 480 = 676 > 0$$

$$x_1 = \frac{-14-26}{2} = -20 < 0$$

Pierwszy z uzyskanych pierwiastków równania nie spełniał warunków zadania, gdyż prędkość musi wyrażać się liczbą dodatnią.

Wyznaczamy drugi pierwiastek:

$$x_2 = \frac{-14+26}{2} = 6 > 0$$

Pan Jurek poruszał się z prędkością $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Obliczamy teraz, z jaką prędkością poruszał się pan Bogdan.

$$y = 10 - 6 = 4$$

Odpowiedź:

Pan Bogdan poruszał się z prędkością $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Słownik

droga w ruchu jednostajnym

jest wprost proporcjonalna do czasu trwania ruchu (prędkość jest stała) i obliczamy ją ze wzoru:

$$s = v \cdot t,$$

gdzie:

$s(\text{km})$ – droga przebyta przez ciało

$v\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ – wartość prędkości ciała

$t(\text{h})$ – czas trwania ruchu

Animacja

Polecenie 1

Przypomnij sobie wzór na obliczenie długości drogi w ruchu jednostajnym. Jakie wielkości musisz znać?

Polecenie 2

Zapoznaj się z animacją – zaobserwuj, w jaki sposób można rozwiązywać zadanie na prędkość – drogę – czas.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DilOKmzZy>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej przemieszczania się obiektów z punktu A do punktu B.

Polecenie 3

Z miast odległych o 300 km wyjechały jednocześnie naprzeciw siebie – samochód ciężarowy i samochód osobowy. Samochód ciężarowy poruszał się z prędkością o $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejszą niż samochód osobowy. Z jakimi prędkościami jechały te samochody, jeżeli spotkały się po 2 godzinach od chwili rozpoczęcia podróży?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Samochód poruszał się z prędkością $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. W ciągu jakiego czasu pokonał drogę długości 108 km? Uzupełnij lukę w zdaniu, wpisując odpowiednią liczbę.

Drogę tę pokonał w ciągu minut.

Ćwiczenie 2



Adam jechał rowerem z prędkością $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaką długość ma droga, którą przebył w ciągu 12 min? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 3,6 km

☐ 1,5 km

☐ 4,5 km

☐ 2,16 km

Ćwiczenie 3



Jeździec drogę długości 78 km pokonał w ciągu 3 h 15 min. Z jaką prędkością się poruszał? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

☐ $28 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

☐ $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

☐ $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Ćwiczenie 4



Dwaj łyżwiarze trenują na tym samym torze o długości s m. Pierwszy przebywa tor w ciągu 3 minut, a drugi w ciągu 2 minut. Łyżwiarze wyruszają jednocześnie z przeciwległych końców torów naprzeciw siebie. Po ilu t minutach spotkają się?

Wskaż równanie, po rozwiązaniu którego otrzymamy szukaną wielkość.

☐ $\frac{2s}{t} + \frac{3s}{t} = s$

☐ $\frac{st}{2+3} = s$

☐ $\frac{t}{3} + \frac{t}{2} = s$

☐ $\frac{st}{3} + \frac{st}{2} = s$

Ćwiczenie 5



Przyszłościowy samolot hipersoniczny mógłby poruszać się z prędkością czterokrotnie większą niż Boeing 707 i drogę z Moskwy do Los Angeles długości 10000 km przeleciałby w czasie o 7,5 h krótszym niż Boeing 707. Z jaką prędkością mógłby latać samolot hipersoniczny? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 5000 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

☐ 2000 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

☐ 3000 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

☐ 4000 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Ćwiczenie 6



Szczupak i węgorz płynęły naprzeciw siebie. Szczupak z prędkością własną $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a węgorz z prędkością własną o $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejszą. Szczupak do momentu spotkania płynął z prądem 10 min, a węgorz pod prąd 5 min. Prędkość prądu rzeki wynosiła $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W jakiej odległości od siebie znajdowały się ryby początkowo? Uzupełnij lukę w zdaniu, przeciągając odpowiednią liczbę.

Na początku były oddalone od siebie o km.

2

4

1,5

1

3,5

Ćwiczenie 7



Odległość z Katowic do Krakowa wynosi 78 km. Z Katowic i Krakowa wyjeżdżają jednocześnie naprzeciw siebie motocyklista i samochód osobowy. Motocyklista jedzie z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a samochód osobowy z prędkością $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po jakim czasie odległość między nimi będzie równa 3 km?

Ćwiczenie 8



Odległość między miejscowościami A i B wynosi 295 km. O godzinie 13.30 wyruszyła z miejscowości A łódka, a o godzinie 14.30 wypłynął z miejscowości B kajak, poruszający się z prędkością o $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejszą niż łódka. Łódka i kajak spotkały się między godziną 18 a 19. Z jaką prędkością poruszała się łódka, a z jaką kajak, jeżeli ich prędkości wyrażały się liczbami całkowitymi?

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jedzie pociąg z A do B

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
- 2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
- 3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
- 4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- analizuje i rozwiązuje zadania tekstowe
- wykorzystuje umiejętności z różnych obszarów wiedzy matematycznej do określenia ich przydatności w najefektywniejszym rozwiązaniu zadań na prędkość – drogę – czas
- dobiera model matematyczny do rozwiązania zadania z kontekstem realistycznym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda odwróconej lekcji
- metoda sytuacyjna

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów i każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji**Przed lekcją:**

1. Nauczyciel prosi uczniów, aby w domu przypomnieli sobie wiadomości z zakresu prędkość – droga – czas.

Faza wstępna:

Uczniowie analizują animację i rozwiązują zadanie o samochodzie osobowym i ciężarowym.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie w grupach analizują zadania z sekcji Przeczytaj. Ich zadaniem jest wytypowanie jednego zadania charakterystycznego do całej grupy zadań i na jego podstawie skonstruowanie algorytmu rozwiązywania podobnych zadań.

Uczniowie pracują metodą sytuacyjną – prezentują pomysły swoich grup, wspólnie ustalają jedno wzorcowe zadanie typowe dla całej klasy zadań typu „naprzeciw siebie”.

Teraz, korzystając z ułożonego schematu, rozwiązują indywidualnie trzy dowolne zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Prędkość, droga i czas](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana w czasie zajęć jako podsumowanie lekcji.